

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ქსზვიტარიძე, გ.ქარსელაძე, ი.სიგუა,
ე.ელერდაშვილი, მ.ხშიადაშვილი, ზ.თედიაშვილი

მათემატიკა ეკონომისტებისათვის

(ამოცანათა კრებული)

ნაწილი II

დამტკიცებულია სტუ-ს
სასწავლო-მეთოდური
საბჭოს მიერ

თბილისი

2005

უაკ

წიგნი წარმოადგენს მათემატიკის პრაქტიკული სავარჯიშო-ებისა და ამოცანების კრებულს, რომელიც განკუთვნილია უმაღლესი სასწავლებლების ეკონომიკური და საბანკო-საფინანსო პროფილის ბაკალავრიატის საფეხურის სტუდენტებისათვის. შინაარსობრივად და სტრუქტურულად იგი სრულ შესაბამისობაშია ამჟამად მოქმედ, განათლების სამინისტროს მიერ დამტკიცებულ სახელმძღვანელოსთან “მათემატიკა ეკონომისტებისათვის” (თბილისი, გლობალ-პრინტი, 1999).

რედაქტორი: პროფესორი დ. ნატროშვილი

რეცენზენტები: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი დ. ნატროშვილი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
პროფესორი ა. გაგნიძე

© გამომცემლობა “ტექნიკური უნივერსიტეტი”, 2005

ISBN

**მარყინალური ფუნქციები. ფუნქციის
წარმოებული. დიფერენციალი. ფუნქციის
სრული გამოკვლევა**

7.1. წარმოებულის განმარტების გამოყენებით იპოვეთ შემდე-
გი ფუნქციის წარმოებული:

1) $f(x) = x^2$;

2) $f(x) = x^3$;

3) $f(x) = 2^x$;

4) $f(x) = e^x$;

5) $f(x) = -4x^2 + 1$;

6) $f(x) = (2x + 3)^2$.

7.2. შექცეული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით
იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების წარმოებულები:

1) $y = \operatorname{arctg} x$;

2) $y = \ln x$;

3) $y = \operatorname{arcsin} x$.

7.3. რთული ფუნქციის გაწარმოების წესის გამოყენებით გა-
მთვალეთ ფუნქციის წარმოებული:

1) $x^x \quad (x > 0)$;

$$2) x^{\sin x} \quad (x > 0);$$

$$3) x^{\ln x} \quad (x > 0).$$

7.4. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ქმნის $f(x) = x^2$ ფუნქციის გრაფიკის $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ წერტილზე გამავალი მხები აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

7.5. იპოვეთ კუთხე, რომელსაც ქმნის $f(x) = \sqrt{3}x^3$ ფუნქციის გრაფიკის $M\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{27}\right)$ წერტილზე გამავალი მხები აბსცისათა ღერძის დადებით მიმართულებასთან.

7.6. იპოვეთ $y = x^2 - 2x + 12$ ფუნქციის გრაფიკის $M(1; 2)$ წერტილზე გამავალი მხების კუთხური კოეფიციენტი.

7.7. გამოთვალეთ არგუმენტის Δx ნაზრდი და ფუნქციის Δy ნაზრდი $y = x^2 - 2x + 3$ ფუნქციისათვის, თუ x იცვლება:

ა) 1-დან 4-მდე;

ბ) 5-დან 3-მდე;

გ) 0-დან 1-მდე.

7.8. იპოვეთ $f(x)$ ფუნქციის ნაზარდი x წერტილში, თუ არგუმენტის ნაზრდია Δx :

ა) $f(x) = x^3$;

ბ) $f(x) = \sqrt{x} + 1$;

გ) $f(x) = \frac{2}{x-1}$.

7.9. გაწარმოების წესებისა და ძირითადი ელემენტარული ფუნქციების წარმოებულების ცხრილის გამოყენებით იპოვეთ წარმოებულები:

$$1) y = x^3 - 2x^2 + 4;$$

$$2) y = x^5 - x^3 + 3x^2 - 2;$$

$$3) y = \frac{2}{6}x^6 - \frac{3}{4}x^4 + 2x;$$

- 4) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^2}{2} + 7;$
- 5) $y = x^2 + 2^x + 3\sqrt{x};$
- 6) $y = 2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} - x;$
- 7) $y = 2x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{5}{4}};$
- 8) $y = 3x^{\frac{5}{3}} + 4x^{\frac{7}{4}} - 5x^{\frac{8}{5}};$
- 9) $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3};$
- 10) $y = \frac{2}{x^{3/2}} + \frac{4}{x^{5/4}} - \frac{6}{x^{7/6}};$
- 11) $y = 2 \sin x + 6 \cos x + x;$
- 12) $y = 4 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} x + 1;$
- 13) $y = 4^x + 3 \cdot 2^x;$
- 14) $y = 6 \ln x + 7e^x;$
- 15) $y = 3 \arcsin x - 4 \arccos x;$
- 16) $y = 6 \operatorname{arctg} x - 7 \operatorname{arcctg} x;$
- 17) $y = (2x^2 + x) \sin x;$
- 18) $y = (3x^3 + 2x) \cos x;$
- 19) $y = (x^4 + 2x^3) \ln x;$
- 20) $y = e^x \sin x;$
- 21) $y = 5^x \cos x + \ln 5;$
- 22) $y = 3^x \ln x + \ln 3;$
- 23) $y = \ln x \sin x;$
- 24) $y = \cos x \operatorname{tg} x;$
- 25) $y = x \arcsin x;$

26) $y = \sqrt{x} \log_2 x;$

27) $y = x^3 3^x;$

28) $y = (\sin x + \cos x) 2^x;$

29) $y = \frac{x+1}{x-2};$

30) $y = \frac{x+3}{x^2+1};$

31) $y = \frac{x}{1-x^2};$

32) $y = \frac{x^2}{3^x};$

33) $y = \frac{2^x}{\sin x};$

34) $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x};$

35) $y = \frac{x^3 - 2x + 1}{e^x};$

36) $y = \frac{\sin x}{e^x};$

37) $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x};$

38) $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$

7.10. იპოვეთ წარმოებულები:

1) $y = 2 \ln x + (x^2 + 2x)e^x + \frac{x+3}{x-1} + 1;$

2) $y = 3 \cdot 5^x + x^4 \sin x + \frac{\cos x}{e^x} - 2;$

3) $y = 4 \sin x + x^7 \cdot 7^x + \frac{\sin x}{\cos x} + 3;$

- 4) $y = 5 \cos x + (x^3 + 2x) 3^x + \frac{\sqrt{x}}{\sin x} - \ln 2;$
- 5) $y = 7 \arcsin x + \sin x \ln x - \frac{e^x}{\cos x} + 4;$
- 6) $y = 2 \arccos x - x^3 \cdot \cos x - \frac{\sin x}{x^2} + 6;$
- 7) $y = 5 \operatorname{arctg} x - \sin x \cos x - \frac{4^x}{x} - 8;$
- 8) $y = 3 \operatorname{arcctg} x - \ln x e^x - \frac{\sin x}{e^x} + 9.$

7.11. $\text{одредити } f'(x_0), \text{ ако}$

- 1) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3, \quad x_0 = 3;$
- 2) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 5, \quad x_0 = 1;$
- 3) $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}, \quad x_0 = 4;$
- 4) $f(x) = \frac{6}{x\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad x_0 = 8;$
- 5) $f(x) = x(x^2 - 2), \quad x_0 = 5;$
- 6) $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+3}, \quad x_0 = 0;$
- 7) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}, \quad x_0 = -2;$
- 8) $f(x) = \frac{4x}{3x+1}, \quad x_0 = 1;$
- 9) $f(x) = \frac{4e^x}{x^2+1}, \quad x_0 = 0;$
- 10) $f(x) = \ln \frac{3x}{x-1}, \quad x_0 = -1;$
- 11) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad x_0 = 1;$

$$12) f(x) = \sqrt{1 + \ln^2 x}, \quad x_0 = 1;$$

$$13) f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}}, \quad x_0 = 0;$$

$$14) f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1), \quad x_0 = 0.$$

7.12. აპოკეთ შემდეგი ფუნქციის წარმოებულო:

$$1) y = (x^3 + 2x^2 - 3)^4; \quad 2) y = (5x^4 - 3x^3 + 2x)^3;$$

$$3) y = \sin 2x; \quad 4) y = 5 \cos \frac{x}{5};$$

$$5) y = \ln(3x - 4); \quad 6) y = \ln(9x^2 + 5);$$

$$7) y = \sqrt{2x + 3}; \quad 8) y = \sqrt{x^2 - 4x + 1};$$

$$9) y = \sin^3 4x; \quad 10) y = \cos^2 2x;$$

$$11) y = \ln(\sin x); \quad 12) y = \cos(\ln x);$$

$$13) y = 3^{x^3+1}; \quad 14) y = 4^{\sqrt{x^6-1}};$$

$$15) y = 4^{\sin x}; \quad 16) y = 5^{\cos x};$$

$$17) y = \sin(x^3+1) + \ln x^4; \quad 18) y = \ln(x^3 - 4) - e^{3x};$$

$$19) y = 2^{\arcsin 4x} + 3^{\arccos 2x}; \quad 20) y = 4^{\operatorname{arctg} 3x} + 5^{\operatorname{arctg} 2x};$$

$$21) y = \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}; \quad 22) y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt{x};$$

$$23) y = x^3 \cdot e^{3x}; \quad 24) y = x^2 \cdot 2^{\sqrt{x}};$$

$$25) y = \arcsin \sqrt{x}; \quad 26) y = \ln \sqrt{\frac{x}{x-1}};$$

$$27) y = e^{x^2} \cdot \cos 4x; \quad 28) y = 4^{x^3-5} \cdot \arcsin 3x;$$

$$29) y = \frac{\sin x}{\sqrt{\sin 2x}};$$

$$30) y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + a^2), \quad a \neq 0.$$

7.13. იპოვეთ ფუნქციის მკორე რიგის წარმობეული:

- | | |
|---------------------------|-----------------------------------|
| 1) $y = x^3 - 2x^2 + 3;$ | 2) $y = x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x;$ |
| 3) $y = \sqrt{1 - x^2};$ | 4) $y = \sqrt{3 + x^3};$ |
| 5) $y = (x^3 + 1)^3;$ | 6) $y = (2x - 3)^4;$ |
| 7) $y = x^4 \cdot \ln x;$ | 8) $y = x^5 \cdot e^x;$ |
| 9) $y = \arcsin x;$ | 10) $y = \operatorname{arctg} x;$ |
| 11) $y = e^{3x+4};$ | 12) $y = 2^{6x+7};$ |
| 13) $y = \ln(x^3 + 5x);$ | 14) $y = \sin x + 3e^{5x};$ |
| 15) $y = 4 + \sin^2 x;$ | 16) $y = e^x \cdot \sin x.$ |

7.14. იპოვეთ ფუნქციის n -ური რიგის წარმობეული:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| 1) $y = a^x;$ | 2) $y = a^{mx};$ |
| 3) $y = \sin x;$ | 4) $y = \cos x;$ |
| 5) $y = \sin ax;$ | 6) $y = \cos ax;$ |
| 7) $y = e^{2x};$ | 8) $y = 2^{3x}.$ |

7.15. იპოვეთ ფუნქციის დიფერენციალი:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| 1) $y = 2x^2 + 3x - 14;$ | 2) $y = 5\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x;$ |
| 3) $y = \sin 3x + \ln 2x;$ | 4) $y = \ln 3x + 2^{x+1};$ |
| 5) $y = (x^2 - x + 1)^2;$ | 6) $y = \sin^3 x;$ |
| 7) $y = x^2 \cdot e^{4x};$ | 8) $y = \arccos 3x + \operatorname{arctg} 6x;$ |
| 9) $y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x};$ | 10) $y = \ln \cos x;$ |
| 11) $y = x^4 \log_3 x;$ | 12) $y = \frac{5}{x + x^2};$ |
| 13) $y = \sqrt[3]{2x^2 + 3};$ | 14) $y = 3^{\sin x} + 2^{\cos 3x};$ |
| 15) $y = \frac{x + 1}{x - 1};$ | 16) $y = \frac{x^3 - 3}{x^2 + 2}.$ |

7.16. დიფერენციალის საშუალებით იპოვეთ მიახლოებითი მნიშვნელობები:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1) $\sqrt[6]{67,84}$; | 2) $\sqrt[5]{255,15}$; |
| 3) $1,015^7$; | 4) $0,995^6$; |
| 5) $\sqrt[3]{28,62}$; | 6) $e^{1,02}$; |
| 7) $\ln(e + 0,544)$. | |

7.17. მთლიანი ამონაგების ფუნქციაა

$$(TR) = f(Q) = 300Q - 2Q^2.$$

- რას უდრის მარჟინალური ამონაგების ფუნქციის მნიშვნელობა, როცა $Q = 25$;
- გამოთვალეთ ამონაგების ფუნქციის ცვლილება მოთხოვნის $\Delta Q = 5$ ერთეულით გაზრდისას, თუ მოცემულ მომენტში მოთხოვნაა $Q = 25$ ერთეული.

7.18. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$P = 80 - Q.$$

- მოძებნეთ მთლიანი ამონაგების ფუნქციისა და მისი შესაბამისი მარჟინალური ამონაგების ფუნქციის გამოსახულებები;
- გამოთვალეთ მარჟინალური ამონაგები, როცა $Q = 20$;
- იპოვეთ მთლიანი ამონაგების ცვლილება, თუ მოთხოვნა იზრდება ერთი ერთეულით და შეადარეთ იგი მარჟინალური ამონაგების მნიშვნელობას $Q = 20$ ერთეულზე.

7.19. გამოთვალეთ მარჟინალური ამონაგები, თუ მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია შემდეგი ტოლობით:

- ა) $P = 6 - 2Q$;
 ბ) $P = \frac{500}{\sqrt{3+Q}}$;
 გ) $P = \sqrt[3]{200 - 4Q}$.

7.20. მთლიანი ამონაგების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$(TR) = \ln \sqrt[3]{\left(\frac{1-3Q}{1+3Q}\right)^2}.$$

იპოვეთ მარჟინალური ამონაგები, როცა $Q = 1$.

7.21. საწარმოს მუდმივი დანახარჯია $(FC) = 500$ \$, ხოლო ცვლადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულზე – $(VC) = 3$ \$.

- ა) იპოვეთ მთლიანი და მარჟინალური დანახარჯები;
 ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი, როცა $Q = 40$;
 გ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილება, თუ მოთხოვნა გაიზარდება 40 ერთეულიდან 43 ერთეულამდე.

7.22. ვთქვათ, წარმოების საშუალო დანახარჯის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით:

$$(AC) = 3Q + 4 + \frac{15}{Q}.$$

- ა) იპოვეთ მთლიანი დანახარჯისა და მარჟინალური დანახარჯის ფუნქციები;
 ბ) მოძებნეთ მარჟინალური დანახარჯის საშუალებით გამოთვლილი სრული დანახარჯის ცვლილება, თუ წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა მცირდება 20-დან 18 ერთეულამდე;

გ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ზუსტი ცვლილება, როცა $Q = 20$ -ს და პროდუქციის რაოდენობა მცირდება 2 ერთეულით. იპოვეთ სხვაობა მთლიანი დანახარჯის ზუსტ და მიახლოებით მნიშვნელობებს შორის.

7.23. წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია 75 დოლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი პროდუქციის ერთეულის წარმოებისათვის — $4 + \frac{3}{Q}$.

ა) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯი და მარჩინალური დანახარჯი პროდუქციის Q რაოდენობისათვის;

ბ) გამოთვალეთ მთლიანი დანახარჯის ცვლილების ზუსტი მნიშვნელობები

(1) მოთხოვნის $\Delta Q = 3$ ერთეულით გაზრდისას,

(2) მოთხოვნის $\Delta Q = 4$ ერთეულით შემცირებისას,

თუ აღებულ მომენტში პროდუქციის რეალიზაციის დონეა $Q = 50$ ერთეული.

7.24. ფირმის მიერ დაგეგმილი დანახარჯი მოიცემა ფუნქციით:

$$K(Q) = (TC) = \frac{9}{3} Q^3 - 9Q^2 + 3.$$

წარმოების რა მოცულობის დროს იქნება დანახარჯები მინიმალური?

7.25. წარმოების მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა

$$K(Q) = 0,03Q^2 - 2Q + 300.$$

ა) იპოვეთ საშუალო დანახარჯისა და მარჩინალური დანახარჯის ფუნქციები;

ბ) იპოვეთ საშუალო დანახარჯი და მარჟინალური დანახარჯი, როცა:

$$(1) Q = 50, \quad (2) Q = 100;$$

გ) წარმოების რა მოცულობისათვის იქნება საშუალო დანახარჯი მინიმალური?

7.26. წარმოების მუდმივი დანახარჯია 150 დოლარი, ხოლო ცვალებადი დანახარჯი — 2 დოლარი, მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P + 2Q = 82.$$

გამოსახეთ მოგების Π ფუნქცია Q -ს საშუალებით.

ა) იპოვეთ საქონლის რა რაოდენობა იძლევა 200 დოლარის ტოლ მოგებას;

ბ) პროდუქციის რა რაოდენობა უზრუნველყოფს მოგების მაქსიმალურ სიდიდეს?

7.27. მოთხოვნის ფუნქციაა $P = 447 - 2Q$, ხოლო საშუალო დანახარჯის ფუნქცია — $(AC) = \frac{7}{Q} + 3$. იპოვეთ პროდუქციის ის რაოდენობა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.

7.28. მოცემულია მთლიანი ამონაკებისა და მთლიანი დანახარჯის ფუნქციები:

$$(TR) = -3Q^2 + 40Q,$$

$$(TC) = 4Q + 5.$$

იპოვეთ მოგების ფუნქციის მაქსიმუმი.

7.29. პროდუქციის წარმოების ფიქსირებული დანახარჯია $(FC) = 80$ \$, ხოლო პროდუქციის ერთეულზე ცვალებადი დანახარჯი — $(VC) = 4$ \$. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 300 - Q.$$

- ა) იპოვეთ მარჟინალური მოცუბის ფუნქცია;
- ბ) მარჟინალური მოცუბის საშუალებით მიახლოებით გამოთვალეთ მოცუბის ცვლილება, რომელიც შეესაბამება წარმოებული პროდუქციის რაოდენობის ცვლილებას $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე;
- გ) გამოთვალეთ მოცუბის ზუსტი ცვლილება $Q_1 = 40$ ერთეულიდან $Q_2 = 42$ ერთეულამდე და შეადარეთ ბ)-ში მიღებულ მიახლოებით მნიშვნელობას.

