

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

ნოდარ მასვილაძე, დავით ბორ ბიძე

# დინამიკის ამოცანათა კრებული

(მეთოდური მითითებებით და ამოხსნებით)

თბილისი  
2009

თეორიულ მექანიკას ერთ-ერთი წამყვანი ადგილი უკავია იმ საგნებს შორის, რომელიც წარმოადგენს თეორიულ ბაზას ისეთი ტექნიკური საგნებისათვის, როგორცაა მასალათა გამძლეობა, მანქანებისა და მექანიზმების თეორია, ღრეკალობის თეორია, სამშენებლო მექანიკა, ჰიდრავლიკა და მრავალი სხვ.

თეორიული მექანიკის შესასწავლად დიდი მნიშვნელობა აქვს სტუდენტების მიერ თეორიის საკითხებთან ერთად პრაქტიკული ამოცანების დამოუკიდებლად ამოხსნის ჩვევების დაუფლებას. სწორედ ამ ამოცანას ემსახურება ამ კრებულში შეტანილი მეთოდური მითითებები.

წინამდებარე კრებულში წარმოდგენილია ამოცანები, რომლებიც საკმაოდ ასახავენ უმაღლეს ტექნიკურ სასწავლებლებში თანამედროვე სასწავლო პროგრამებით გათვალისწინებულ თემატიკას. ყოველ თემაზე კრებულში მოყვანილია რამდენიმე ტიპური ამოცანის დაწვრილებითი ამოხსნა საჭირო მეთოდური მითითებებით. იქვე მოცემულია გარკვეული რაოდენობის ამოცანები დამოუკიდებელი მუშაობისათვის, ხოლო ამ ამოცანების ამოხსნა მოცემულია წიგნის ბოლოში.

ყოველი თემის დასაწყისში მოკლედ ჩამოყალიბებულია თეორიის ძირითადი საკითხები და მოცემულია შესაბამისი ფორმულები. ამოცანის გარჩევისა და ამოხსნის დაწყებამდე საჭიროა სტუდენტმა აუცილებლად შეისწავლოს თეორიული კურსის შესაბამისი საკითხები, ვინაიდან ამ კრებულში მოყვანილი მოკლე თეორიული ცნობები ვერ შეცვლიან თეორიულ სახელმძღვანელოს. სასურველია ამოცანების ამოხსნა წარმოებდეს რეკომენდირებული მიმდევრობით და გათვალისწინებული იქნეს შესაბამისი მეთოდური მითითებები.

krebuli gankuTvnilia nebismeri umaRlesi teqnikuri saswavleblis studentebisatvis.

რედაქტორი

გ. ბადათურია

რეცენზენტ:

ლ. ჯიქიძე

მ. ლოსაბერიძე

# §1. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

დინამიკის ძირითადი კანონიდან გამომდინარე, ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს სხვადასხვა სახით:

$$1) \text{ ვექტორული სახით: } m\vec{w} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

სადაც m - წერტილის მასაა,  $\vec{w}$  - მისი აჩქარება,  $\vec{F}$  - წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედი.

$$2) \text{ დეკარტეს უძრავ მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში: } m\ddot{x} = X, \quad m\ddot{y} = Y, \quad m\ddot{z} = Z, \quad (1.2)$$

სადაც x,y,z - M წერტილის კოორდინატებია,  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  - წერტილის  $\vec{w}$  აჩქარების გეგმილებია, X,Y,Z - ტოლქმედი  $\vec{F}$  ძალის გეგმილებია.

$$3) \text{ კოორდინატთა ბუნებრივ სისტემაში (ბუნებრივი ტრიედრის ღერძებზე - } \vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}): \quad m dv_{\tau}/dt = F_{\tau}, \quad mv^2/\rho = F_n, \quad 0 = F_b, \quad (1.3)$$

სადაც  $v_{\tau}$  - წერტილის სიჩქარის გეგმილია ტრაექტორიის მხებზე, v - სიჩქარის სიდიდე,  $\rho$  - ტრაექტორიის სიმრუდის რადიუსია წერტილის ადგილზე მდებარეობაში,  $F_{\tau}, F_n, F_b$  - ძალის გეგმილები შესაბამისად ტრაექტორიის მხებზე ( $\vec{\tau}$ ), ნორმალზე ( $\vec{n}$ ) და ბინორმალზე ( $\vec{b}$ ).