7.30. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 40 - Q,$$

ხოლო სრული დანახარჯის ფუნქცია —

$$(TC) = \frac{1}{2} Q^2 + 4Q - 10.$$

- ა) წარმოების რა დონე უზრუნველყოფს მთლიანი ამონაკების მაქსიმუმს?
- ბ) წარმოების რა Q_0 დონე უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოცუბას? იპოვეთ მოცუბის ეს მნიშვნელობა.

7.31. მოხმარების ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$C(Y) = 0,01Y^2 + 0,1Y + 25,$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია.

გამოთვალეთ მარჟინალური მიდრეკილებები მოხმარებისა (MPC) და დანახარჯისადმი (MPS), როდესაც $Y = 40$. გააანალიზეთ მიღებული შედეგები.

7.32. დანახარჯის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$S(Y) = 0,7Y + 90,$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია.

იპოვეთ მარჟინალური მიდრეკილებები დაზოგვისა (MPS) და მოხმარებისადმი (MPC).

7.33. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = 500 - 4Q.$$

- ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ცვლილების მიმართ, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასი კლებულობს 120 დოლარიდან 100 დოლარამდე;
- ბ) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როცა $P = 120$. გააანალიზეთ მიღებული შედეგები.

7.34. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = 75 - 3Q.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როდესაც

- ა) $P = 6$; ბ) $P = 60$.

7.35. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = 90 - Q.$$

- ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის საშუალო ელასტიკურობა ფასის ცვლილების მიმართ, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასი გაიზარდა 30 დოლარიდან 35 დოლარამდე;
- ბ) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა, როდესაც $P = 30$.

7.36. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = -Q^2 - 2Q + 57.$$

- ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 22$;
- ბ) როგორია მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ ფასის პროცენტული ცვლილებაა 3%.

7.37. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = -2Q^2 - 7Q + 1000.$$

- ა) გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, თუ მოთხოვნაა $Q = 20$;
- ბ) ფასის როგორი პროცენტული ცვლილება გამოიწვევს მოთხოვნის 2%-იან ცვლილებას?

7.38. გამოთვალეთ მოთხოვნის (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, თუ $P = 12$ და მოთხოვნის ფუნქცია მოიცემა ტოლობით

$$P = \sqrt{500 - 3Q}.$$

7.39. მოცემულია მიწოდების ფუნქცია

$$Q = 0,5P^2 + 2P + 10.$$

- ა) გამოთვალეთ მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასი გაიზარდა 6 დოლარიდან 9 დოლარამდე;
- ბ) გამოთვალეთ მიწოდების (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 6$.

7.40. იპოვეთ მიწოდების საშუალო ელასტიკურობა ფასის ნაზრდის მიმართ, თუ მიწოდების ფუნქციაა

$$Q = 0,01P^2 + 0,5P + 60$$

და პროდუქციის ერთეულის ფასი კლებულობს 50 დოლარიდან 46 დოლარამდე. გამოთვალეთ ზღვრული ელასტიკურობა, როდესაც ფასია 50 დოლარი.

7.41. მიწოდების ფუნქციაა

$$Q = 0,007P^2 + 3P + 4.$$

- ა) გამოთვალეთ მიწოდების (ზღვრული) ელასტიკურობა ფასის მიმართ, როცა $P = 15$;
- ბ) როგორია მიწოდების პროცენტული ცვლილება, თუ ფასის პროცენტული ცვლილებაა 10 %.

7.42. საკონცერტო დარბაზი იტევს 9000 მაყურებელს. თუ ბილეთის ფასი იქნება 8 დოლარი, მაშინ იყიდება 7500 ბილეთი. ბილეთის ფასის 2 დოლარით გაიაფებამ გაყიდული ბილეთების რაოდენობა გაზარდა 1500-ით. რა ფასად უნდა გაიყიდოს ბილეთი, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური, თუ დამოკიდებულება ბილეთის ფასსა და გაყიდული ბილეთების რაოდენობას შორის წრფივია?

7.43. სპორტული კოსტუმის ფასი გაიზარდა 12 დოლარიდან 15 დოლარამდე. ამის გამო ნაცვლად 6000-ისა თვეში იყიდება 5000 ცალი კოსტუმი. ცნობილია, რომ დამოკიდებულება ფასსა და გაყიდული სპორტული კოსტუმების რაოდენობას შორის წრფივია. იპოვეთ:

- ა) მოთხოვნის ფუნქცია;
- ბ) როგორი უნდა იყოს სპორტული კოსტუმის ფასი, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური?

7.44. სავაჭრო ფირმას აქვს შენობა, რომელშიც განლაგებულია 150 ოფისი. თუ ყოველთვიური გადასახადი თითოეულ

ოფისზე იქნება 350 დოლარი, მაშინ ყველა ოფისი გაქირავდება. მარკეტინგულმა ანალიზმა აჩვენა, რომ გადასახადის 8 დოლარით გაძვირება იწვევს გაქირავებული ოფისების 2-ით შემცირებას. რა გადასახადი უნდა დააწესოს ფირმამ, რომ მიიღოს მაქსიმალური მთლიანი ამონაგები? (იგულისხმება, რომ გადასახადი გაქირავებული ოფისების რაოდენობის წრფივი ფუნქციაა.)

7.45. საუბრო ფირმა ყოველ თვეში ყიდის 500 ცალ მსუბუქ ავტომანქანას, თითოეულს 2500 დოლარად. მარკეტინგული ანალიზი გვიჩვენებს, რომ 200 დოლარით ფასდაკლება იწვევს გაყიდული ავტომობილების რაოდენობის 50-ით ზრდას.

- ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ ის წრფივია;
- ბ) რა ფასი უნდა დაედოს მსუბუქ ავტომობილს, რომ მთლიანი ამონაგები იყოს მაქსიმალური?
- გ) ფირმის ყოველთვიური დანახარჯების ფუნქცია გამოისახება ტოლობით:

$$K(Q) = 45000 + 100Q.$$

როგორი უნდა იყოს ავტომობილის ფასი, რომ მივიღოთ მაქსიმალური მოგება?

7.46. პურის ქარხანა ყოველდღიურად ყიდის 3000 ცალ პურს, თითოეულს 0,5 დოლარად. პურის ფასის გაზრდამ 0,2 დოლარით გამოიწვია გაყიდული პურის რაოდენობის 100-ით შემცირება.

- ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ ის გაყიდული პურის რაოდენობაზე წრფივადაა დამოკიდებული;

ბ) რა ფასი უნდა დაედოს პურს, რომ მოგება იყოს მაქსიმალური, თუ მის დასამზადებლად იხარჯება 0,3 დოლარი?

7.47. მატარებელში არის 15 ვაგონი. თითოეულ ვაგონში 40 ადგილია. თუ მატარებლის ბილეთის ფასი არის 10 დოლარი, მაშინ იყიდება 580 ბილეთი. საფხულის პერიოდში ბილეთის ღირებულება გაზარდეს 1 დოლარით, რამაც გამოიწვია გაყიდული ბილეთების რაოდენობის 29-ით შემცირება.

ა) იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია, თუ დამოკიდებულება გაყიდული ბილეთების რაოდენობასა და ბილეთის ფასს შორის წრფივია;

ბ) როგორი უნდა იყოს ბილეთის ფასი, რომ მთლიანი ამონაკები იყოს მაქსიმალური? იპოვეთ ეს მაქსიმალური ამონაკები.

7.48. იპოვეთ მონოტონურობის შუალედები:

$$1) y = 2x^3 + 3x^2 + 4x; \quad 2) y = -x^3 + 2x^2 - 5x;$$

$$3) y = x^3 - 27x + 2; \quad 4) y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x + 3;$$

$$5) y = (x - 5)^2; \quad 6) y = \frac{1}{2x + 3};$$

$$7) y = \ln x - \frac{8}{3}x^3; \quad 8) y = \ln(4 - x^2).$$

7.49. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების ექსტრემუმი:

$$1) y = 2x^2 + 8x - 1; \quad 2) y = 4x - x^2;$$

$$3) y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5; \quad 4) y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1;$$

$$5) y = \frac{x^4}{4} - x^3; \quad 6) y = \frac{x^4}{4} - 2x^2;$$

$$7) y = \sqrt[4]{x^5} + 1; \quad 8) y = 3x - 2\sqrt{x};$$

$$\begin{array}{ll}
 9) y = \frac{1}{1+x^2}; & 10) y = \frac{x^3}{1+x^2}; \\
 11) y = \frac{x^2}{x-3}; & 12) y = e^{x^2}; \\
 13) y = \frac{e^x}{x}; & 14) y = x \cdot e^{-x}; \\
 15) y = \ln x + \frac{2}{x}; & 16) y = x \ln^2 x.
 \end{array}$$

7.50. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები მითითებულ შუალედში:

$$\begin{array}{l}
 1) y = x^2 - 2x, [0; 3]; \\
 2) y = x^4 - 8x^2 + 3, [-3; 3]; \\
 3) y = x + \sqrt{x}, [0; 4]; \\
 4) y = (x-3)^2 e^{-x}, [0; 6].
 \end{array}$$

7.51. იპოვეთ ამოზნექილობის და ჩაზნექილობის შუალედები და გადაღუნვის წერტილები:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = x^3 - 6x^2 + 3; & 2) y = 2x - 5x^3; \\
 3) y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2; & 4) y = x^4 + 6x^3 - 60x^2 + 3; \\
 5) y = x e^x; & 6) y = 2x^2 + \ln x; \\
 7) y = \frac{x}{x+1}; & 8) y = x^4 + x^2 + e^x; \\
 9) y = \sqrt{x-2}; & 10) y = \frac{1}{x^2 + x + 1}.
 \end{array}$$

7.52. იპოვეთ შემდეგი ფუნქციების გრაფიკების ასიმპტოტები:

$$\begin{array}{ll}
 1) y = \frac{3}{x+5}; & 2) y = \frac{4}{(x-3)(x-7)}; \\
 3) y = \frac{2}{x^2-9}; & 4) y = \frac{x}{x^2-16};
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
5) y = \frac{9(x^2 - 5)}{3x^2 + 7}; & 6) y = \frac{x}{(x + 3)^2}; \\
7) y = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2 + x - 6}; & 8) y = \frac{x^3 + x + 2}{2x^3 - 16}; \\
9) y = \frac{2 - 3x}{4 + 5x}; & 10) y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}; \\
11) y = x + \frac{1}{x}; & 12) y = 2x + \frac{2}{x + 1}; \\
13) y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}; & 14) y = \frac{x^3}{x^2 + x - 2}; \\
15) y = \frac{5x^5}{x^4 - 9}; & 16) y = \frac{2x^7}{4 + x^6}; \\
17) y = \ln(1 - x^2); & 18) y = \frac{2x^3 \ln x}{x^2 + 1}.
\end{array}$$

7.53. გამოიკვლიეთ შემდეგი ფუნქციები და ააგეთ მათი გრაფიკები:

$$\begin{array}{ll}
1) y = x^2 + x; & 2) y = x^2 + \frac{1}{x}; \\
3) y = x^3 - 12x^2 + 36x; & 4) y = x^3 - 3x^2 - 24x + 1; \\
5) y = \frac{x + 2}{3x - 1}; & 6) y = \frac{2x + 1}{x - 1}; \\
7) y = \frac{x^2}{1 - x}; & 8) y = \frac{x^2}{x - 3}; \\
9) y = x + \frac{1}{x}; & 10) y = e^{-x^2/2}; \\
11) y = \ln(1 + x^2); & 12) y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}.
\end{array}$$

მრავალი ცვლადის ფუნქციები

- 8.1. გამოსახეთ მართკუთხედის S ფართობი, როგორც მისი a გვერდისა და b დიაგონალის ფუნქცია.
- 8.2. გამოსახეთ მთლიანი ამონაგები (TR), როგორც საქონლის Q რაოდენობისა და ამ საქონლის ერთი ერთეულის P ფასის ფუნქცია.
- 8.3. გამოთვალეთ ფუნქციის მნიშვნელობა მითითებულ წერტილში:
- 1) $z = x^2y^3 - 4xy - 8x$, $M(1; -2)$;
 - 2) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(-1; 2)$;
 - 3) $z = (x^2 + 1) \ln(x + y^2)$, $M(0; 2)$.
- 8.4. იპოვეთ ფუნქციის განსაზღვრის არე:

- 1) $z = x^2 + y$;
- 2) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;
- 3) $z = \frac{xy}{x - y}$;
- 4) $z = \ln(16 - x^2 - y^2)$;
- 5) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$;
- 6) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$;

$$7) z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}};$$

$$8) z = \frac{5}{x^2 - 4y^2};$$

$$9) z = \ln x(y^2 + 1);$$

$$10) z = \ln x^2(y - 2)^2;$$

$$11) z = \ln(x - 3)y^2.$$

8.5. გამოთვალეთ ზღვარი:

$$1) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} (3x^2 - 2xy + y^2);$$

$$2) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 0}} (5x^2 + 7xy - 8y^2);$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ y \rightarrow 2}} \sqrt{8x^2 + 4y^2};$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{4x^2 + y^2}};$$

$$5) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{3xy}{x^2 + y^2 + 5};$$

$$6) \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 2}} \frac{3 - \sqrt{xy + 4}}{x^2 + y^2 + 1}.$$

8.6. შეიხვევლეთ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{როცა } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{როცა } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

ფუნქციის უწყვეტობის საკითხი.

8.7. შეამოწმეთ, უწყვეტია თუ არა ფუნქცია

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{როცა } x^4 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{როცა } x^4 + y^2 = 0. \end{cases}$$

8.8. იპოვეთ ფუნქციის პირველი რიგის კერძო წარმოებულები:

- 1) $z = x^2 y^3 - 4xy^2 + 7x^3 + 10;$
- 2) $x = 4x^3 y^2 - 2xy - 3y^2 + 5;$
- 3) $z = 5x^2 + 7xy^4 - 14x + 15y + 11;$
- 4) $z = x^2(y^3 - x^3);$
- 5) $z = (y - 3) \ln^2 x;$
- 6) $\frac{x^2}{3x^2 - y^2};$
- 7) $z = y^3 e^{4x^2};$
- 8) $z = \frac{x^2 + 5y}{4x^2 + 7y^2};$
- 9) $z = \frac{4x^2 + 5y^3}{4x - 8};$
- 10) $z = \frac{4y^2}{5x^2 - 18};$
- 11) $z = \frac{x^2 + y^3}{4xy};$
- 12) $z = \frac{3xy}{4x^2 + 3y^3};$
- 13) $z = (5x^2 + y^3)^4;$
- 14) $z = (4x^2 - 7y^2 + 5)^3;$
- 15) $z = \sqrt{4x^2 + 7y^3 + 11};$
- 16) $z = 4x^2 e^{5y};$
- 17) $z = -3y^3 e^{5x^2} + 4xy;$
- 18) $z = e^{\frac{x}{y}};$
- 19) $z = e^{5x^2 + 7y^3 + 8xy + 15};$
- 20) $z = 3^{xy^2 + 5xy + 7};$
- 21) $z = \ln \frac{5x}{y^2 + 5};$
- 22) $z = \ln \frac{4x^2}{7x^2 + 2y};$
- 23) $z = y^2 \log_5 x;$
- 24) $z = 7x^3 \log_2 y;$
- 25) $z = x^y;$
- 26) $z = \log_x y.$

8.9. გამოთვალეთ ფუნქციის სრული დიფერენციალი მითითებული წერტილში:

1) $z = 7x^2y^2, \quad M(1; -1);$

2) $z = x^3 - 2xy + y^2, \quad M(-2; 1);$

3) $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad M(1; 2);$

4) $z = \frac{x}{y} + 5x^2, \quad M(2; 1);$

5) $z = 4e^{5x^2+y^3}, \quad M(3; 2);$

6) $z = x^{3y}, \quad M(2; 1);$

7) $z = 5x^3e^{8y} + 11, \quad M(1; 2);$

8) $z = 3 \log_2 x + 4^y, \quad M(4; 2).$

8.10. იპოვეთ ფუნქციის მქონე რიგის კერძო წარმოებულები:

1) $z = 3x^2y^4 + 4xy - 9x + 17y;$

2) $z = 7xy^3 - 11x^2 + 9;$

3) $z = 4x \ln y;$

4) $z = \ln(x^2 + y^3);$

5) $z = \frac{y^3}{x^2 - 9};$

6) $z = 4e^x \ln y;$

7) $z = 5 \ln(x^2 + 9xy);$

8) $z = 2e^{8xy};$

9) $z = (x^2 - 9y^3)^4;$

10) $z = \frac{x^3}{2 + y^3} + e^{4y}.$

8.11. იპოვეთ რთული ფუნქციის წარმოებულები:

$$1) z = \frac{5x^2}{7y^3}, \quad x = 2e^t, \quad y = t^2;$$

$$2) z = \ln(x^3 + y), \quad x = t^2, \quad y = \sqrt{t};$$

$$3) z = \ln(5x^2 + 7xy), \quad x = e^t, \quad y = \ln t;$$

$$4) z = 5x^2y^3 + 11xy - 9x^2, \quad x = 4t, \quad y = t^3;$$

$$5) z = 7xy - 15x + 12y - 11, \quad x = 5t, \quad y = t^2;$$

$$6) z = (x + y)^4, \quad x = e^t, \quad y = \sqrt[4]{t};$$

$$7) z = \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}, \quad x = t^4, \quad y = t^2;$$

$$8) z = 4y \ln x, \quad x = 4e^t, \quad y = t.$$

8.12. იპოვეთ არაცხადი ფუნქციის წარმოებულები:

$$1) x^2 - 2xy + 7y^2 = 10x^3 - 11x + 12y - 5;$$

$$2) 4x^3 - 2xy - 9 = 11x^2 + 12y - 18xy^2;$$

$$3) y^3 + xy = \ln(x^2 + 2y);$$

$$4) 4y^3 - 15x^2 + 17xy^2 = 0;$$

$$5) e^y + xy = 0;$$

$$6) x \ln y + 7 \cdot 2^x + 15 = 0;$$

$$7) 4e^x + 9x^2y = xy - 15;$$

$$8) 7e^{3x} + 4y^3 = \ln(3x - 4^y);$$

$$9) 8e^{x^2+y^3} = \ln(x + y);$$

$$10) 3 \log_2 y = x \cdot 5^y.$$

8.13. აჩვენეთ, რომ $z = f(x, y)$ არის m რიგის ერთგვაროვანი ფუნქცია:

$$1) z = \frac{5x^2 + 8xy + 4y^2}{10x + y}, \quad m = 1;$$

$$2) \sqrt{5x^2 + 7xy - 10y^2}, \quad m = 1;$$

$$3) z = 5x + 10y, \quad m = 1;$$

$$4) z = \frac{ax + by}{cx + dy}, \quad m = 0;$$

$$5) z = x^2 + 2xy + 3y^2, \quad m = 2;$$

$$6) z = \frac{x^3 + 4xy^2}{x + y}, \quad m = 2;$$

$$7) z = 7x^4 + 7x^3y + 8y^4, \quad m = 4;$$

$$8) z = \sqrt{2x^4y^2 + 4x^3y^3}, \quad m = 3.$$

8.14. აჩვენეთ, რომ ვიქსელ-კოპ-დაგლასის ფუნქცია წარმოადგენს m რიგის ერთგვაროვან ფუნქციას:

$$1) Q = CK^{\frac{1}{4}}L^{\frac{1}{2}}, \quad m = \frac{3}{4};$$

$$2) Q = CK^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{5}}, \quad m = \frac{11}{15}.$$

8.15. მოთხოვნის ფუნქციას აქვს სახე

$$Q = 270 - 3P - 4P_A + 0,2Y.$$

იპოვეთ მოთხოვნის

- ა) კერძო ელასტიკურობა ფასის მიმართ;
- ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა;
- გ) კერძო ელასტიკურობა შემოსავლის მიმართ, თუ

$$P = 15 \$, \quad P_A = 20 \$, \quad Y = 500 \$.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ საქონლის ფასი გაიზარდა 5 ერთეულით.

8.16. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$Q = 400 - 5P - 3P_A + 0,01Y^2.$$

იპოვეთ მოთხოვნის

- ა) კერძო ელასტიკურობა ფასის მიმართ;
- ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა;
- გ) კერძო ელასტიკურობა შემოსავლის მიმართ, თუ

$$P = 10 \$, \quad P_A = 20 \$, \quad Y = 100 \$.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ ალტერნატიული პროდუქციის ფასი შემცირდა 10%-ით.

8.17. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$Q = 700 - 6P - 8P_A + 0,04Y.$$

იპოვეთ მოთხოვნის

- ა) კერძო ელასტიკურობა ფასის მიმართ;
- ბ) ჯვარედინი ელასტიკურობა;
- გ) კერძო ელასტიკურობა შემოსავლის მიმართ, თუ

$$P = 20 \$, \quad P_A = 10 \$, \quad Y = 1000 \$.$$

გამოთვალეთ მოთხოვნის პროცენტული ცვლილება, თუ შემოსავალი შემცირდა 20%-ით.

8.18. საწარმოს ფუნქციას აქვს სახე

$$Q = 3K^{\frac{2}{5}}L^{\frac{3}{4}}.$$

იპოვეთ:

- ა) კაპიტალის ზღვრული პროდუქტი (MP_K);
- ბ) შრომის ზღვრული პროდუქტი (MP_L);

გ) ზღვრული შენაცვლების ნორმა ($MRTS$), თუ

$$K = 32, \quad L = 16.$$

8.19. საწარმოო ფუნქციას აქვს სახე

$$Q = 3LK + L^{\frac{1}{3}}.$$

იპოვეთ:

- ა) კაპიტალის ზღვრული პროდუქტი (MP_K);
- ბ) შრომის ზღვრული პროდუქტი (MP_L);
- გ) ზღვრული შენაცვლების ნორმა ($MRTS$), თუ

$$K = 2, \quad L = 27.$$

დაწერეთ იზოკვანტების შესაბამისი განტოლება. გა-
მთვალეთ, რა სიდიდით უნდა გაიზარდოს K კაპიტალი,
თუ შრომის ფაქტორი შემცირდება 19 ერთეულით (იგუ-
ლისხმება, რომ ამ ცვლილებას არ უნდა მოჰყვეს წარმო-
ებული პროდუქციის დონის ცვლილება, ე.ი. (L, K) წერ-
ტილი იცვლება მხოლოდ ფიქსირებულ იზოკვანტზე).

8.20. ააგეთ შესაბამისი იზოკვანტი:

- ა) $Q = LK^{\frac{1}{2}}, \quad Q_0 = 3;$
- ბ) $Q = L^{\frac{1}{2}} + 2K^{\frac{1}{2}}, \quad Q_0 = 2;$
- გ) $Q = 5LK + L^2, \quad Q_0 = 5.$

8.21. ფირმა ერთხა და იმავე საქონელს საშინაო და საგარეო
ბაზარზე ყიდის სხვადასხვა ფასად.

თითოეული ბაზრის მოთხოვნა (Q_i) და ფასი (P_i)
ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი მოთხოვნის ფუნ-
ქციებით:

- ა) $P_1 = -4Q_1 + 30,$
 $P_2 = -8Q_2 + 89;$

$$\begin{aligned} \text{ბ) } P_1 &= -2Q_1 + 36, \\ P_2 &= -3Q_2 + 68. \end{aligned}$$

ფირმის მთლიანი დანახარჯები გამოითვლება ფორმულით:

$$\begin{aligned} \text{ა) } (TC) &= Q_1^2 + 10Q_1 + 4Q_2^2 + 41Q_2; \\ \text{ბ) } (TC) &= Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1Q_2. \end{aligned}$$

განსაზღვრეთ ფირმის ისეთი საფასო პოლიტიკა, რომელიც უზრუნველყოფს ფირმის მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მოგების სიდიდე.

- 8.22. ფირმას კაპიტალის 1 ერთეულზე ხარჯება 2 \$, ხოლო შრომის 1 ერთეულზე — 5 \$. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 6LK + 5L^2.$$

წარმოების K და L ფაქტორებზე ხარჯისათვის გამოყოფილი აქვს ფიქსირებული თანხა 200 \$. იპოვეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი.

- 8.23. ფირმას კაპიტალის 1 ერთეულზე ხარჯება 1 \$, ხოლო შრომის 1 ერთეულზე — 2 \$. ფირმის საწარმოო ფუნქციაა

$$Q = 8K^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{1}{2}}.$$

წარმოების K და L ფაქტორებზე ფირმას გამოყოფილი აქვს ფიქსირებული თანხა — 100 \$. იპოვეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი.

- 8.24. ფირმის წარმოების ფუნქციაა

$$Q = 2\sqrt{K} + \sqrt{L}.$$

K კაპიტალის 1 ერთეული ღირს 4 \$, ხოლო L შრომის 1 ერთეული — 2 \$. იპოვეთ წარმოების ოპტიმალური რეჟიმი, თუ ფირმას წარმოების K და L ფაქტორებზე გამოყოფილი აქვს ფიქსირებული თანხა — 480 \$.

- 8.25. ფირმა საქონელს ყიდის ორ ბაზარზე სხვადასხვა ფასად. თითოეული ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციაა $P_1 = 400 - 2Q_1$, $P_2 = 650 - 3Q_2$. ფირმის მთლიანი დანახარჯის ფუნქციაა $(TC) = 50 + 20(Q_1 + Q_2)$. იპოვეთ წარმოების რეჟიმი, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას.
- 8.26. ფირმა ყიდის ორი სახის საქონელს. თითოეულზე მოთხოვნის ფუნქციაა $P_1 = 320 - Q_1$ და $P_2 = 240 - 2Q_2$. ფირმის მიერ გაწეული მთლიანი დანახარჯი გამოისახება ფორმულით

$$(TC) = 60 + 20(Q_1 + Q_2).$$

განსაზღვრეთ ფირმის ისეთი საფასო პოლიტიკა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

- 8.27. ფირმა ყიდის ორი სახის საქონელს. თითოეულზე მოთხოვნის ფუნქციაა $P_1 = 900 - 4Q_1$ და $P_2 = 700 - 2Q_2$. ფირმის მიერ გაწეული მთლიანი დანახარჯი გამოისახება ფორმულით

$$(TC) = 90 + 20(Q_1 + Q_2).$$

განსაზღვრეთ ფირმის ისეთი საფასო პოლიტიკა, რომელიც უზრუნველყოფს მაქსიმალურ მოგებას და იპოვეთ ამ მაქსიმალური მოგების სიდიდე.

- 8.28. ფირმას კაპიტალის 1 ერთეულზე ეხარჯება 2 \$, ხოლო შრომის 1 ერთეულზე — 3 \$. საწარმოო ფუნქციაა $Q =$

$4KL + 2L^2$. წარმოების ფაქტორებზე დანახარჯი ფიქსირებულია და 320 \$-ის ტოლია. K და L სიდიდეების რა მნიშვნელობებისათვის მიიღწევა მაქსიმალური მოგება, თუ გაყიდული პროდუქტის ერთეულის ფასია 5 \$:

ა) $K = 4$ \$, $L = 3$ \$, $Q = 3KL + K^2$,
 $(TC) = 450$ \$;

ბ) $K = 2$ \$, $L = 3$ \$, $Q = 3KL + 2L^2$,
 $(TC) = 400$ \$;

გ) $K = 1$ \$, $L = 3$ \$, $Q = KL + L^2$,
 $(TC) = 150$ \$.

**ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები.
მომხმარებლის დანახოგი. მწარმოებლის
ამონაგების ნამეტი. უწყვეტი შემოსავლის
ნაკადის მიმდინარე ღირებულება. ინვესტიციის
ნაკადი და კაპიტალის დაგროვება**

9.1. ძირითადი ინტეგრების ცხრილის გამოყენებით გამოთვა-
ლეთ შემდეგი ინტეგრალები:

1) $\int \sqrt{x} dx;$

2) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx;$

3) $\int \left(x^2 - 2\sqrt[3]{x} + \frac{4}{x} \right) dx;$

4) $\int \left(2x + \sqrt[5]{x} + \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} + 8 \right) dx;$

5) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx;$

6) $\int \frac{(1+x\sqrt{x})^2}{x^2} dx;$

7) $\int (1-2\sqrt{x})^2 dx;$

8) $\int (1-x^2)^3 dx;$

9) $\int x^2(\sqrt{x}-1)^2 dx;$

10) $\int (1+x)(1+2x)(1+3x) dx;$

11) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) dx;$

12) $\int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx;$

13) $\int \frac{2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[4]{x}} dx;$

14) $\int \sqrt{2\sqrt{x}} dx;$

15) $\int \sqrt{x\sqrt[3]{x}} dx;$

16) $\int \left(1 - \frac{1}{x} \right) \sqrt{x\sqrt{x}} dx;$

17) $\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx;$

18) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx;$

19) $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx;$

20) $\int (3^x + 4^x)^2 dx;$

21) $\int \frac{2^{x+2} - 5^{x-2}}{10^x} dx;$

22) $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$

9.2. $\int f(x) dx = F(x) + C$

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

მაშინ

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

9.3. გამოთვალეთ ინტეგრალები (ბასმის ხერხით):

- | | |
|---|--|
| 1) $\int \sqrt{3x-2} dx;$ | 2) $\int \frac{dx}{(2x-5)^3};$ |
| 3) $(4x-3)^{10} dx;$ | 4) $\int \sqrt[5]{1-5x} dx;$ |
| 5) $\int \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x}} dx;$ | 6) $\int e^{5x} dx;$ |
| 7) $\int 3^{4x+5} dx;$ | 8) $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx;$ |
| 9) $\int (e^x - e^{-x})^2 dx;$ | 10) $\int \frac{\ln^3 x dx}{x};$ |
| 11) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$ | 12) $\int x e^{-x^2} dx;$ |
| 13) $\int \frac{dx}{x \ln^4 x};$ | 14) $\int \frac{e^x dx}{2+e^x};$ |
| 15) $\int \frac{dx}{e^x+1};$ | 16) $\int \frac{e^x - x^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx;$ |
| 17) $\int e^{x^3} x^2 dx;$ | 18) $\int x(3x^2-1)^5 dx;$ |
| 19) $\int 2^{-x^4} x^3 dx;$ | 20) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx;$ |
| 21) $\int \frac{x dx}{3-2x^2};$ | 22) $\int \frac{x dx}{(1+x^2)^2};$ |
| 23) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx;$ | 24) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$ |
| 25) $\int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$ | 26) $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3} dx;$ |
| 27) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx;$ | 28) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{1}{x} dx;$ |

$$\begin{array}{ll}
29) \int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}; & 30) \int \frac{1+x}{1-x} dx; \\
31) \int \frac{x^2}{1+x} dx; & 32) \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx; \\
33) \int x(1-x)^{10} dx; & 34) \int x\sqrt{2-5x} dx.
\end{array}$$

9.4. ნაწილობითი ინტეგრების ხერხით გამოთვალეთ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\begin{array}{ll}
1) \int xe^x dx; & 2) \int x3^x dx; \\
3) \int \ln x dx; & 4) \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1); \\
5) \int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx; & 6) \int \ln(x^2 + 1) dx; \\
7) \int \sqrt{x} \ln^2 x dx; & 8) \int xe^{-x} dx; \\
9) \int x^2 e^{-2x} dx; & 10) \int \ln^2 x dx; \\
11) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx; & 12) \int e^{\sqrt{x}} dx; \\
13) \int \frac{\ln(\ln x) dx}{x}.
\end{array}$$

9.5. საწარმოს მარჟინალური დანახარჯი Q ერთეულის წარმოების დროს არის

$$0,03Q^2 + 4Q + 150 \quad (\text{დოლარი}).$$

გაიგეთ დანახარჯი პირველი 20 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი ერთეულის წარმოებაზე იხარჯება 252,01 დოლარი.

9.6. მარჟინალური დანახარჯის ფუნქციას აქვს სახე

$$(MC) = K'(Q) = 6Q^2 - 10Q + 260,$$

სადაც $K(Q)$ არის მთლიანი დანახარჯის ფუნქცია, ხოლო Q — წარმოებული პროდუქციის რაოდენობა. ფიქსირებული დანახარჯია 15000 დოლარი. გამოთვალეთ დანახარჯი, რომელიც შეესაბამება პროდუქციის პირველი 10 ერთეულის წარმოებას.

9.7. მარჟინალური ამონაგების ფუნქციას აქვს სახე

$$(MR) = f(Q) = 80 - 0,4Q.$$

როგორი იქნება მთლიანი ამონაგები პირველი 50 ერთეულის გაყიდვის შემდეგ?

9.8. მარჟინალური დანახარჯის ფუნქციაა

$$(MC) = K'(Q) = 200 - 0,6Q + 0,09Q^2.$$

იპოვეთ დანახარჯის ფუნქციის ნაზრდი პროდუქციის მოცულობის 20 ერთეულიდან 50 ერთეულამდე გაზრდის შემთხვევაში.

9.9. ფირმამ დაადგინა, რომ მარჟინალური დანახარჯი Q ერთეულის საწარმოებლად უნდა იყოს $(MC) = 3,5 - 0,04Q$. გაიკეთ, რამდენი დაიხარჯება პროდუქციის პირველი 100 ერთეულის საწარმოებლად, თუ პროდუქციის პირველი 2 ერთეულის საწარმოებლად იხარჯება 180 დოლარი?

9.10. იპოვეთ მოხმარების ფუნქცია $H(Y)$, თუ ცნობილია, რომ მარჟინალური მიდრეკილება მოხმარებისადმი გამოისახება ტოლობით

$$(MPC) = H'(Y) = 0,6 + \frac{0,2}{\sqrt{Y}},$$

სადაც Y ეროვნული შემოსავალია. ამასთან, ცნობილია, რომ თუ ეროვნული შემოსავალი 100 ერთეულის ტოლია, მაშინ მოხმარება უტოლდება 65 ერთეულს.

- 9.11. იპოვეთ მოხმარების ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ მარყინალური მიდრეკილება დაზოგვისადმი გამოითვლება ტოლობით

$$(MPS) = 0,7 - 0,02\sqrt[3]{Y},$$

სადაც Y არის ეროვნული შემოსავალი. ამასთან, ცნობილია, რომ როდესაც ეროვნული შემოსავალი 64 ერთეულია, მაშინ მოხმარების ფუნქცია 40 ერთეულის ტოლია.

- 9.12. იპოვეთ (TC) მთლიანი დანახარჯი, თუ მარყინალური დანახარჯია

$$(MC) = 6e^{0,3Q},$$

ხოლო ფიქსირებული დანახარჯი 30 ერთეულის ტოლია.

- 9.13. მონოპოლისტური ფირმის მარყინალური ამონაკები მოიცემა ტოლობით:

ა) $(MR) = 100 - 4Q;$

ბ) $(MR) = 80 - 6Q;$

გ) $(MR) = \frac{12}{\sqrt{Q+9}};$

დ) $(MR) = \frac{3}{\sqrt{Q+4}}.$

აქ Q არის რეალიზებული პროდუქციის რაოდენობა (ანუ მოთხოვნა). იპოვეთ (TR) მთლიანი ამონაკების ფუნქცია და დაადგინეთ შესაბამისი მოთხოვნის ფუნქციის სახე.

9.14. გამოთვალეთ განსაზღვრული ინტეგრალი:

$$1) \int_1^4 (x^4 + \sqrt{x}) dx; \quad 2) \int_0^1 \sqrt{1+x} dx;$$

$$3) \int_0^4 (x^2 - 2\sqrt{x} + 8) dx; \quad 4) \int_4^7 \frac{dx}{(x-3)^2};$$

$$5) \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}; \quad 6) \int_0^4 e^{\frac{x}{4}} dx;$$

$$7) \int_0^1 (1+3x)^3 dx; \quad 8) \int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx;$$

$$9) \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx; \quad 10) \int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt{16+2x}};$$

$$11) \int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x+16} - \sqrt{x}}; \quad 12) \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$$

$$13) \int_e^{e^5} \frac{dx}{x \ln x}; \quad 14) \int_4^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}-1};$$

$$15) \int_1^9 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}; \quad 16) \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{5+4x}};$$

$$17) \int_0^1 x e^x dx; \quad 18) \int_1^{e^2} \ln x dx;$$

$$19) \int_0^1 x^2 e^x dx; \quad 20) \int_1^e \ln^2 x dx.$$

9.15. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:

$$y = 3x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$$

9.16. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = 9 - x^2$ პარაბოლითა და $y = 0$ წრფით.

9.17. გამოთვალეთ იმ ფიგურის ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია შემდეგი წირებით:

ა) $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 10;$

ბ) $y = 3^x, \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 4;$

გ) $y = \frac{2}{x^2}, \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 9;$

დ) $y = 5^x, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 3;$

ე) $y = x^2, \quad y = 2 - x^2;$

ვ) $y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e^2.$

9.18. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = e^x, y = e^{-x}$ წირებითა და $x = 1$ წრფით.

9.19. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2 + 4x$ პარაბოლითა და $y = x + 4$ წრფით.