## ა) დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანა

თუ მოცემულია m მასის ნივთიერი M(x,y,z) წერტილის მოძრაობის კინემატიკური განტოლებები დეკარტეს კოორდინატებში  $x=f_1(t), y=f_2(t), z=f_3(t)$ , მაშინ ამ მოძრაობის გამომწვევი  $\vec{F}(X,Y,Z)$  ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.2) ფორმულებით, ხოლო თვით  $\vec{F}$  ძალის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (1.4)$$

$$\text{Cos}(x, \wedge \vec{F}) = X/F, \quad \text{Cos}(y, \wedge \vec{F}) = Y/F, \quad \text{Cos}(z, \wedge \vec{F}) = Z/F. \quad (1.5)$$

თუ მოცემულია m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის განტოლება ბუნებრივი სახით  $s=f(t)$ , მაშინ  $\vec{F}(F_{\tau}, F_n, F_b)$  ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.3) ფორმულებით, სადაც

$$v_{\tau} = ds/dt. \quad (1.6)$$

ძალის სიდიდე და მიმართულება განისაზღვრება ფორმულებით:

$$F = \sqrt{F_{\tau}^2 + F_n^2}; \quad (1.7)$$

$$\text{Cos}(\vec{\tau}, \wedge \vec{F}) = F_{\tau}/F, \quad \text{Cos}(\vec{n}, \wedge \vec{F}) = F_n/F, \quad \text{Cos}(\vec{b}, \wedge \vec{F}) = 0;$$

აქ  $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$  - შესაბამისად ტრაექტორიის მხების, ნორმალის და ბინორმალის მგეზავებია.

**მითითება:** დინამიკის პირველი ძირითადი ამოცანის ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) გამოვსახოთ ნახაზზე (თუ ეს საჭიროა) ნივთიერი წერტილის მიმდინარე მდებარეობა და მასზე მოღებულ, როგორც აქტიური, ასევე ბმის რეაქციის ძალები; 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სათანადო სისტემა; 3) მოძრაობის მოცემული კანონის მიხედვით განვსაზღვროთ წერტილის აჩქარება და მისი გეგმილები საკოორდინატო ღერძებზე; 4) კოორდინატთა არჩეული სისტემის შესაბამისად შევადგინოთ წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები (1.2) ან (1.3) სახით; 5) განტოლებათა მიღებული სისტემიდან განვსაზღვროთ უცნობი სიდიდეები.

**ამოცანა 1.1.**  $m=2$  კგ მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის კანონი გამოისახება განტოლებებით:  $x=3t^3-2t^2$  (სმ),  $y=4t^2+1$  (სმ),  $z=5t+4$  (სმ),

სადაც t გამოსახულია წამებში.

განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე  $t=1$  წმ მომენტში.

**ამოხსნა.** წერტილზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.2) ფორმულებით.

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე:  $\ddot{x}=18t-4, \ddot{y}=-8, \ddot{z}=0$ . ამიტომ, (1.2)-ის თანახმად ნებისმიერ t მომენტში:  $X=2(18t-4), Y=-16, Z=0$ .

$t=1$  წმ მომენტში:  $X=28, Y=-16, Z=0$ .

$\vec{F}$  ძალის სიდიდე იქნება:  $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 2\sqrt{255} = 31,9$  ნ.

**ამოცანა 1.2.** ნივთიერი წერტილი მოძრაობს  $R=8$  მ რადიუსის წრეწირზე,  $s=2t^2$  მ კანონით (t - წამებში). განსაზღვრეთ ამ წერტილის მასა, თუ ცნობილია, რომ, როცა  $s=2$  მ-ს, მაშინ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდეა  $F = \sqrt{5}$  ნ.

**ამოხსნა.** წერტილი მოძრაობს წრეწირზე, ამიტომ მიზანშეწონილია გამოვიყენოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა.

წერტილზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალის გეგმილები განისაზღვრებიან (1.3) ფორმულებით. (1.6)-ის თანახმად  $v_{\tau} = ds/dt = 4t$ ; წრეწირზე მოძრაობისას  $v_{\tau} = v = 4t$ ; ამიტომ გვექნება:

$$F_{\tau} = m dv_{\tau}/dt = 4m; \quad F_n = mv^2/R = 2mt^2; \quad F_b = 0.$$

(1.7) - ის თანახმად  $\vec{F}$  ძალის სიდიდე დროის ნებისმიერ t მომენტისათვის:

$$F = \sqrt{F_{\tau}^2 + F_n^2}, \text{ ანუ } F = \sqrt{16m^2 + 4m^2t^4}; \quad (*)$$

პირობის თანახმად  $s=2t^2$ ; ამიტომ, დროის ის მომენტი, როცა წერტილი გაივლის  $s=2$  მ-ს, იქნება  $2=2t^2$ , ე.ი.  $t=1$ წმ. დროის ამ მომენტისათვის  $F=\sqrt{5}$ .

(\*) ტოლობიდან მივიღებთ ( $t=1$ წმ,  $F=\sqrt{5}$  ნ):

$$\sqrt{5} = \sqrt{16m^2 + 4m^2}; \quad \text{ს} \quad ; \quad m = 0,5 \text{ ნ.}$$

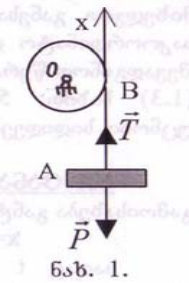
**ამოცანა 1.3.** უძრავი 0 ღერძი 4 ემო მბრუნავ ბლოკზე დახვეული თოკის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია  $P = 1,2$  კნ წონის ტვირთი, რომელიც მოძრაობს  $w=g/2$  -ს ტოლი აჩქარებით. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ხდება ტვირთის აწევა.

**ამოხსნა.** ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა:  $\vec{P}$  -ტვირთის სიმძიმის ძალა და  $\vec{T}$  - თოკის დაჭიმულობის ძალა. დინამიკის ძირითადი კანონის თანახმად ტვირთის მოძრაობის კანონი იქნება:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{T}. \quad (*)$$

მიემართოთ x ღერძი ტვირთის მოძრაობის მხარეს (ზემოთ) და დაავადებთ (\*) ტოლობა ამ ღერძზე. მივიღებთ:  $m\vec{w} = -P + T$ ; აქედან  $T = m\vec{w} + P = P/g \cdot g/2 + P = 3P/2 = 1,8$  კნ.

**დაპასუხება:** განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ტვირთი მოძრაობს ქვევით. პასუხი:  $T = 0,6$  კნ.



ნახ. 1.

**ამოცანა 1.4**  $m = 0,2$  კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კანონით  $x = 8t^2 + 3$  (მ),  $y = 3t - 4$  (მ). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის გეგმილები  $t = 1$  წმ მომენტში. პასუხი  $X = 3,2$  ნ,  $Y = 0$ .

**ამოცანა 1.5.**  $m = 1$  კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კანონით:  $\vec{r} = \vec{i} e^{2t} + \vec{j} \cos^2 t - \vec{k} t^2$ , სადაც  $r$  - წერტილის რადიუს - ვექტორია ათვლის  $Oxyz$  ინერციული სისტემის მიმართ ( $r$  - მეტრებში,  $t$  - წამებში). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი ძალის სიდიდე დროის საწყის  $t_0 = 0$  მომენტში.

პასუხი:  $F_0 = 2\sqrt{6}$

**ამოცანა 1.6.** სამი მუდმივი  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  ძალა, რომელთა სიდიდეები აკმაყოფილებს  $F_1:F_2:F_3 = 1:2:3$  თანფარდობას, მოქმედებს  $m=3$  კგ მასის წერტილზე ერთი და იმავე მიმართულებით და ანიჭებს მას  $w=3$  მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებას. იპოვეთ თითოეული ამ ძალის სიდიდე.

პასუხი:  $F_1=1,5$  ნ;  $F_2=3$  ნ;  $F_3=4,5$  ნ.

**ამოცანა 1.7.**  $m = 1$  კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ათვლის ინერციული  $Oxyz$  სისტემა მიმართ ორი მუდმივი ძალის მოქმედებით:  $\vec{F}_1 = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$  და  $\vec{F}_2 = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$  (ნ). როგორი აჩქარებით მოძრაობს წერტილი?