9.20. გამოთვალეთ ფართობი, რომელიც შემოსაზღვრულია $y = x^2 - 2x$ პარაბოლითა და Ox ღერძით.

9.21. მოთხოვნის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$P = f_D(Q) = 7 - \frac{Q}{5}.$$

ვიპოვოთ (CS) მომხმარებლის დანახოვი, როდესაც ვაჭრობის დონე $Q_0 = 20$ -ის ტოლია. ააგეთ მოთხოვნის მრუდი და გამოსახეთ მომხმარებლის დანახოვი ფართობის სახით.

9.22. მოთხოვნის ფუნქცია მოცემულია ტოლობით

$$P = f_D(Q) = 1000 - 0,4Q - 0,003Q^2.$$

იპოვეთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონე (მოთხოვნის დონე) 200-ის ტოლია.

9.23. მიწოდების ფუნქცია მოცემულია

$$P = f_S(Q) = 8 + \frac{1}{2} \sqrt{Q}$$

ფორმულით. იპოვეთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამუჭი, თუ პროდუქციის ერთეულის ფასია 10 დოლარი.

9.24. იპოვეთ მწარმოებლის ამონაგების ნამუჭი (PS), თუ მიწოდების ფუნქციაა

$$P = f_S(Q) = 40 + 8Q$$

და პროდუქციის ერთეულის ფასია 200 დოლარი.

9.25. ფირმა კვირაში ყიდის 2000 მაცივარს — თითოეულს 250 დოლარად. მარკეტინგი აჩვენებს, რომ 10 დოლარით ფასის შემცირება იწვევს გაყიდული მაცივრების რაოდენობის ზრდას კვირაში 200 ერთეულით. იპოვეთ მოთხოვნის ფუნქცია და გამოთვალეთ (CS) მომხმარებლის დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონეა $Q_0 = 220$. იგულისხმება, რომ მოთხოვნის ფუნქცია წრფივია.

9.26. მიწოდების ფუნქციაა

$$P = f_S(Q) = 2Q^2 + 4Q + 1.$$

იპოვეთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამუჭი, თუ $Q_0 = 8$.

9.27. მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = \frac{200}{Q + 3}.$$

იპოვეთ (CS) მომხმარებლის დანახოვი, თუ პროდუქციის ერთი ერთეული იყიდება 10 დოლარად.

9.28. გამოთვალეთ (PS) მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი, თუ მიწოდების ფუნქციაა

$$P = f_S(Q) = 2 + 0,03Q^2,$$

ხოლო ვაჭრობა ხდება $Q_0 = 10$ დონეზე. ააგეთ შესაბამისი ნახაზი და გამოსახეთ მწარმოებლის ამონაგების ნამეტი ფართობის სახით.

9.29. სატრასტო ფონდი 6 წლის განმავლობაში იხდის თანხას 3000 დოლარის ინტენსივობით. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 10 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით). გადახდა იწყება ერთი წლის შემდეგ. იპოვეთ სატრასტო ფონდის დისკონტირებული ღირებულება.

9.30. სატრასტო ფონდმა უნდა იმოქმედოს 5 წლის განმავლობაში და შემდგომი 5 წლის განმავლობაში უნდა იხადოს თანხა 10000 დოლარის ინტენსივობით. სარგებლის წლიური რთული განაკვეთია 14 % (უწყვეტი დარიცხვის წესით). იპოვეთ სატრასტო ფონდის თანხა პირველი სამი წლის შემდეგ.

9.31. სპორტსმენი აფორმებს სახელფასო კონტრაქტს. ამ კონტრაქტის პირობების თანახმად იგი მიიღებს თანხას, რომელიც იზრდება თანაბრად, უწყვეტად და წრფივად წლიური 100000 დოლარიდან და აღწევს 225000 დოლარს

5 წლის შემდეგ. ამიტომ მისი ხელფასი არის

$$F(t) = 100000 \left(1 + \frac{1}{4} t \right) \text{ დოლარი.}$$

იპოვეთ კონტრაქტის საწყისი ღირებულება, რომელიც შეესაბამება სარგებლის წლიური რთული 7%-იანი განაკვეთით უწყვეტ დარიცხვას. (მითითება: ისარგებლეთ იმით, რომ ხელფასის ზრდის სიჩქარეა (ინტენსივობაა) $F'(t) = 25000$.)

9.32. იპოვეთ უკადრო მუდმივი 8000 დოლარის ნაკადის საწყისი ღირებულება, თუ სარგებლის რთული წლიური განაკვეთია 8% უწყვეტი დარიცხვით.

9.33. ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია ტოლობით $I(t) = 6000t^{\frac{1}{2}}$. გამოთვალეთ:

- ა) სააქციო კაპიტალის დაგროვება პირველი წლის ბოლოდან მეცხრე წლის ბოლომდე;
- ბ) რამდენი წელია საჭირო იმისთვის, რომ სააქციო კაპიტალმა გადააჭარბოს 12000 დოლარს?

9.34. ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია ტოლობით

$$I(t) = 12000t^{\frac{1}{3}}.$$

- ა) იპოვეთ კაპიტალის დაგროვება მეორე წლის ბოლოდან მეშვიდე წლის ბოლომდე;
- ბ) რამდენი წლის შემდეგ გადააჭარბებს საინვესტიციო კაპიტალი 90000 დოლარს?

9.35. იპოვეთ კაპიტალის დაგროვება $t = T_1$ მომენტიდან $t = T_2$ მომენტამდე, თუ ინვესტიციის ნაკადი მოცემულია ტოლობებით:

- ა) $I(t) = At^\alpha$;

$$b) I(t) = Ae^{at}$$

(A და a დადებითი მუდმივებია).

- 9.36. სატრასტო ფონდი მოქმედებს დღეიდან 10 წლის განმავლობაში და იხდის თანხას 5000 დოლარის ინტენსივობით შემდგომი 7 წლის განმავლობაში. სარგებლის რთული წლიური განაკვეთია 12% (უწყვეტი დარიცხვით). იპოვეთ:

- a) სატრასტო ფონდის საწყისი ღირებულება;
- b) სატრასტო ფონდის სიდიდე პირველი 5 წლის შემდეგ;
- გ) სატრასტო ფონდის საწყისი ღირებულება, თუ ნაცვლად 7 წლისა იგი იმოქმედებს მუდმივად (შემოსულობა დროის განმავლობაში).

- 9.37. გარკვეული პროდუქციის მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 1000 - 0,2Q - 0,06Q^2.$$

იპოვეთ მომხმარებლის დანაზოგი, თუ ვაჭრობის დონეა $Q_0 = 100$.

- 9.38. იპოვეთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი, როდესაც ერთეულის ფასია $P_0 = 6$, ხოლო მოთხოვნის ფუნქცია:

$$a) P = 38 - 4Q;$$

$$b) P = \frac{18}{\sqrt{Q+2}}.$$

- 9.39. იპოვეთ მომხმარებლის (CS) დანაზოგი, თუ მოთხოვნის $f_D(Q)$ ფუნქცია და მოთხოვნის Q_0 დონე მოცემულია შემდეგი სახით:

$$a) P = f_D(Q) = 60 - 5Q, \quad Q_0 = 8;$$

$$b) P = f_D(Q) = 50 - Q^2, \quad Q_0 = 6.$$

9.40. თავისუფალი კონკურენციის პირობებში ბაზრის მოთხოვნის ფუნქციაა

$$P = f_D(Q) = 30 - 2Q,$$

ხოლო მიწოდების ფუნქცია —

$$P = f_S(Q) = 10 + 2Q.$$

გამოთვალეთ (Q_0 დონეზე ვაჭრობისას):

- ა) მომხმარებლის (CS) დანახოვი;
- ბ) მწარმოებლის (PS) ამონაკების ნამეტი.

9.41. მოცემულია მოთხოვნის ფუნქცია

$$P = f_D(Q) = -Q^2 - 5Q + 70$$

და მიწოდების ფუნქცია

$$P = f_S(Q) = Q^2 + 3Q + 6.$$

ცნობილია, რომ გვაქვს სრულყოფილი კონკურენცია.

იპოვეთ (Q_0 დონეზე ვაჭრობისას):

- ა) მომხმარებლის (CS) დანახოვი;
- ბ) მწარმოებლის (PS) ამონაკების ნამეტი.

9.42. გამოთვალეთ არასაკუთრივი ინტეგრალები:

- | | |
|--|--|
| 1) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x};$ | 2) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3};$ |
| 3) $\int_0^{+\infty} 3^{-x} dx;$ | 4) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x};$ |
| 5) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}};$ | 6) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{(1+x^2)^4} dx;$ |

- 7) $\int_{-\infty}^0 e^{5x} dx;$
- 8) $\int_{-\infty}^1 \frac{dx}{(3x-5)^2};$
- 9) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x};$
- 10) $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x};$
- 11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2};$
- 12) $\int_0^{16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx;$
- 13) $\int_0^{36} \frac{dx}{\sqrt{x}};$
- 14) $\int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}};$
- 15) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$
- 16) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$
- 17) $\int_{-1}^0 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} dx;$
- 18) $\int_0^1 \ln x dx;$
- 19) $\int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}};$
- 20) $\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$
- 21) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x};$
- 22) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$
- 23) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}};$
- 24) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$

**დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის
ელემენტები**

10.1. აკმაყოფილებს თუ არა მოცემულ დიფერენციალურ განტოლებას $y = f(x)$ ფუნქცია?

1) $xy' = 2y, \quad y = 5x^2;$

2) $y'' = x^2 + y^2, \quad y = \frac{1}{x};$

3) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y = xe^x;$

4) $y'' - 4y = 0, \quad y = e^{2x};$

5) $(x - y + 1)y' = 1, \quad y = x + 6e^x;$

6) $x + y + x \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = e^{3x} + 4;$

7) $y'' - 2y' + y = 0, \quad y = (1 + 2x)e^x;$

8) $y'' + 2y = 0, \quad y = xe^x.$

10.2. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსენი:

1) $y' = 2x + 5;$

2) $y' = x + e^{2x};$

3) $y' = 6;$

4) $y' = 4^x + 3;$

5) $y'' = 3 - 2x;$

$$6) y'' = 6x + e^{2x}.$$

10.3. იპოვეთ დიფერენციალური განტოლების კერძო ამონახსენი:

$$1) y' = 4x^3 + 3x^2, \text{ თუ } y(0) = 1;$$

$$2) y' = xe^x, \text{ თუ } y(0) = 2;$$

$$3) y' = \frac{2x}{1+x^2}, \text{ თუ } y(1) = 0;$$

$$4) y' = \ln x, \text{ თუ } y(1) = 1;$$

$$5) y'' = 3x^2 + 4, \text{ თუ } y(0) = 2, y'(0) = 1;$$

$$6) y'' = 2 + e^x, \text{ თუ } y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

10.4. ამოხსენით განცალკევადცვლადებიანი დიფერენციალური განტოლება:

$$1) xyy' = 1 - x^2;$$

$$2) xy' = y^2, \text{ თუ } y(1) = 1;$$

$$3) yy' = \frac{1-2x}{y}, \text{ თუ } y(0) = 3;$$

$$4) (xy^2 + x)dx + (y - x^2y)dy;$$

$$5) yy' + x = 0;$$

$$6) (1 + y^2)dx + xy dx = 0;$$

$$7) y' = e^{x+y};$$

$$8) (1 + e^x)yy' = e^x.$$

10.5. ამოხსენით პირველი რიგის ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები:

$$1) x dy - y dx = y dy, \text{ თუ } y(2) = 1;$$

$$2) y' = \frac{y}{x} - 2;$$

$$3) y' = \frac{x+y}{x-y};$$

$$4) (y-2x)dy + 2y dx = 0, \text{ თუ } y(0) = 1;$$

$$5) (y-x)y dx + x^2 dx = 0;$$

$$6) y dx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0;$$

$$7) y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0;$$

$$8) (x-y)dx + (x+y)dy = 0, \text{ თუ } y(1) = 0.$$

10.6. იპოვეთ პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი:

$$1) y' - \frac{y}{x} = x;$$

$$2) y' + \frac{y}{x} = \frac{e^x}{x};$$

$$3) y' + \frac{2}{x}y = x^3;$$

$$4) y' + \frac{2x}{1-x^2}y = x + 1;$$

$$5) y' + y = e^{-x}, \text{ თუ } y(0) = 2;$$

$$6) y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \text{ თუ } y(0) = 1;$$

$$7) xy' + y = x + 1, \text{ თუ } y(2) = 3;$$

$$8) xy' + 2y = 3x, \text{ თუ } y(-2) = 0.$$

10.7. ამოხსენით შემდეგი დიფერენციალური განტოლებები:

$$ა) y'' = 3x^2 + 2x;$$

$$ბ) y'' = x + e^x;$$

$$გ) y'' = 6 + 4e^{2x};$$

$$დ) y'' = \frac{1}{x^3} - 4.$$

10.8. ამოხსენით მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებთან წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლებები:

- 1) $y'' - 9y' = 0$, თუ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
- 2) $y'' + 4y' = 0$, თუ $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
- 3) $y'' - 4y' + 3y = 0$;
- 4) $y'' + 5y' + 6y = 0$;
- 5) $4y'' + 4y' + y = 0$;
- 6) $y'' - 6y' + 9y = 0$, თუ $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
- 7) $4y'' - 12y' + 9y = 0$;
- 8) $y'' + 2y' + y = 0$, თუ $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
- 9) $y'' + 4y' = 0$, თუ $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
- 10) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
- 11) $y' + y = 0$, თუ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
- 12) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

10.9. იპოვეთ მქორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი არაერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსენი:

- 1) $y'' - 4y' + 4y = x^2$;
- 2) $y'' - y = x^2 - x + 1$;
- 3) $y'' + y' = 3$;
- 4) $y'' - 3y' = 2 - 6x$;
- 5) $y'' + 2y' + y = e^{2x}$;
- 6) $y'' + y = 4e^x$;
- 7) $y'' - 2y' - 3y = 6xe^x$;
- 8) $y'' - 2y' + y = e^x$.

10.10. სახელმწიფოს ბრუნვაში აქვს ეროვნული ვალუტის 4 მილიარდი ერთეული. მთავრობამ გადაწყვიტა ბრუნვაში

შემოიღოს ფულის ახალი ნიშნები. ყოველდღიურად ბანკში შედის 5 მილიონი ერთეულის შესაბამისი ძველი კუპიურა, მის ნაცვლად ბრუნვაში გადის შესაბამისი რაოდენობის ახალი ფულის ნიშნები.

- 1) შეადგინეთ დიფერენციალური განტოლება, რომელიც აღწერს ახალი ვალუტის ბრუნვაში შესვლას;
- 2) რა დრო დასჭირდება ძველი ვალუტის 60 %-ით შეცვლას?

10.11. სახელმწიფოს ბრუნვაში აქვს 8 მილიარდი ერთეული ვალუტა. საჭიროა შემოიღებულ იქნას ფულის ახალი ნიშნები. ყოველდღიურად ბანკში შედის 10 მილიონი ერთეულის შესაბამისი ძველი კუპიურა, მის ნაცვლად ბრუნვაში გადის შესაბამისი რაოდენობის ახალი ფულის ნიშნები.

- 1) რამდენ ხანში დარჩება ბრუნვაში ძველი ვალუტის $\frac{1}{4}$;
- 2) რა დრო დასჭირდება ძველი ვალუტის მთლიანად შეცვლას?

10.12. სახელმწიფოს ბრუნვაში აქვს 6 მილიარდი ერთეული ვალუტა. საჭიროა შემოიღებულ იქნას ფულის ახალი ნიშნები. ყოველდღიურად ბანკში შედის 4 მილიონი ერთეულის შესაბამისი ძველი კუპიურა, მის ნაცვლად ბრუნვაში გადის შესაბამისი რაოდენობის ახალი ფულის ნიშნები. რამდენი დღის შემდეგ იქნება ბრუნვაში ორჯერ მეტი ახალი კუპიურა ძველთან შედარებით.

10.13. დაუშვათ t დროისათვის სახელმწიფოში მოსახლეობის რაოდენობაა $P = P(t)$, ცნობილია, რომ შობადობა და

სიკვდილიანობა დროის ერთეულში პროპორციულია მოსახლეობის რაოდენობის, პროპორციულობის კოეფიციენტია, შესაბამისად, $\frac{1}{16}$ და $\frac{1}{48}$, გარდა ამისა, სახელმწიფოში არის ემიგრაცია, რომლის სიჩქარეა 1500 კაცი წელიწადში. განვსაზღვროთ მოსახლეობის რაოდენობა დროის ნებისმიერი მომენტისათვის, თუ ცნობილია, რომ $t = 0$ მომენტისათვის მოსახლეობის რაოდენობა ტოლია $35 \cdot 10^6$.

- 10.14. ვთქვათ, საცხოვრებელი გარემოსა და საკვები რესურსების შეზღუდულობის გამო მოსახლეობის მაქსიმალური რაოდენობა, რომელიც იარსებებს და გამოიკვებება არსებული რესურსებით, ტოლია 5 მილიონის. მოცემული t დროისათვის მოსახლეობის რაოდენობაა $P(t)$, ხოლო მოსახლეობის ზრდის საჩქარე პროპორციულია $\frac{1}{250} P(t) \cdot [5 \cdot 10^6 - P(t)]$ სიდიდის. განვსაზღვროთ მოსახლეობის რაოდენობა t მომენტისათვის, თუ საწყის $t = 0$ მომენტში მოსახლეობის რაოდენობაა $4,5 \cdot 10^6$.

წრფივი დაპროგრამების ელემენტები

11.1. დაშტრიხეთ უტოლობით განსაზღვრული ნახევარსიბრტყე:

ყე:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $x \geq 5$; | 2) $y < -3$; |
| 3) $-2x \geq 7$; | 4) $-\frac{y}{5} \leq 1, 2$; |
| 5) $2x - 3y \geq 3$; | 6) $4x - 5y \leq 1$; |
| 7) $y \geq 2x$; | 8) $y \leq x + 1$; |
| 9) $-x + 40y \leq 160$; | 10) $0, 1x + 0, 2y \geq 2, 75$; |
| 11) $0, 3x + 2, 1y - 3 \leq 0$; | 12) $2x + 4y \geq 5x - 1$. |

11.2. დაშტრიხეთ დასაშვებ მნიშვნელობათა არე და იპოვეთ მისი წვეკროები:

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x + y \leq 5, \\ x \geq 0; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} 2x + y \leq -3, \\ 4x - 2y \geq 12; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} 7x + y \leq 11, \\ 2x - 3y \geq -10; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x + 3y \leq 9, \\ 4x - y \geq 10, \\ y \geq 0; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} 4x + 2y \leq 5, \\ -x + y \leq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} 2x + 3y \leq -5, \\ 3x - 2y \geq 12, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$ |

$$7) \begin{cases} 3x + 2y \geq 6, \\ 3x + y \leq 9, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad 8) \begin{cases} x + y \leq 4, \\ x + y \geq 1, \\ -x + y \geq -1; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x + y \geq 1, \\ x + y \leq 4, \\ -x + y \leq 1, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad 10) \begin{cases} 2x + y \leq 10, \\ x + y \leq 7, \\ x + 2y \leq 12, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 3x + y \leq 21, \\ x + y \leq 9, \\ x + 3y \leq 21, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad 12) \begin{cases} x + y \geq -3, \\ x - y \leq 5, \\ y \leq 3, \\ x \geq 0; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} 2x + y \geq 8, \\ 2x - 3y \leq 0, \\ y \leq 10, \\ x \leq 12, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad 14) \begin{cases} 2x + y \leq 12, \\ 4x - 3y \leq 0, \\ y \leq 10, \\ x \leq 3, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

11.3. იპოვეთ $f(x, y) = -x + 2y$ მიზნის ფუნქციის უდიდესი და უმცირესი მნიშვნელობები, თუ x და y აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y \leq 18, \\ y \geq 0, \\ x \geq 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x - y \leq 1, \\ x + y \leq 6, \\ x \geq 1; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x + 5y \leq 0, \\ 2x - 5y \leq 20, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

11.4. იპოვეთ უკიდურესი ამოცანის ამონახსნები:

$$1) \max(x + 2y)$$

$$\begin{cases} x - y \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$2) \max(10x + 15y)$$

$$\begin{cases} 2x + y \leq 100, \\ 0, 1y \leq 4, \\ 0, 1x \geq 1, \\ y \geq 20; \end{cases}$$

$$3) \max(2x + 3y)$$

$$\begin{cases} x + y \leq 7, \\ x + 2y \leq 12, \\ 2x + y \leq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$4) \min(8x + 12y)$$

$$\begin{cases} x + y \leq 10, \\ x \geq 1, \\ x \leq 3, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$5) \min(5x + 15y)$$

$$\begin{cases} x + y \leq 0, \\ -2x + y \geq 1, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$6) \min(x + y)$$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 11, \\ 3x + 2y \geq 17, \\ 3x + y \geq 10, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$7) \max(5x + 50y)$$

$$\begin{cases} -x + y \geq -4, \\ -x + y \leq 0, \\ y \geq 1, \\ y \leq 4; \end{cases}$$

$$8) \min(100x + 125y)$$

$$\begin{cases} x + y \geq 5, \\ -2x + 2y \leq 2, \\ -2x + y \leq 2, \\ y \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
 9) \max(x + 2y) & 10) \max(5x + 10y) \\
 \left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 6, \\ x - 2y \geq 0, \\ y \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0; \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x + 3y \leq 36, \\ x + y \leq 16, \\ 2x + y \leq 24, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{array} \right.
 \end{array}$$

- 11.5. ფირმა აწარმოებს ორი A და B ტიპის პროდუქტს. A ტიპის პროდუქტის დასამზადებლად საჭიროა საწარმოო პროცესის 1 მანქანასაათი და 4 კაცსაათი, ხოლო B ტიპის პროდუქტის დასამზადებლად — 2 მანქანასაათი და 3 კაცსაათი. ფირმის ყოველკვირეული საწარმოო სიმძლავრეა 80 მანქანასაათი და 240 კაცსაათი. უნდა აღინიშნოს, რომ A ტიპის პროდუქტზე მუდმივად არსებობს მოთხოვნა 20 ერთეულის ოდენობით, რომელიც ფირმამ უნდა დააკმაყოფილოს. A ტიპის პროდუქტის სარეალიზაციო ფასია 40 დოლარი, ხოლო B ტიპისა — 60 დოლარი. როგორ უნდა დაგეგმოს ფირმამ ყოველკვირეული წარმოება, რომ ამონაგები იყოს მაქსიმალური.
- 11.6. საწარმო ამზადებს პიჯაკებსა და შარვლებს. ერთი პიჯაკის შესაკერად საჭიროა 5 მეტრი ქსოვილი და 50 გრამი ძაფი, ერთი შარვლის შესაკერად კი — 2 მეტრი ქსოვილი და 10 გრამი ძაფი. საწარმოს გააჩნია 800 მეტრი ქსოვილი და 5 კილოგრამი ძაფი. ცნობილია, რომ შარვლების რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს 350 ერთეულს. ერთი პიჯაკის რეალიზაციის შედეგად მიღებული შემოსავალია 100 დოლარი, ხოლო ერთი შარვლის კი —

60 დოლარი. რამდენი პიჯაკი და შარვალი უნდა შეკეროს საწარმომ მაქსიმალური შემოსავლის მიღების მიზნით? იპოვეთ მაქსიმალური შემოსავალი.

- 11.7. საარჩევნო კამპანიაში მონაწილე პარტიებს სახელმწიფო სთავაზობს უფასო სარეკლამო ეთერს ტელევიზიითა და რადიოთი. თითოეული პარტიისათვის წინა საარჩევნო პერიოდში სარეკლამო დრო არ უნდა აღემატებოდეს ჯამში 5 საათს, ამასთან, სატელევიზიო რეკლამის დასაშვები მაქსიმალური ოდენობაა 200 წუთი, ხოლო რადიო რეკლამის — 250 წუთი. ტელერეკლამის დრო არ უნდა აღემატებოდეს რადიორეკლამის 50%-ს. ცნობილია, რომ ტელერეკლამა 5-ჯერ უფრო ეფექტურია, ვიდრე რადიორეკლამა. რა ხანგრძლივობის ტელე და რადიორეკლამა უზრუნველყოფს წინასაარჩევნო კამპანიის მაქსიმალურ სარგებელს?

- 11.8. ავტოქარხანა უშუკებს ორი A და B მოდელის ავტომობილს. საწარმოს პროცესი გულისხმობს I საამქროში ძარის აწყობას, II საამქროში შეღებვას და III საამქროში ავტომობილის ტექნიკურ გამართვას.

A მოდელის ავტომობილის გამოსაშვებად I სააქროს ესაჭიროება 2 სთ, II საამქროს — 4 სთ, III საამქროს — 2 სთ.

B მოდელის ავტომობილის გამოსაშვებად I სააქროს ესაჭიროება 4 სთ, II საამქროს — 2 სთ, III საამქროს — 2 სთ.

საამქროების მუშაობა დროში შეზღუდულია: კვირის განმავლობაში I საამქრო მუშაობს არაუმეტეს 80 საათისა, II საამქრო — 84 საათისა, III საამქრო — 71 საათისა.

A მოდელის ავტომობილის გაყიდვით მიღებული მოგებაა 6000 დოლარი, ხოლო B მოდელის გაყიდვით — 8000 დოლარი.

მენეჯმენტს სურს დაადგინოს, თუ რამდენი ცალი A და B მოდელის ავტომობილი უნდა გამოუშვას ავტოქარხანამ კვირის განმავლობაში, რათა მიიღოს მაქსიმალური მოგება.

- 11.9. საინვესტიციო კომპანიას 20 მილიონი დოლარის ინვესტირებისათვის აქვს შემდეგი ორი ალტერნატივა:

ალტერნატივა	მოსალოდნელი მოგება (%)	დაბანდების მაქსიმალური ოდენობა (მლნ.)
ენერგეტიკა	10	12,5
კავშირგაბმულობა	8	15

ამასთან, სხვაობა ენერგეტიკასა და კავშირგაბმულობის სფეროებში დაბანდებულ თანხებს შორის არ უნდა აღემატებოდეს 5 მილიონ დოლარს. კომპანიას სურს დაადგინოს, თუ როგორ მოახდინოს ფულის ინვესტირება მაქსიმალური მოგების მიზნით. რისი ტოლი იქნება მაქსიმალური მოგება?

- 11.10. ფერმას აქვს 50 ძროხისა და 200 ცხვრის სადგომი. ფერმის საძოვრების ფართობია 72 ჰა. წლის განმავლობაში ერთი ძროხის გამოსაკვებად საჭიროა 1 ჰა საძოვარი, ხოლო ერთი ცხვრის გამოსაკვებად — 0,2 ჰა.

- ფერმას შეუძლია აანაზღაუროს 10000 სამუშაო საათი წლის განმავლობაში. ერთი ძროხის მოსავლედ საჭიროა 150 სამუშაო საათი, ხოლო ერთი ცხვრისათვის კი — 25 სამუშაო საათი. ცნობილია, რომ ერთი ძროხა იძლევა 250 დოლარ მოგებას, ხოლო ცხვარი კი — 45 დოლარს (ყოველწლიურად). რამდენი ძროხა და ცხვარი უნდა ჰყავდეს ფერმას, რათა მოგება იყოს მაქსიმალური?
- 11.11. საწარმო ამზადებს მაგიდებსა და კარადებს. ერთი მაგიდის დასამზადებლად საჭიროა 2მ^3 ხის მასალა და 0,6 კგ წებო, ერთი კარადის დასამზადებლად კი — 4მ^3 ხის მასალა და 1,5 კგ წებო. საწარმოს შეუძლია გამოიყენოს 420 მ^3 ხის მასალა და 135 კგ წებო. ცნობილია, რომ მაგიდების რაოდენობა მეტი ან ტოლი უნდა იყოს საერთო რაოდენობის $\frac{2}{3}$ -ს. ერთი მაგიდის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგებაა 150 დოლარი, ხოლო ერთი კარადის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება კი — 500 დოლარი. რამდენი მაგიდა და კარადა უნდა დაამზადოს საწარმომ მაქსიმალური მოგების მისაღებად? რისი ტოლია მაქსიმალური მოგება?
- 11.12. ფირმა ამზადებს ქაღისა და მამაკაცის სვიტერებს. თითოეული სვიტერისათვის იხარჯება 0,7 კგ ძაფი, ამასთან, 1 ცალი ქაღის სვიტერის მოსაქსოვად საჭიროა 0,2 მანქანასაათი, ხოლო 1 ცალი კაცის სვიტერისათვის კი — 0,5 მანქანასაათი. ფირმის ყოველდღიური მარაგია 35 კგ ძაფი და 16 მანქანასაათი. საბაზრო მოთხოვნილებიდან გამომდინარე ფირმამ დაადგინა, რომ ქაღის სვიტერის რაოდენობა არ უნდა აღემატებოდეს მთელი პროდიქციის

80 %-ს. ქალის სვიტერის სარეალიზაციო ფასია 30 დოლარი, ხოლო მამაკაცის კი — 50 დოლარი. რა რაოდენობის სვიტერები უნდა აწარმოოს ფირმამ ყოველდღიურად, რომ შემოსავალი იყოს მაქსიმალური.

პასუხები

VII თავი

- 7.1. 1) $2x$; 2) $3x^2$; 3) $2^x \ln 2$;
4) e^x ; 5) $-8x$; 6) $2(2x + 3)$,
- 7.2. 1) $\frac{1}{1+x^2}$; 2) $\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- 7.3. 1) $x^x(\ln x + 1)$;
2) $x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x \right)$;
3) $2x^{\ln x - 1} \ln x$.
- 7.4. 45° .
- 7.5. 30° .
- 7.6. 0.
- 7.7. 1) 3; 9; 2) -2; -12; 3) 1; -1.
- 7.8. ა) $3x^2 \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$;
ბ) $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$; ღ) $\frac{-2\Delta x}{(x-1)(x + \Delta x - 1)}$.
- 7.9. 1) $3x^2 - 4x$; 2) $5x^4 - 3x^2 + 6x$;
3) $2x^5 - 3x^3 + 2$; 4) $x^3 - x$;
5) $2x + 2^x \ln 2 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$; 6) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1$;
7) $3\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[4]{x}$; 8) $5\sqrt[3]{x^2} + 7\sqrt[4]{x^3} - 8\sqrt[5]{x^3}$;

- 9) $-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4}$; 10) $-\frac{3}{\sqrt{x^5}} - \frac{5}{\sqrt[4]{x^9}} + \frac{7}{\sqrt[6]{x^{13}}}$;
 11) $2 \cos x - 6 \sin x + 1$; 12) $\frac{4}{\cos^2 x} - \frac{5}{\sin^2 x}$;
 13) $4^x \ln 4 + 3 \cdot 2^x \ln 2$; 14) $\frac{6}{x} + 7e^x$;
 15) $\frac{7}{\sqrt{1-x^2}}$; 16) $\frac{13}{1+x^2}$;
 17) $(4x+1) \sin x + \cos x(2x^2+x)$;
 18) $(9x^2+2) \cos x - (3x^3+2x) \sin x$;
 19) $(4x^3+6x^2) \ln x + x^3+2x^2$;
 20) $e^x(\sin x + \cos x)$; 21) $5^x \ln 5 \cos x - 5^x \sin x$;
 22) $3^x \ln 3 \ln x + \frac{3^x}{x}$;
 23) $\frac{1}{x} \sin x + \cos x \ln x$; 24) $\cos x$;
 25) $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 26) $\frac{1}{2\sqrt{x}} \log_2 x + \frac{1}{\sqrt{x} \ln 2}$;
 27) $3^x(3x^2 + x^3 \ln 3)$;
 28) $(\cos x - \sin x) 2^x + 2^x \ln 2(\sin x + \cos x)$;
 29) $-\frac{3}{(x-2)^2}$; 30) $\frac{-x^2 - 6x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$;
 31) $\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}$; 32) $\frac{2x - x^2 \ln 3}{3^x}$;
 33) $\frac{2^x(\ln 2 \sin x - \cos x)}{\sin^2 x}$; 34) $\frac{3x^2+1}{x^2}$;
 35) $\frac{-x^3+3x^2+2x-3}{e^x}$; 36) $\frac{\cos x - \sin x}{e^x}$;

$$37) -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}; \quad 38) \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

$$7.10. \quad 1) \frac{2}{x} + e^x(x^2 + 4x + 2) - \frac{4}{(x-1)^2};$$

$$2) 3 \ln 5 \cdot 5^x + 4x^3 \sin x + x^4 \cos x - \frac{\sin x + \cos x}{e^x};$$

$$3) 4 \cos x + 7^x \cdot x^6(7 + \ln 7 \cdot x) + \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$4) -5 \sin x + 3^x(x^3 \ln 3 + 3x^2 + 2x \ln 3 + 2) + \frac{\sin x - 2x \cos x}{2\sqrt{x} \sin^2 x};$$

$$5) \frac{7}{\sqrt{1-x^2}} + \cos x \ln x + \frac{1}{x} \sin x - \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{\cos^2 x};$$

$$6) -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 3x^2 \cos x + x^3 \sin x - \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3};$$

$$7) \frac{5}{1+x^2} - \cos^2 x + \sin^2 x - \frac{4^x(\ln 4 \cdot x - 1)}{x^2};$$

$$8) -\frac{3}{1+x^2} - e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right) - \frac{\cos x - \sin x}{e^x}.$$

$$7.11. \quad 1) 39; \quad 2) 5; \quad 3) 3\frac{1}{2}; \quad 4) \frac{1}{48}; \quad 5) 73;$$

$$6) -1; \quad 7) \frac{1}{4}; \quad 8) \frac{1}{4}; \quad 9) 4; \quad 10) -\frac{1}{2};$$

$$11) \frac{1}{4\sqrt{2}}; \quad 12) 0; \quad 13) \frac{1}{2}; \quad 14) \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$7.12. \quad 1) 4(x^3 + 2x^2 + 3)^3(3x^2 + 4x);$$

$$2) 3(5x^4 - 3x^3 + 2x)^2(20x^3 - 9x^2 + 2);$$

$$3) 2 \cos 2x; \quad 4) -\sin \frac{x}{5}; \quad 5) \frac{3}{3x-4};$$

- 6) $\frac{18x}{9x^2 + 5}$; 7) $\frac{1}{\sqrt{2x + 3}}$;
 8) $\frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$; 9) $6 \sin 8x \sin 4x$;
 10) $-2 \sin 4x$; 11) $\operatorname{ctg} x$; 12) $-\frac{1}{x} \sin(\ln x)$;
 13) $3 \ln 3 \cdot x^2 \cdot 3^{x^2+1}$; 14) $3 \ln 4 \frac{x}{\sqrt{x^6 - 1}} \cdot 4^{\sqrt{x^6 - 1}}$;
 15) $\ln 4 \cdot \cos x \cdot 4^{\sin x}$; 16) $-\ln 5 \cdot \sin x \cdot 5^{\cos x}$;
 17) $3x^2 \cos(x^3 + 1) + \frac{4}{x}$; 18) $\frac{3x^2}{x^3 - 4} - 3e^{3x}$;
 19) $4 \ln 2 \frac{2^{\arcsin 4x}}{\sqrt{1 - 16x^2}} - 2 \ln 3 \frac{3^{\arccos 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}}$;
 20) $\frac{3 \ln 4 \cdot 4^{\operatorname{arctg} 3x} - 2 \ln 5 \cdot 5^{\operatorname{arcctg} 2x}}{1 + 9x^2}$;
 21) $\frac{1}{\cos x}$; 22) $-\frac{1}{\sqrt{x} \sin 2\sqrt{x}}$;
 23) $3x^2 e^{3x}(1 + x)$; 24) $x \cdot 2^{\sqrt{x}} \left(2 + \frac{1}{2} \ln 2\sqrt{x}\right)$;
 25) $\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$; 26) $-\frac{1}{2x(x - 1)}$;
 27) $2e^{x^2}(x \cos 4x - 2 \sin 4x)$;
 28) $4^{x^3 - 5} \left(3 \ln 4 \cdot x^2 \cdot \arcsin 3x - \frac{3}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right)$;
 29) $\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^3 2x}}$; 30) $\frac{x + a}{x^2 + a^2}$.
- 7.13. 1) $6x - 4$; 2) $20x^3 + 36x^2 - 4$;
 3) $-\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$; 4) $\frac{3x^4 + 36x}{4\sqrt{(3 + x^3)^3}}$;
 5) $72x^7 + 90x^4 + 18x$; 6) $48(2x - 3)^2$;
 7) $12x^2 \ln x + 7x^2$; 8) $e^x \cdot x^3(x^2 + 10x + 20)$;

- 9) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$; 10) $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$; 11) $9e^{3x+4}$;
 12) $36 \ln^2 2 \cdot 2^{6x+7}$; 13) $\frac{-3x^4 - 25}{(x^3 + 5x)^2}$;
 14) $-\sin x + 75e^{5x}$; 15) $2 \cos 2x$; 16) $2e^x \cos x$.
- 7.14. 1) $a^x (\ln a)^n$; 2) $(m \ln a)^n a^{mx}$;
 3) $\sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$; 4) $\cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$;
 5) $a^n \sin\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right)$; 6) $a^n \cos\left(ax + \frac{\pi n}{2}\right)$;
 7) $2^n e^{2x}$; 8) $(3 \ln 2)^n 2^{3x}$.
- 7.15. 1) $(4x+3)dx$; 2) $\left(\frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3x\sqrt[3]{x}} + 1\right)dx$;
 3) $\left(3 \cos 3x + \frac{1}{x}\right)dx$; 4) $\left(\frac{1}{x} + 2^{x+1} \ln 2\right)dx$;
 5) $(4x^3 - 6x^2 + 6x - 2)dx$;
 6) $3 \sin^2 x \cos x dx$; 7) $2xe^{4x}(1+2x)dx$;
 8) $\left(-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}} + \frac{6}{1+36x^2}\right)dx$; 9) $\frac{1}{e^x - 1} dx$;
 10) $-\operatorname{tg} x dx$; 11) $x^3\left(4 \log_3 x + \frac{1}{\ln 3}\right)dx$;
 12) $-\frac{5(1+2x)}{(x+x^2)^2} dx$; 13) $\frac{4x}{3\sqrt[3]{(2x^2+3)^2}} dx$;
 14) $(\cos x \cdot 3^{\sin x} \ln 3 - 3 \ln 2 \sin 3x \cdot 2^{\cos 3x})dx$;
 15) $-\frac{2}{(x-1)^2} dx$; 16) $\frac{x^4 + 6x^2 + 6x}{(x^2 + 2)^2} dx$.
- 7.16. 1) $\approx 2,02$; 2) $\approx 3,03$; 3) $\approx 1,11$; 4) $\approx 0,97$;
 5) $\approx 3,06$; 6) $\approx 2,77$; 7) $\approx 1,2$.
- 7.17. а) $(MR) = 200$; б) $\Delta(TR) = 950$.