პასუხი:  $w = 4\sqrt{5}$  მ/წმ<sup>2</sup>.

**ამოცანა 1.8.**  $m$  მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ათვლის ინერციული  $Oxyz$  სისტემის მიმართ სამი მუდმივი ძალის მოქმედებით:

$$\vec{F}_1 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{F}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{F}_3 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k} \quad (ნ).$$

როგორ  $\alpha$  კუთხეს ადგენს წერტილის აჩქარების ვექტორი კოორდინატთა  $Oy$  ღერძთან?

პასუხი:  $\alpha = \pi/2$ .

**ამოცანა 1.9.**  $P = 49$  ნ წონის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს ჰორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებული  $R=9$  სმ რადიუსის წრეწირზე  $s=8t^3$  სმ კანონით. განსაზღვრეთ ამ წერტილზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალის სიდიდე და მიმართულება  $t=1$  წმ მომენტში. პასუხი:  $F = 4$  ნ;  $\text{tg}\alpha = 3/4$ ;

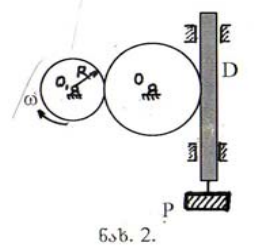
( $\alpha$  არის კუთხე  $\vec{F}$  ძალასა და შესაბამის რადიუსს შორის).

**ამოცანა 1.10.**  $m=1$  კგ მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს  $R=1$ მ რადიუსის წრეწირის რკალზე  $s=t^2 - t + 1$  კანონით ( $s$ -მეტრებში,  $t$  - წამებში). განსაზღვრეთ წერტილზე მოქმედი  $\vec{F}$  ძალა დროის  $t=0,5$  წმ მომენტში.

პასუხი:  $\vec{F} = 2\vec{T}$  ნ.

**ამოცანა 1.11.**  $R=10$  სმ რადიუსის ლილვზე დახვეული თოკის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებულია  $P=800$  ნ წონის ტვირთი. ლილვი ბრუნავს  $\omega=30$  წმ<sup>-1</sup> კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ თოკის დაჭიმულობა, როცა ტვირთი: ა) აიწევა; ბ) ეშვება (იხ. ნახ.1). პასუხი: ა) 1045 ნ ბ) 555 ნ.

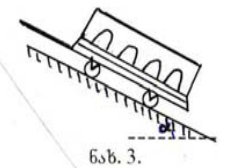
**ამოცანა 1.12.**  $P$  წონის ტვირთი, რომელიც დაკიდებულია უწონად და უჭიმად ბაგირზე, აიწევა კბილა გადაცემის საშუალებით. გადაცემა მექანიზმის ელემენტების მასები და წინაღობა უგულებელყავით.



ნახ. 2.

განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობის  $\vec{T}$  ძალა, თუ გადაცემის  $O_1$  თვალის რადიუსია  $R$  და მისი კუთხური სიჩქარე იცვლება  $\omega=kt$  კანონით, სადაც  $k$  დადებითი მუდმივია. პასუხი:  $T = P(1 + Rk/g)$ .

**ამოცანა 1.13.** თბილისის ფუნქციონირის ტრამვაის ვაგონი, რომლის მასა არის  $m = 8000$ კგ, ეშვება მთაწმინდის ფერდობზე საბაგირო რკინიგზით  $v = 1,6$  მწმ სიჩქარით. ფერდობი დახრილია ჰორიზონტისადმი  $\alpha=30^\circ$  კუთხით. განსაზღვრეთ ბაგირის დაჭიმულობა ვაგონის



ნახ. 3.



ამ ღერძზე, მივიღებთ:  $m\ddot{x} = -F$ . ნახ. 4

გავაინტეგრიროთ ეს ტოლობა:  $m\dot{x} = -Ft + c_1$ . (ბ)

მოძრაობის საწყისი პირობებია:  $t=t_0=0$ , მაშინ  $\dot{x}_0=v_0=5$  მ/წმ,  $x_0=0$ . (გ)

ამიტომ  $t_0=0$  მომენტში (ბ)-დან გვექნება:  $mv_0 = c_1$ ; (ბ) ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$m\dot{x} = -Ft + mv_0. \quad (დ)$$

დაუშვათ წერტილი გაჩერდეს უკანა მხარეს უკანა მხარეს. ე.ი., როცა  $t=\tau$ , მაშინ  $\dot{x}=v=0$ . ამიტომ (დ)-დან მივიღებთ:  $0 = -F\tau + mv_0$ , საიდანაც  $\tau = mv_0/F$  წმ.