- 7.18. ა) $(TR) = 80Q - Q^2$; $(MR) = 80 - 2Q$;
 ბ) $(MR) = 40$; გ) $\Delta(TR) = 39$.
- 7.19. ა) $-4Q + 6$; ბ) $\frac{250(6+Q)}{\sqrt{(3+Q)^3}}$;
 გ) $\frac{600 - 16Q}{3\sqrt[3]{(200 - 4Q)^2}}$.
- 7.20. $(MR) = 0, 5$.
- 7.21. ა) $(TC) = 500 + 3Q$; $(MC) = 3$;
 ბ) $(MC) = 3$; გ) $\Delta(TC) = 9$.
- 7.22. ა) $(TC) = 3Q^2 + 4Q + 15$; $(MC) = 6Q + 4$;
 ბ) ≈ -248 ;
 გ) ზუსტი ცვლილებაა -236 ; სხვაობაა 12 .
- 7.23. ა) $(TC) = 78 + 4Q$; $(MC) = 4$;
 ბ) (1) 12 , (2) -16 .
- 7.24. $Q = 2$.
- 7.25. ა) $K(Q) = 0,03Q - 2 + \frac{300}{Q}$; $K'(Q) = 0,06Q - 2$;
 ბ) (1) $K(50) = 5,5$; $K'(50) = 1$;
 (2) $K(100) = 4$; $K'(100) = 4$.
 გ) $Q = 100$.
- 7.26. $\Pi = -2Q^2 + 40Q - 52$.
 ა) $Q_1 = 5$; $Q_2 = 35$; ბ) $Q = 10$.
- 7.27. $Q = 111$.
- 7.28. $\Pi_{\max} = 103$.
- 7.29. ა) $\Pi'(Q) = 296 - 2Q$; ბ) ≈ 432 ;
 გ) ზუსტი ცვლილებაა 428 .
- 7.30. ა) $Q = 20$; ბ) $Q_0 = 12$, $\Pi(6) = 226$.
- 7.31. $(MPC) = 0,9$; $(MPS) = 0,1$.
- 7.32. $(MPS) = 0,7$; $(MPC) = 0,3$.

- 7.33. ა) 0,3158; ბ) 0,3158.
- 7.34. ა) $\frac{2}{23}$; ბ) 4.
- 7.35. ა) $\frac{1}{2}$; ბ) $\frac{1}{2}$.
- 7.36. ა) $\frac{11}{30}$; ბ) $\frac{33}{30}\%$.
- 7.37. ა) $\frac{1}{29}$; ბ) 58%.
- 7.38. $\frac{72}{89}$.
- 7.39. ა) 1,425; ბ) 1,2.
- 7.40. $\approx 0,682$.
- 7.41. ა) $\approx 0,952$; ბ) 9,52%.
- 7.42. $P = 9$.
- 7.43. ა) $P = 30 - \frac{3}{1000}Q$; ბ) $P = 15$.
- 7.44. $P = 475$.
- 7.45. ა) $P = 4500 - 4Q$; ბ) $P = 2250$; გ) $P = 2300$.
- 7.46. ა) $P = 6,5 - 0,002Q$; ბ) 3,4.
- 7.47. ა) $P = 30 - \frac{Q}{29}$; ბ) $P = 15$; $(TR) = 6525$.
- 7.48. 1) ზრდადია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში;
 2) კლებადია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში;
 3) ზრდადია $(-\infty; -3)$ და $(3; +\infty)$ შუალედებში, კლებადია $(-3; 3)$ შუალედში;
 4) ზრდადია $(-\infty; 2)$ და $(5; +\infty)$ შუალედებში, კლებადია $(2; 5)$ შუალედში;
 5) ზრდადია $(5; +\infty)$ შუალედში, კლებადია $(-\infty; 5)$ შუალედში;

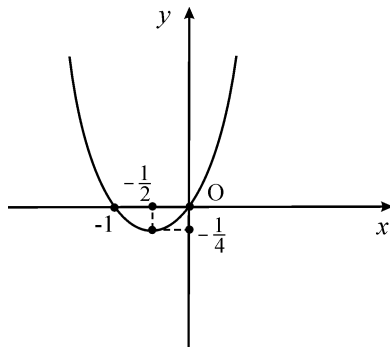
- 6) კლებადია $(-\infty; -\frac{3}{2})$ და $(-\frac{3}{2}; +\infty)$ შუალედებში;
- 7) ზრდადია $(0; \frac{1}{2})$ შუალედში, კლებადია $(\frac{1}{2}; +\infty)$ შუალედში;
- 8) ზრდადია $(-2; 0)$ შუალედში, კლებადია $(0; 2)$ შუალედში.
- 7.49.
- 1) $x = -2$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(-2) = -9$;
 - 2) $x = 2$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(2) = 4$;
 - 3) $x = -3$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(-3) = 86$,
 $x = 2$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(2) = -39$;
 - 4) $x = 0$ და $x = 2$ მინიმუმის წერტილებია, $y(0) = y(2) = 1$, $x = 1$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(1) = 2$;
 - 5) $x = 3$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(3) = -6\frac{3}{4}$;
 - 6) $x = -2$ და $x = 2$ მინიმუმის წერტილებია, $y(-2) = y(2) = -4$, $x = 0$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(0) = 0$;
 - 7) $x = 0$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(0) = 1$;
 - 8) $x = \frac{1}{9}$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(\frac{1}{9}) = -\frac{1}{3}$;
 - 9) $x = 0$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(0) = 1$;
 - 10) არა აქვს ექსტრემუმის წერტილები;
 - 11) $x = 6$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(6) = 12$, $x = 0$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(0) = 0$;
 - 12) $x = 0$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(0) = 1$;
 - 13) $x = 1$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(1) = e$;
 - 14) $x = -2$ არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(1) = \frac{1}{e}$;

- 15) $x = 2$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(2) = 1 + \ln 2$;
 16) $x = 1$ არის მინიმუმის წერტილი, $y(1) = 0$, $x = e^{-2}$
 არის მაქსიმუმის წერტილი, $y(e^{-2}) = \frac{4}{e^2}$.

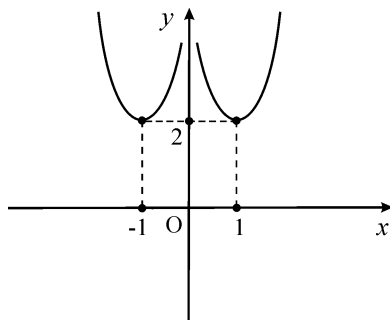
- 7.50. 1) $y_{\min}(1) = -1$, $y_{\max}(3) = 3$;
 2) $y_{\min} = y(-2) = y(2) = -13$,
 $y_{\max} = y(-3) = y(3) = 12$;
 3) $y_{\min}(0) = 0$, $y_{\max}(4) = 6$;
 4) $y_{\min}(3) = 0$, $y_{\max}(0) = 9$.
- 7.51. 1) წირი ამოხსნილია $(-\infty; 2)$ შუალედში და ჩახსნილია $(2; +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(2; -13)$;
 2) წირი ამოხსნილია $(0; +\infty)$ შუალედში და ჩახსნილია $(-\infty; 0)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(0; 0)$;
 3) წირი ამოხსნილია $(-\infty; 1)$ შუალედში და ჩახსნილია $(1; +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(1; -1)$;
 4) წირი ამოხსნილია $(-5; 2)$ შუალედში და ჩახსნილია $(-\infty; 5)$ და $(2; +\infty)$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილებია $(-5; -1622)$ და $(2; -173)$;
 5) წირი ამოხსნილია $(-\infty; -2)$ შუალედში და ჩახსნილია $(-2; +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(-2; -2e^{-2})$;
 6) წირი ამოხსნილია $(0; \frac{1}{2})$ შუალედში და ჩახსნილია $(\frac{1}{2}; +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილია $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2)$;

- 7) წირი ამოხსნილია $(-1; +\infty)$ შუალედში და ჩახსნილია $(-\infty; -1)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილი არ აქვს;
- 8) წირი ამოხსნილია $(-\infty; +\infty)$ შუალედში;
- 9) წირი ამოხსნილია $(2; +\infty)$ შუალედში, გადაღუნვის წერტილი არ აქვს;
- 10) წირი ამოხსნილია $(-1; 0)$ შუალედში და ჩახსნილია $(-\infty; -1)$ და $(0; +\infty)$ შუალედებში, გადაღუნვის წერტილებია $(-1; 1)$ და $(0; 1)$.
- 7.52. 1) $x = -5, y = 0$; 2) $x = 3, x = 7, y = 0$;
 3) $x = 3, x = -3, y = 0$;
 4) $x = 4, x = -4, y = 0$;
 5) $y = 3$; 6) $x = -3, y = 0$;
 7) $x = 2, x = -3, y = 1$; 8) $x = 2, y = \frac{1}{2}$;
 9) $x = -\frac{4}{5}, y = -\frac{3}{5}$; 10) $y = -1$;
 11) $x = 0, y = x$; 12) $x = -1, y = 2x$;
 13) $x = 2, y = x - 3$;
 14) $x = -2, x = 1, y = x - 1$;
 15) $x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}, y = 5x$; 16) $y = 2x$;
 17) $x = 1, x = -1$;
 18) ასიმპტოტები არ აქვს.

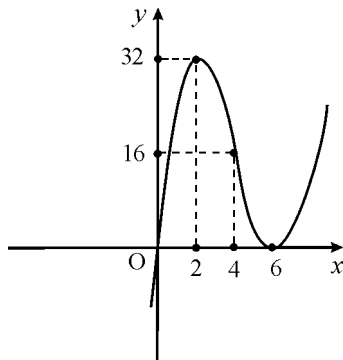
7.53. 1)



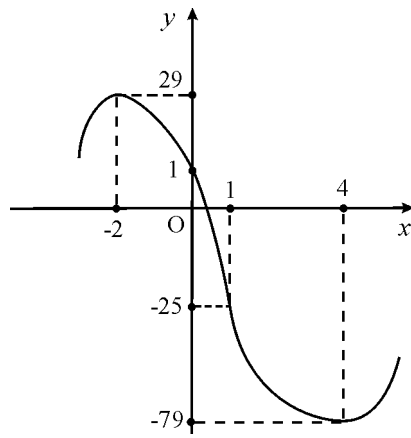
2)



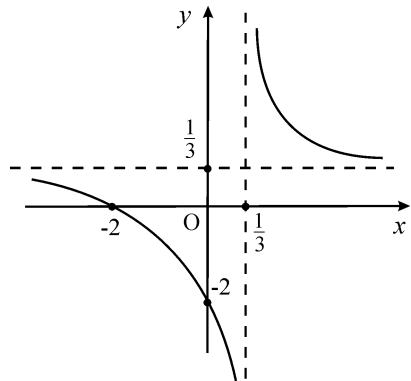
3)



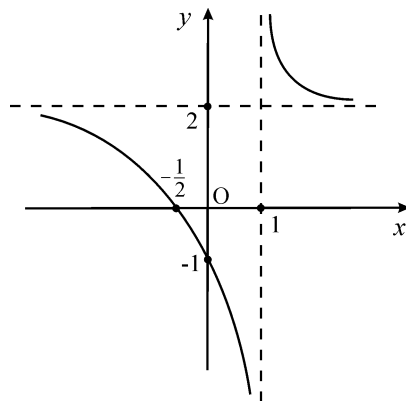
4)



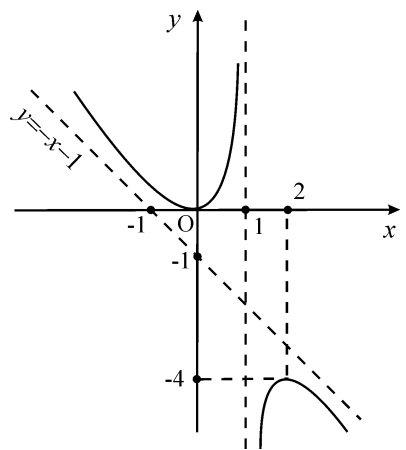
5)



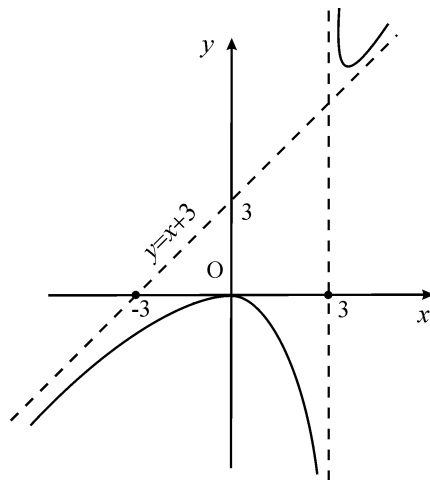
6)



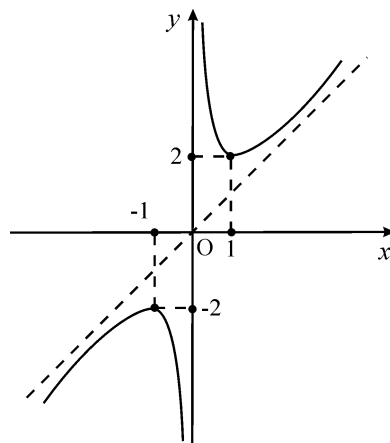
7)



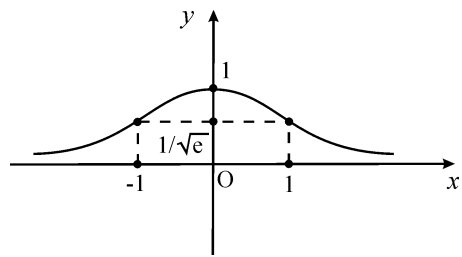
8)



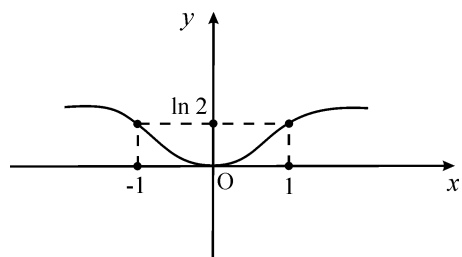
9)



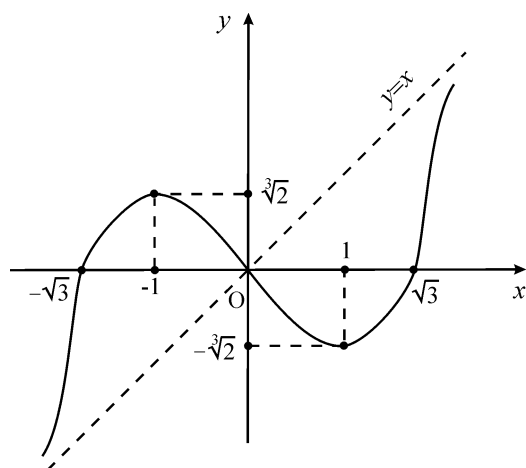
10)



11)



12)



VIII თავი

- 8.1. $S = a\sqrt{b^2 - a^2}$.
- 8.2. $(TR) = PQ$.
- 8.3. 1) -8 ; 2) $\ln 5$; 3) $\ln 4$.
- 8.4. 1) მთელი სიბრტყე;
 2) მთელი სიბრტყე კოორდინატთა სათავეს გარდა;
 3) მთელი სიბრტყე, გარდა $y = x$ წრფისა;
 4) წრე, რომლის რადიუსია 4 და ცენტრი კოორდინატთა სათავეში (სახლკვრის გარეშე);
 5) იმ წრისა და წრეწირის წერტილები, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა და რადიუსი 5-ის ტოლია;
 6) მთელი სიბრტყე, გარდა იმ წრისა და წრეწირისა, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეშია და რადიუსი 3-ის ტოლია;
 7) მთელი სიბრტყე, გარდა იმ წრეწირისა, რომლის ცენტრი კოორდინატთა სათავეა და რადიუსია 5;
 8) მთელი საბრტყე, გარდა $y = \pm \frac{1}{2}x$ წრფეებისა.
- 8.5. 1) 3; 2) 5; 3) $2\sqrt{6}$;
 4) 0; 5) 0, 6; 6) $\frac{3 - \sqrt{6}}{6}$.
- 8.6. არ არის უწყვეტი.
- 8.7. არ არის უწყვეტი.
- 8.8. 1) $z'_x = 2xy^3 - 4y^2 + 21x^2$, $z'_y = 3x^2y^2 - 8xy$;
 2) $z'_x = 12x^2y^2 - 2y$, $z'_y = 8x^3y^2 - 2x - 6y$;
 3) $z'_x = 10x + 7y^4 - 14$, $z'_y = 28xy^3 + 15$;
 4) $z'_x = 2xy^3 - 5x^4$, $z'_y = 3x^2y^2$;

- 5) $z'_x = \frac{2}{x}(y-3)\ln x$, $z'_y = \ln x^2$;
- 6) $z'_x = \frac{-2xy^2}{(3x^2 - y^2)^2}$, $z'_y = \frac{2x^2y}{(3x^2 - y^2)^2}$;
- 7) $z'_x = 8xy^3e^{4x^2}$, $z'_y = 3y^2e^{4x^2}$;
- 8) $z'_x = \frac{2xy(7y-20)}{(4x^2 + 7y^2)^2}$,
 $z'_y = \frac{20x^2 - 14x^2y - 35y^2}{(4x^2 + 7y^2)^2}$;
- 9) $z'_x = \frac{16x^2 - 64x - 20y^3}{(4x-8)^2}$, $z'_y = \frac{15y^2}{4x-8}$;
- 10) $z'_x = -\frac{40xy^2}{(5x^2 - 18)^2}$, $z'_y = \frac{8y}{5x^2 - 18}$;
- 11) $z'_x = \frac{x^2 - y^3}{4x^2y}$, $z'_y = \frac{2y^3 - x^2}{4xy^2}$;
- 12) $z'_x = \frac{3y(3y^3 - 4x^2)}{(4x^2 + 3y^3)^2}$, $z'_y = \frac{6x(2x^2 - 3y^3)}{(4x^2 + 3y^3)^2}$;
- 13) $z'_x = 40x(5x^2 + y^3)^3$, $z'_y = 12y^2(5x^2 + y^3)^3$;
- 14) $z'_x = 24x(4x^2 - 7y^2 + 5)^2$,
 $z'_y = -42y(4x^2 - 7y^2 + 5)^2$;
- 15) $z'_x = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 + 7y^2 + 11}}$,
 $z'_y = \frac{21y^2}{2\sqrt{4x^2 + 7y^2 + 11}}$;
- 16) $z'_x = 8xe^{5y}$, $z'_y = 20x^2e^{5y}$;
- 17) $z'_x = -30xy^3e^{5x^2} + 4y$, $z'_y = -9y^2e^{5x^2} + 4x$;
- 18) $z'_x = \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y}$, $z'_y = -\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}$;
- 19) $z'_x = (10x + 8y)e^{5x^2 + 7y^3 - 8xy + 15}$,
 $z'_y = (21y^2 + 8x)e^{5x^2 + 7y^3 - 8xy + 15}$;

$$20) \begin{aligned} z'_x &= (y^2 + 5y)3^{xy^2+5xy+7} \ln 3, \\ z'_y &= (2xy + 5x)3^{xy^2+5xy+7} \ln 3; \end{aligned}$$

$$21) z'_x = \frac{1}{x}, \quad z'_y = -\frac{2y}{y^2 + 5};$$

$$22) z'_x = \frac{4y}{x(7x^2 + 2y)}, \quad z'_y = \frac{-2}{7x^2 + 2y};$$

$$23) z'_x = \frac{y^2}{x \ln 5}, \quad z'_y = 2y \log_5 x;$$

$$24) z'_x = 21x^2 \log_2 4, \quad z'_y = \frac{7x^3}{y \ln 2};$$

$$25) z'_x = yx^{y-1}, \quad z'_y = x^y \ln x;$$

$$26) z'_x = -\frac{\ln y}{x \ln^2 x}, \quad z'_y = \frac{1}{y \ln x}.$$

$$8.9. \quad 1) 21 dx - 14 dy;$$

$$2) 10 dx + 6 dy;$$

$$3) \frac{1}{5} dx + \frac{2}{5} dy;$$

$$4) 21 dx - 2 dy;$$

$$5) 120e^{53} dx + 48e^{53} dy;$$

$$6) 12 dx + 24 \ln 2 dy;$$

$$7) 15e^{16} dx + 40e^{16} dy;$$

$$8) \frac{3}{4 \ln 2} dx + 16 \ln 4 dy.$$

$$8.10. \quad 1) z''_{xx} = 6y^4, \quad z''_{xy} = 24xy^3 + 4, \quad z''_{yy} = 36x^2y^2;$$

$$2) z''_{xx} = -22, \quad z''_{xy} = 21y^2, \quad z''_{yy} = 42xy;$$

$$3) z''_{xx} = 0, \quad z''_{xy} = \frac{4}{y}, \quad z''_{yy} = -\frac{4x}{y^2};$$

$$4) z''_{xx} = \frac{2(y^3 - x^2)}{(x^2 + y^3)^2}, \quad z''_{xy} = -\frac{6xy^2}{(x^2 + y^3)^2},$$

$$z''_{yy} = \frac{3y(2x^2 - y^3)}{(x^2 + y^3)^2};$$

$$\begin{aligned}
5) \quad z''_{xx} &= \frac{6y^3(x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{6xy^2}{(x^2 - 9)^2}, \\
z''_{yy} &= \frac{6y}{x^2 - 9}; \\
6) \quad z''_{xx} &= 4e^x \ln y, \quad z''_{xy} = \frac{4e^x}{y}, \quad z''_{yy} = -\frac{4e^x}{y^2}; \\
7) \quad z''_{xx} &= -5 \frac{2x^2 + 18xy + 81y^2}{(x^2 + 9xy)^2}, \\
z''_{xy} &= -\frac{45x^2}{(x^2 + 9xy)^2}, \quad z''_{yy} = -\frac{405x^2}{(x^2 + 9xy)^2}; \\
8) \quad z''_{xx} &= 128y^2 e^{8xy}, \quad z''_{xy} = 16e^{8xy} + 128y^2 e^{8xy}, \\
z''_{yy} &= 128x^2 e^{8xy}; \\
9) \quad z''_{xx} &= 8(x^2 - 9y^3)^3 - 48x^2(x^2 - 9y^3)^2, \\
z''_{xy} &= -648y^2(x^2 - 9y^3)^2, \\
z''_{yy} &= -216y(x^2 - 9y^3)^3 + 8748y^4(x^2 - 9y^3)^2; \\
10) \quad z''_{xx} &= \frac{6x}{2 + y^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{9x^2y^2}{(2 + y^3)^2}, \\
z''_{yy} &= \frac{12x^3y(y^3 - 1)}{(2 + y^3)^2}.
\end{aligned}$$

8.11.

- 1) $\frac{40e^{2t}}{7t^6} \left(1 - \frac{3}{t}\right);$
- 2) $\frac{1}{t^6 + \sqrt{t}} \left(6t^5 + \frac{1}{2\sqrt{t}}\right);$
- 3) $\frac{e^t}{5t^4 + 7e^t \ln t} \left(10^t + 7 \ln t + \frac{7}{t}\right);$
- 4) $t(880t^9 + 176t^2 - 288);$
- 5) $105t^2 + 24t - 75;$
- 6) $4(e^t + \sqrt[4]{t})^3 \left(e^t + \frac{1}{4\sqrt[4]{t^3}}\right);$

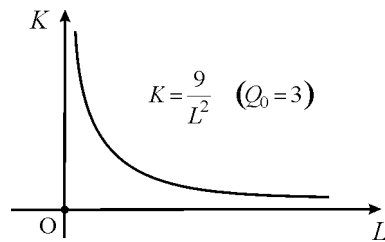
- 7) $-2\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}} \frac{t}{(t^2-1)^2}$;
- 8) $8t + 4 \ln 4$.
- 8.12. 1) $\frac{2x - 2y - 30x^2 + 11}{2(x - 7y + 6)}$;
- 2) $\frac{6x^2 + 9y^2 - 11x - y}{x - 18xy + 6}$;
- 3) $\frac{2x - x^2y - 2y^2}{3x^2y^2 + 6y^3 + x^3 - 2xy - 2}$;
- 4) $\frac{7y^2 - 30x}{2y(6y - 7x)}$;
- 5) $\frac{-y}{e^y + x}$;
- 6) $-\frac{y}{x} (\ln y + 7 \cdot 2^x \ln 2)$;
- 7) $\frac{4e^x + 18xy - y}{x(1 - 9x)}$;
- 8) $\frac{3 - 21e^{3x}(3x - 4^y)}{12y^2(3x - 4^y) + 4^y \ln 4}$;
- 9) $\frac{1 - 16xe^{x^2+y^2}(x+y)}{24y^2e^{x^2+y^2}(x+y) - 1}$;
- 10) $\frac{y 5^y \ln 2}{3 - xy 5^y \ln 2 \ln 5}$.
- 8.15. ა) $\approx 0,184$; ბ) $\approx 0,327$;
 გ) $\approx 0,4$; დ) შემცირდება $\approx 6,13\%$ -ით.
- 8.16. ა) $\approx 0,128$; ბ) $\approx 0,15$;
 გ) $\approx 0,5$; დ) გაიზარდება $\approx 1,5\%$ -ით.
- 8.17. ა) $\approx 0,26$; ბ) $\approx 0,17$;
 გ) $\approx 0,09$; დ) შემცირდება $\approx 1,8\%$ -ით.

8.18. ა) 1, 2; ბ) 4, 5; გ) 3, 75.

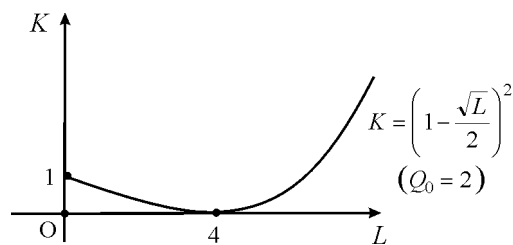
8.19. ა) 81; ბ) $\approx 6,04$;

გ) $\approx 0,075$. შესაბამისი იზოკვანტის განტოლებაა $34K + L^{\frac{1}{3}} = 165$. K კაპიტალი უნდა გაიზარდოს $\approx 4,8\%$ -ით.

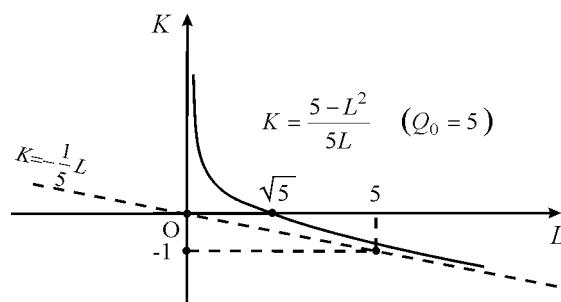
8.20. ა)



ბ)



ბ)



8.21. ა) $P_1 = 22 \$$, $P_2 = 73 \$$;

ბ) $P_1 = 28 \$$, $P_2 = 38 \$$.

8.22. $L = 30$, $K = 25$.

- 8.23. $L = 25, K = 50.$
 8.24. $L = 160, K = 40.$
 8.25. $Q_1 = 95, P_1 = 210;$
 $Q_2 = 105, P_2 = 305.$
 8.26. $Q_1 = 150, Q_2 = 55;$
 $P_1 = 170, P_2 = 130.$
 $\Pi_{\max} = 28490.$
 8.27. $Q_1 = 110, Q_2 = 170;$
 $P_1 = 460, P_2 = 360.$
 8.28. а) $K = 40, L = 80, 128000;$
 б) $L = 50, K = 75;$
 в) $L = 120, K = 20;$
 г) $L = 37,5, K = 37,5.$

IX тэзгө

- 9.1. 1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C;$
 2) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C;$
 3) $x^3 - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + 4\ln|x| + C;$
 4) $x^2 + \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} + 3\ln|x| - 8\sqrt{x} + 8x + C;$
 5) $2\sqrt{x} + \ln|x| + C;$
 6) $-\frac{1}{x^2} + 4\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C;$
 7) $x - \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^2 + C;$

- 8) $x - x^3 + \frac{3x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + C;$
 9) $\frac{x^4}{4} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{x^3}{3} + C;$
 10) $x + 3x^2 + \frac{11x^3}{3} + \frac{3x^4}{2} + C;$
 11) $\ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C;$
 12) $-\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C;$
 13) $\frac{8}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{36}{13}x^{\frac{13}{12}} + \frac{16}{3}x^{\frac{3}{4}} + C;$
 14) $\frac{4\sqrt{2}}{5}x^{\frac{5}{4}} + C;$
 15) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C;$
 16) $\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C;$
 17) $\ln|x| - \frac{1}{4x^5} + C;$
 18) $x - \operatorname{arctg} x + C;$
 19) $-x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C;$
 20) $\frac{9^x}{\ln 9} + 2 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{16^x}{\ln 16} + C;$
 21) $-\frac{4}{5^x \ln 5} - \frac{1}{25 \cdot 2^x \ln 2} + C;$
 22) $\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C,$
 9.3. 1) $\frac{2}{9}(3x-2)^{\frac{3}{2}} + C;$

- 2) $-\frac{1}{4(2x-5)^2} + C;$
- 3) $\frac{1}{44}(4x-3)^{11} + C;$
- 4) $-\frac{1}{6}(1-5x)^{\frac{6}{5}} + C;$
- 5) $-\frac{3}{4}(1-2x)^{\frac{2}{3}} + C;$
- 6) $\frac{1}{5}e^{5x} + C;$
- 7) $\frac{1}{4\ln 3} \cdot 3^{4x+5} + C;$
- 8) $-e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C;$
- 9) $\frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C;$
- 10) $\frac{1}{4}\ln^4 x + C;$
- 11) $-e^{\frac{1}{x}} + C;$
- 12) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C;$
- 13) $-\frac{1}{3\ln^3 x} + C;$
- 14) $\ln(2 + e^x) + C;$
- 15) $x - \ln(1 + e^x) + C;$
- 16) $\frac{3}{2}\ln(1 + e^{2x}) - x + C;$
- 17) $\frac{1}{3}e^{x^3} + C;$
- 18) $\frac{1}{36}(3x^2 - 1)^6 + C;$

$$19) -\frac{2^{-x^4}}{4 \ln 2} + C;$$

$$20) \frac{2}{3} (1 - \ln x)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$21) -\frac{1}{4} \ln |3 - 2x^2| + C;$$

$$22) -\frac{1}{2(1+x^2)} + C;$$

$$23) \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C;$$

$$24) -\sqrt{1-x^2} + C;$$

$$25) 2e^{\sqrt{x}} + C;$$

$$26) -\frac{4}{x-2} - \frac{11}{2(x-2)^2} + C;$$

$$27) \frac{4}{3} (1 + \sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$28) \ln |x| - \ln 2 + C;$$

$$29) \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C;$$

$$30) -x - 2 \ln |x-1| + C;$$

$$31) \frac{(x+1)^2}{2} - 2(x+1) + \ln |x+1| + C;$$

$$32) 1 - x - 2 \ln |1-x| + C;$$

$$33) -\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12} + C;$$

$$34) -\frac{8+30x}{375} (2-5x)^{\frac{3}{2}} + C;$$

$$9.4. \quad 1) e^x(x-1) + C;$$

$$2) \frac{x \cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C;$$

- 3) $x(\ln x - 1) + C$;
- 4) $\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C$;
- 5) $-\frac{1}{x} (\ln x + 1)^2 + C$;
- 6) $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$;
- 7) $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C$;
- 8) $-x(e^{-x} + 1) + C$;
- 9) $-\frac{e^{-2x}}{2} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C$;
- 10) $x(\ln^2 |x| - 2 \ln |x| + 2) + C$;
- 11) $2\sqrt{x}(\ln |x| - 2) + C$;
- 12) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + C$;
- 13) $\ln x(\ln(\ln x) - 1) + C$.

- 9.5. 3980 \$.
- 9.6. 19100 \$.
- 9.7. 3500 \$.
- 9.8. 8880 \$.
- 9.9. 323,08 \$.
- 9.10. $0,6Y + 0,4\sqrt{Y} + 1$.
- 9.11. $0,3Y + \frac{3}{20} Y \sqrt[3]{Y} + 16,96$.
- 9.12. $20e^{0,3Q} + 10$.
- 9.13.
 - а) $(TR) = 100Q - 2Q^2, \quad P = f_D(Q) = 100 - 2Q$;
 - б) $(TR) = 80Q - 3Q^2, \quad P = f_D(Q) = 80 - 3Q$;
 - в) $(TR) = 24(\sqrt{Q+9} - 3), \quad P = \frac{24}{\sqrt{Q+9} + 3}$;

- $\varpi) (TR) = 6(\sqrt{Q+4} - 2), \quad P = \frac{6}{\sqrt{Q+4} + 2}.$
- 9.14. 1) $55\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$;
 3) $42\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{4}$;
 5) $2(\sqrt{3} - \sqrt{2})$; 6) $4(e - 1)$;
 7) 21, 25; 8) $\ln 4 + 2$;
 9) 18; 10) 2;
 11) $\frac{11}{3}$; 12) $e - \sqrt{e}$;
 13) $\ln 5$; 14) $2(\ln 3 + 2)$;
 15) $2\ln 2 + \frac{1}{2}$; 16) 2, 8(3);
 17) 1; 18) $e^2 + 1$;
 19) $e - 2$; 20) $e - 2$.
- 9.15. 7.
- 9.16. 36.
- 9.17. $\vartheta) \ln 5$; $\delta) \frac{54}{\ln 3}$; $\delta) \frac{2}{9}$; $\varpi) \frac{120}{\ln 5}$.
- 9.18. $e + \frac{1}{e} - 2$.
- 9.19. 15, 5.
- 9.20. $\frac{4}{3}$.
- 9.21. 40 \$.
- 9.22. 24000 \$.
- 9.23. $\approx 1, 17$ \$.
- 9.24. 1600 \$.
- 9.25. 1210 \$.
- 9.26. ≈ 811 \$.