(დ) ტოლობის ინტეგრირებით მივიღებთ:  $mx = -1/2 \cdot Ft^2 + mv_0t + c_2$ . (ე)

აქ  $c_2$  განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი (გ) პირობებიდან: როცა  $t=t_0=0$ , მაშინ  $x=x_0=0$  და გვექნება  $c_2=0$ . ამ მნიშვნელობის (ე) -ში შეტანით მივიღებთ:  $mx = -1/2 \cdot Ft^2 + mv_0t$ . (ვ)

$\tau$  წამში სხეულმა გაიარა  $x=s=1$  მ მანძილი და გაჩერდა; ამიტომ, როცა  $t=\tau$ , (ვ)-დან მივიღებთ:  $ms = -1/2 \cdot F\tau^2 + mv_0\tau$ ;

შევიტანოთ აქ  $\tau$  -ს მნიშვნელობა:  $ms = -1/2 \cdot F(mv_0/F)^2 + mv_0(mv_0/F)$ ;

აქედან  $F = mv_0^2/2s = 1,25$  ნ.  $F = 1,25$  ნ.

**აშოცანა 1.16.** მოთხილამურე ეშვება ჰორიზონტისადმი  $\alpha=60^\circ$  კუთხით დახრილ  $s=100$  მ სიგრძის ფერდობზე. თხილამურების თოვლზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f=0,1$ . განსაზღვრეთ მოთხილამურის დაშვების დრო ( $\tau$ ) და სიჩქარე ( $v$ ) ფერდობის ბოლოში, თუ დაშვების დასაწყისში სიჩქარე ნულის ტოლი იყო. ჰაერის წინაღობა უგულებელყავით.

**აშოცანა 1.17.** კოორდინატთა მართკუთხა  $Oxy$  სისტემის სათავე მოვათავსოთ მოთხილამურის დაშვების საწყისი  $O$  წერტილში და  $Ox$  ღერძი მიემართოს ფერდობის გასწვრივ ქვევით.

მოძრაობის საწყისი პირობებია:

როცა  $t=t_0=0$ , მაშინ  $x=x_0=0$ ,  $\dot{x}=\dot{x}_0=v_0=0$ . (ა)

მოთხილამურეზე მოქმედებს სიმძიმის  $\vec{P}=m\vec{g}$  ძალა, ფერდობის

რეაქციის ძალა  $\vec{N}$  და თოვლზე თხილამურების

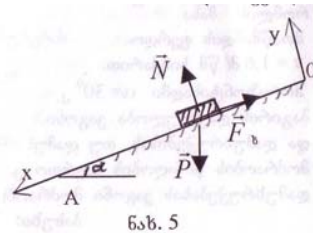
სრიალის ხახუნის ძალა  $\vec{F}_b$ , მიმართული მოძრაობის საწინააღმდეგოდ.

ნიუტონის მე-2 კანონის თანახმად:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_b.$$

დავაგვეგმილოთ ეს ტოლობა  $Ox$  და

$Oy$  ღერძებზე:  $m\ddot{x} = mg \sin\alpha - F_b$ , (ბ)



ნახ. 5

$$0 = -mg \cos\alpha + N.$$

(ვინაიდან მოთხილამურე მოძრაობს  $Ox$  ღერძის გასწვრივ, ამიტომ  $w_y = \ddot{y} = 0$ ).

(ბ)-დან  $N = mg \cos\alpha$ ; ხახუნის ძალა  $F_b = fN = fmg \cos\alpha$ . გვექნება:

$$m\ddot{x} = mg \sin\alpha - fmg \cos\alpha,$$

ანუ  $\ddot{x} = g(\sin\alpha - f \cos\alpha)$ .

ამ ტოლობის ორჯერ ინტეგრირებით მივიღებთ:

$$\dot{x} = gt(\sin\alpha - f \cos\alpha) + c_1 \quad (გ)$$

$$x = 1/2 gt^2(\sin\alpha - f \cos\alpha) + c_1t + c_2.$$

აქ ინტეგრირების  $c_1$  და  $c_2$  მუდმივები განისაზღვრება მოძრაობის საწყისი (ა) პირობებით: როცა  $t=t_0=0$ , (გ)-დან მივიღებთ:

$$c_1 = \dot{x}_0 = 0, \quad c_2 = x_0 = 0. \quad (გ) \text{ ტოლობები ასე გადაიწერება}$$

$$\dot{x} = gt(\sin\alpha - f \cos\alpha), \quad (დ)$$

$$x = 1/2 gt^2(\sin\alpha - f \cos\alpha).$$

ფერდობის გავლას მოთხილამურე ანდომებს  $\tau$  წამს; ამიტომ, როცა  $t=\tau$ , მაშინ მოთხილამურე გაივლის  $x=s$  მანძილს და ფერდობის ბოლოში სიჩქარე იქნება  $\dot{x}=v_A$ . (დ)-დან მივიღებთ:

$$v_A = g\tau(\sin\alpha - f \cos\alpha),$$

$$s = 1/2 g\tau^2(\sin\alpha - f \cos\alpha).$$

ამ განტოლებებში შევიტანოთ ამოცანის პირობით მოცემული ( $s, f, \alpha, g=9,8$  მ/წმ<sup>2</sup>) სიდიდეების მნიშვნელობები და ამოვხსნათ მიღებული სისტემა. გვექნება:  $\tau=5$  წმ,  $v_A=40$  მ/წმ.

**აშოცანა 1.17.**  $P=10$  ნ წონის სხეული მოძრაობს ცვლადი  $F=10(1-t)$  ნ ძალის მოქმედებით ( $t$  - წმ-ში). რა  $\tau$  დროის შემდეგ გაჩერდება სხეული, თუ საწყისი მომენტში  $v_0=20$  სმ/წმ და  $\vec{F}$  ძალა ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას. რა  $s$  მანძილს გაივლის სხეული გაჩერებამდე?

**აშოცანა 1.18.** ამოცანის პირობის თანახმად ძალის მიმართულება ემთხვევა სიჩქარის მიმართულებას ამ მიმართულებას. დავამთხვიოთ საკოორდინატო  $Ox$  ღერძი, სათავეთ  $O$  წერტილში. მოძრაობის საწყისი პირობებია:  $t_0=0$ ,  $x_0=0$ ,  $\dot{x}_0=v_0$ . (ა)

მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას ასეთი სახე აქვს:

$$m\ddot{x} = 10(1-t).$$

ვინაიდან  $m = P/g$ , გვექნება:  $\ddot{x} = g(1-t)$ . ამ ტოლობის ინტეგრირებით მივიღებთ:  $\dot{x} = -1/2 \cdot g(1-t)^2 + c_1$ . (ბ)

საწყისი (ა) პირობის თანახმად: როცა  $t_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = v_0$ ; (ბ)-დან მივიღებთ:  $v_0 = -1/2 g + c_1$ ; აქედან:  $c_1 = v_0 + 1/2 g$ . შევიტანოთ (ბ)-ში:

$$\dot{x} = -1/2 g(1-t)^2 + v_0 + 1/2 g. \quad (3)$$

ეს ტოლობა გამოსახავს სხეულის სიჩქარეს დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში.

სხეული ჩერდება  $\tau$  წამის შემდეგ, ე.ი.  $t = \tau$  მომენტში  $\dot{x} = v = 0$ . (გ)-დან გვექნება:  $0 = -1/2 g(1-\tau)^2 + v_0 + 1/2 g$ , საიდანაც

$$\tau = 2.02 \text{ წმ-ს}; \quad (\text{აქ } g = 980 \text{ სმ/წმ}^2)$$

განვლილი  $s$  მანძილის გამ  $10$  ჯად ვაინტეგრირებ (გ) ტოლობა; მივიღებთ:  $x = 1/6 \cdot g(1-t)^3 - v_0 t + c_2$ . (დ)

როცა  $t = t_0 = 0$ , მაშინ  $x = x_0 = 0$ ; (დ)-დან გვექნება  $c_2 = -1/6 g$ ; მაშასადამე:  $x = 1/6 \cdot g(1-t)^3 + (v_0 + 1/2 g)t - 1/6 g$ . (ე)

$t = \tau$  წამში სხეულმა გაიარა  $s$  მანძილი და გაჩერდა. ამიტომ (ე) - დან გვექნება  $s = 1/6 \cdot g(1-\tau)^3 + (v_0 + 1/2 g) \tau - 1/6 g = 692 \text{ სმ}$ .  
 $s = 692 \text{ სმ}$ .