- 9.27. $200 \ln \frac{20}{3} - 170$ \$.
- 9.28. 20 \$.
- 9.29. $30000(e^{0,1} - e^{-0,7})$ \$.
- 9.30. $\frac{5}{7}(e^{0,7} - e^{1,4}) \cdot e^{0,42}$ \$.
- 9.31. $\frac{25}{7}(1 - e^{0,35}) \cdot 10^5$ \$.
- 9.32. 100000 \$.
- 9.33. ა) 104000 \$; ბ) $\approx 4,5$ წელი.
- 9.34. ა) ≈ 98280 \$; ბ) $\approx 5,63$ წელი.
- 9.35. ა) $\frac{A}{1+\alpha}(T_2^{\alpha+1} - T_1^{\alpha+1})$;
ბ) $\frac{A}{\alpha}(e^{\alpha T_2} - e^{\alpha T_1})$.
- 9.36. ა) $\frac{\alpha}{12}(e^{-1,2} - e^{-2,04}) \cdot 10^5$ \$;
ბ) $\frac{5}{12}(e^{-0,6} - e^{-1,44}) \cdot 10^5$ \$;
გ) $\frac{5}{12}e^{-1,2} \cdot 10^5$ \$;
- 9.37. 41000 \$.
- 9.38. ა) 128 \$; ბ) ≈ 15 \$.
- 9.39. ა) 240 \$; ბ) 144 \$.
- 9.40. ა) 100 \$; ბ) 100 \$.
- 9.41. ა) $\approx 82,7$ \$; ბ) $\approx 66,7$ \$.
- 9.42. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{18}$; 3) $\frac{1}{\ln 3}$;
4) განმლადია; 5) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 6) 0;
7) $\frac{1}{5}$; 8) $\frac{1}{6}$; 9) განმლადია;

- 10) $\frac{1}{\ln 5}$; 11) 1; 12) $\frac{32}{3}$;
 13) 12; 14) 3; 15) $\frac{\pi}{2}$;
 16) 1; 17) e ; 18) -1 ;
 19) $\frac{16 - 2\sqrt{2}}{3}$; 20) $2\sqrt{2}$; 21) განმლაგია;
 22) განმლაგია; 23) 6; 24) $3(1 + \sqrt[3]{2})$.

X თავი

- 10.1. 1) დიახ; 2) არა; 3) დიახ; 4) დიახ;
 5) არა; 6) არა; 7) დიახ; 8) არა.
- 10.2. 1) $y = x^2 + 5x + C$;
 2) $y = \frac{1}{2}(x^2 + e^{2x}) + C$;
 3) $y = 6x + C$;
 4) $y = \frac{4^x}{\ln 4} + 3x + C$;
 5) $y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$;
 6) $y = \frac{1}{4}e^{2x} + x^2 + C_1x + C_2$.
- 10.3. 1) $y = x^4 + x^3 + 1$;
 2) $y = xe^x - e^x + 3$;
 3) $y = \ln \frac{1+x^2}{2}$;
 4) $y = x \ln x - x + 2$;
 5) $y = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + x + 2$;
 6) $y = x^2 + e^x + 2x$.

- 10.4. 1) $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \ln x + C;$
 2) $\ln x + \frac{1}{y} = 1;$
 3) $\frac{y^3}{3} = x - x^2 + 9;$
 4) $\frac{1 + y^2}{1 - x^2} = C;$
 5) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C;$
 6) $x\sqrt{1 + y^2} = C;$
 7) $e^x + e^{-y} = C;$
 8) $\frac{y^2}{2} = \ln(1 + e^x) + C.$
- 10.5. 1) $\frac{x}{y} + \ln |y| = 2;$
 2) $y = Cx - 2x \ln |x|;$
 3) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C;$
 4) $\ln y + \frac{2x}{y} = 0;$
 5) $\ln |x| - \frac{x}{y} = C;$
 6) $\sqrt{\frac{x}{y}} + \ln y = C;$
 7) $y = x \ln \frac{y}{C};$
 8) $\sqrt{x^2 + y^2} = e^{-\operatorname{arctg} \frac{y}{x}}.$
- 10.6. 1) $y = Cx + x^2;$

$$2) y = \frac{C + e^x}{x};$$

$$3) y = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{6};$$

$$4) y = (1 - x^2)[C - \ln |1 - x|];$$

$$5) y = e^{-x}(2 + x);$$

$$6) y = e^{-x^2}(1 + x^3);$$

$$7) y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2} + 1;$$

$$8) y = \frac{8}{x^2} + x.$$

$$10.7. \quad \text{a)} y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2;$$

$$\text{b)} y = \frac{1}{6}x^3 + e^x + C_1x + C_2;$$

$$\text{c)} y = 3x^2 + e^{2x} + C_1x + C_2;$$

$$\text{d)} y = \frac{1}{2x} - 2x^2 + C_1x + C_2.$$

$$10.8. \quad 1) y = \frac{5e^{3x} + e^{-3x}}{6};$$

$$2) y = 2 - e^{-4x};$$

$$3) y = C_1e^x + C_2e^{3x};$$

$$4) y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x};$$

$$5) y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{x}{2}};$$

$$6) y = e^{3x};$$

$$7) y = (C_1 + C_2x)e^{1,5x};$$

$$8) y = (2 + 3x)e^{-x};$$

$$9) y = \cos 2x + \sin 2x;$$

$$10) y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-x};$$

$$11) y = \sin x;$$

$$12) y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)e^{-2x}.$$

$$10.9. \quad 1) y = (C_1 + C_2 x)e^{2x} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8};$$

$$2) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - x^2 + x - 3;$$

$$3) y = C_1 + C_2 e^{-x} + 3x;$$

$$4) y = C_1 + C_2 e^{3x} + x^2;$$

$$5) y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + \frac{e^{2x}}{9};$$

$$6) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x;$$

$$7) y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{2}xe^x;$$

$$8) y = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

$$10.10. \quad \text{ა) } \frac{dx}{dt} = 5 \cdot 10^6; \quad \text{ბ) } 600 \text{ გლკ}; \quad \text{გ) } 800 \text{ გლკ}.$$

$$10.11. \quad \text{ა) } 200 \text{ გლკ}; \quad \text{ბ) } 800 \text{ გლკ}.$$

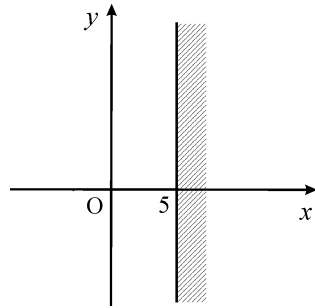
$$10.12. \quad 1000 \text{ გლკ}.$$

$$10.13. \quad P(t) = e^{\frac{t}{24}} (3464 \cdot 10^4 + 36 \cdot 10^3 e^{-\frac{t}{24}}).$$

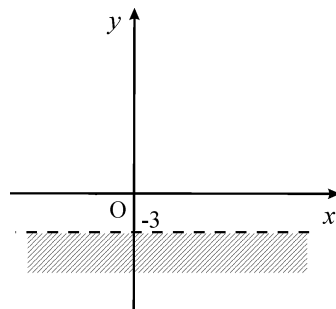
$$10.14. \quad P(t) = \frac{45 \cdot 10^5}{e^{-2 \cdot 10^4 t} + 9}.$$

XI табул

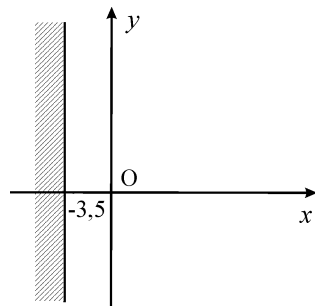
11.1. 1)



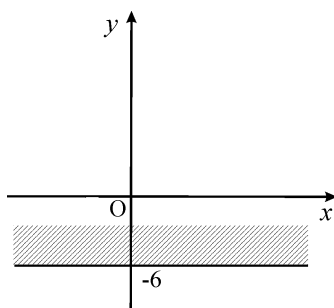
2)



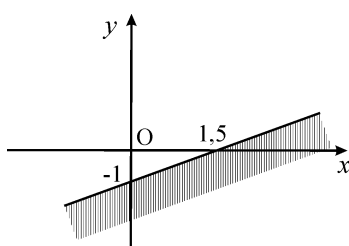
3)



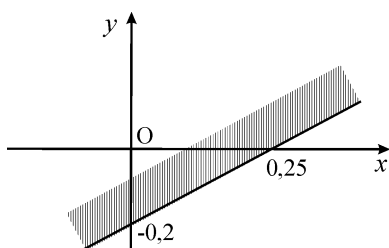
4)



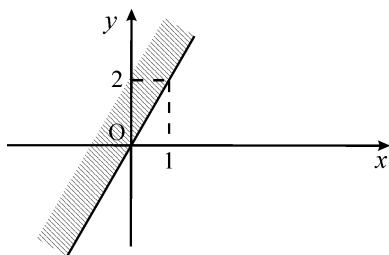
5)



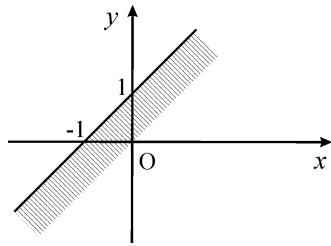
6)



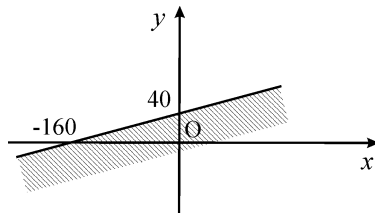
7)



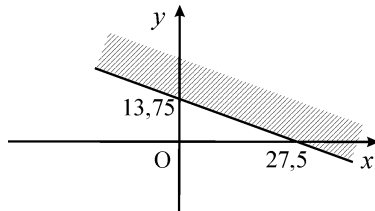
8)



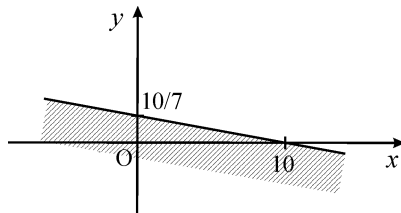
9)



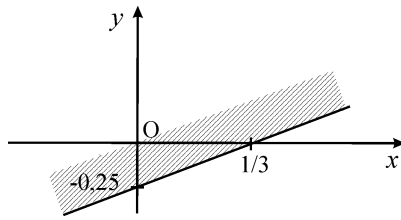
10)



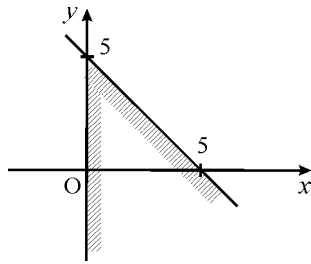
11)



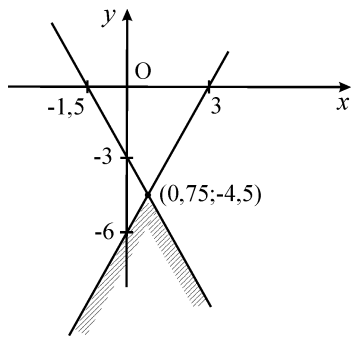
12)



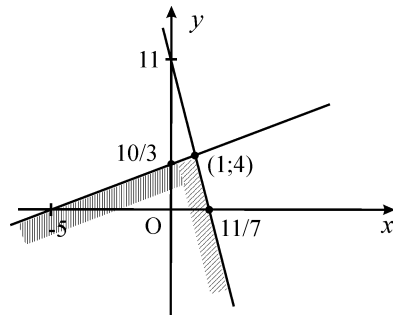
11.2. 1)



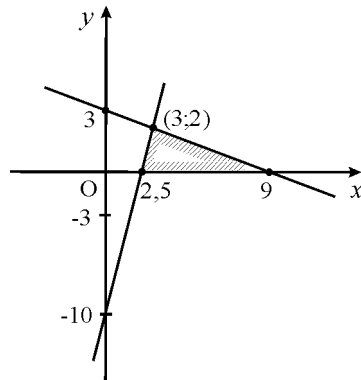
2)



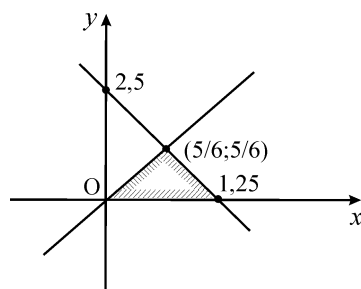
3)



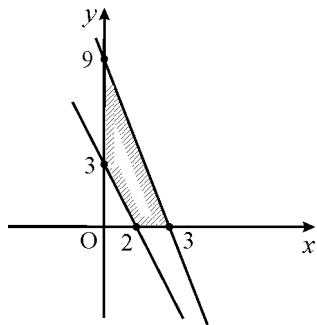
4)



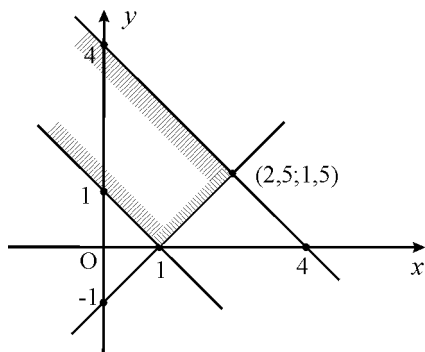
5)

6) \emptyset

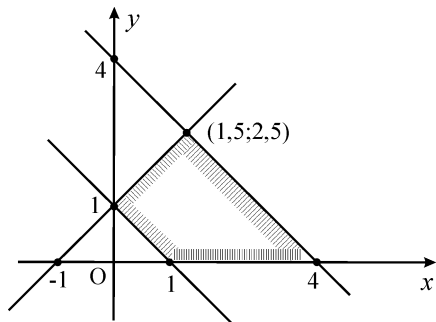
7)



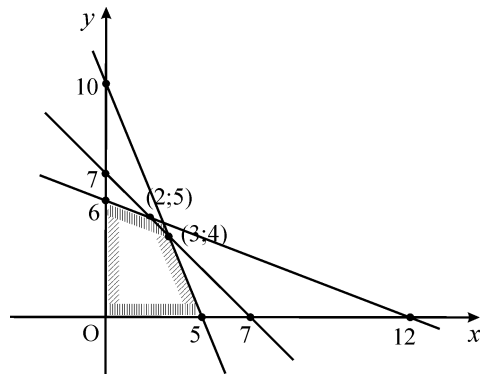
8)



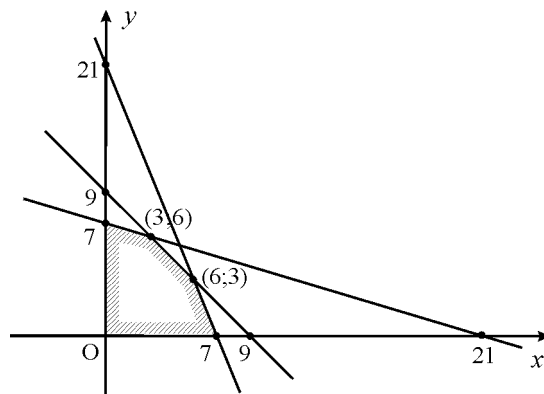
9)



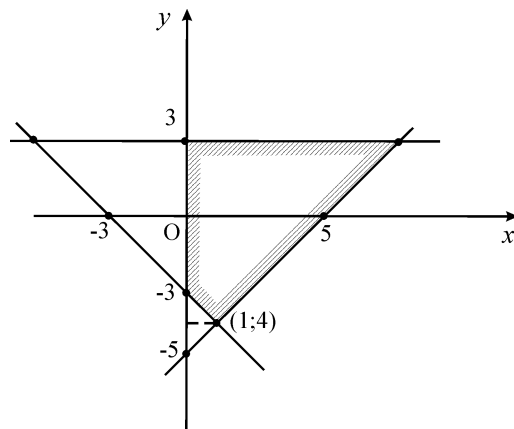
10)



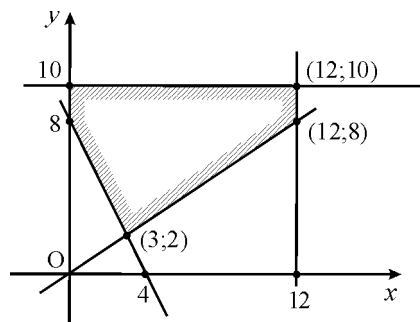
11)



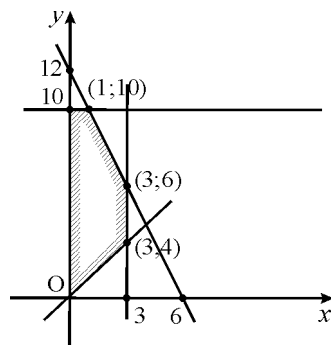
12)



13)



14)



- 11.3. 1) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(0; 6) = 12$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(9; 0) = -9$;
 2) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(1; 5) = 9$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(1; 0) = -1$;
 3) უდიდესი მნიშვნელობაა $f(0; 0) = 0$, უმცირესი მნიშვნელობაა $f(0; -4) = -8$.
- 11.4. 1) ამონახსენი არ გააჩნია;
 2) $f(30; 40) = 900$;
 3) $f(2; 5) = 19$;
 4) $f(1; 0) = 8$;
 5) დასაშვებ მნიშვნელობათა სიმრავლე ცარიელია;
 6) $f(3; 4) = 7$;
 7) $f(8; 4) = 240$;
 8) $f(5; 0) = 500$;
 9) $f(4; 2) = 8$;
 10) $f(6; 10) = 130$.
- 11.5. ფირმამ უნდა აწარმოოს A ტიპის 48 და B ტიპის 16 ერთეული პროდუქტი, რომ მიიღოს მაქსიმალური ამონაკები 2880 დოლარის ოდენობით.
- 11.6. 20 პიჯაკი და 350 შარვალი. მაქსიმუმი შექმოსავალია 23000 დოლარი.
- 11.7. 100 წუთი ტელერეკლამა, 200 წუთი რადიორეკლამა.
- 11.8. A მოდელის 10 ავტომობილი, B მოდელის 15 ავტომობილი. მაქსიმალური მოგებაა 180000 დოლარი.
- 11.9. ენერჯეტიკაში 12,5 მილიონი დოლარი, ხოლო კავშირგაბმულობაში 7,5 მილიონი დოლარი. მაქსიმალური მოგებაა 1,85 მილიონი დოლარი.
- 11.10. 40 ძროხა, 160 ცხვარი. მოგებაა 17200 დოლარი.

- 11.11. 100 მაგიდა, 50 კარადა, მოგებაა 40000 დოლარი.
- 11.12. 30 ქალის სვიტერი, 20 მამაკაცის სვიტერი. 1900 დოლარი.

შინაარსი

თავი VII.	მარეინალური ფუნქციები. ფუნქციის წარმოებული. დიფერენციალი. ფუნქციის სრული გამოკვლევა	3
თავი VIII.	მრავალი ცვლადის ფუნქციები	22
თავი IX.	ინტეგრალური აღრიცხვის ელემენტები. მომხმარებლის დანაზოგი. მწარმოებლის ამონაგების ნამუტი. უწყვეტი შემოსავლის ნაკადის მიმდინარე ღირებულება. ინექსტიციის ნაკადი და კაპიტალის დაგროვება	33
თავი X.	დიფერენციალურ განტოლებათა თეორიის ელემენტები	47
თავი XI.	წრფივი დაპროგრამების ელემენტები	53
პასუხები		61
VII თავი		61
VIII თავი		76
IX თავი		82
X თავი		89
XI თავი		93