**აშოგანა 1.18.**  $O$  წერტილიდან პორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით და  $v_0$  საწყისი სიჩქარით გატყორცნილია  $m$  მასის ნივთიერი წერტილი.

განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის ტრაექტორია, ტრაექტორიის სიმაღლე ( $H$ ), ტყორცნის სიშორე ( $\ell$ ), ფრენის დრო ( $\tau$ ). ჰაერის წინაღობის ძალა უგულებელყავით.

**შამხსნა.** წერტილის მოძრაობისას მასზე მოქმედებს მხოლოდ ერთი ძალა - მისი სიმძიმის  $\vec{P}$  ძალა. ვინაიდან საწყისი  $\vec{v}_0$  სიჩქარე და

$\vec{P}$  ძალა მდებარეობენ ვერტიკალურ სიბრტყეში, ამიტომ წერტილის მოძრაობაც ამ სიბრტყეში ხდება. გამოვიყვანოთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები.

კოორდინატთა  $Oxy$  სისტემის სათავედ ავირჩიოთ გატყორცნის  $O$  წერტილი და  $x$  ღერძი მივმართოთ პორიზონტის გასწვრივ,  $y$  ღერძი მივმართოთ მის ვერტიკალურად. წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობებია: როცა  $t = t_0 = 0$ , მაშინ:

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \dot{x}_0 = v_x = v_0 \cos \alpha, \dot{y}_0 = v_y = v_0 \sin \alpha. \quad (ა)$$

წერტილის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებებს გვემიღებში ასეთი სახე აქვთ:  $m\ddot{x} = 0, m\ddot{y} = -P$ . ვინაიდან  $P = mg$ , გვექნება:  $\ddot{x} = 0, \ddot{y} = -g$ .

ამ ტოლობების ინტეგრირებით მივიღებთ:  $\dot{x} = c_1, \dot{y} = -gt + c_2$ . (ბ)

ინტეგრირების  $c_1$  და  $c_2$  მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი (ა) პირობებით: როცა  $t_0 = 0$ , გვექნება:  $v_0 \cos \alpha = c_1, v_0 \sin \alpha = c_2$ .

$$(ბ) \text{ ასე ჩაიწერება: } \dot{x} = v_0 \cos \alpha; \quad \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha. \quad (3)$$

$$\text{ვაინტეგრირებთ ეს ტოლობები; მივიღებთ:} \\ x = v_0 t \cos \alpha + c_3; \quad (დ) \\ y = -1/2 g t^2 + v_0 t \sin \alpha + c_4.$$

(ა) საწყისი პირობებიდან, როცა  $t = t_0 = 0$ , (დ)-დან  $x_0 = c_3 = 0, y_0 = c_4 = 0$ ; მაშასადამე (დ) ასე ჩაიწერება:

$$x = v_0 t \cos \alpha; \quad (ე) \\ y = -1/2 g t^2 + v_0 t \sin \alpha.$$

ეს ტოლობები წარმოადგენს რტილის მოძრაობის განტოლებებს. წერტილის ტრაექტორიის დასადგენად მოძრაობის განტოლებებიდან გამოვრიცხოთ დროის  $t$  პარამეტრი; მივიღებთ:

$$y = - (g / 2v_0^2 \cos^2 \alpha) x^2 + x \tan \alpha. \quad (ვ)$$

ტრაექტორია არის პარაბოლა.

დაუშვათ წერტილის პორიზონტალური ტყორცნის სიშორეა  $OA = \ell$  მანძილი და მოძრაობს  $\tau$  წამის განმავლობაში.

$A$  მდებარეობაში:  $t = \tau, x = \ell, y = 0$ ; ამიტომ (ე)-დან მივიღებთ:

$$\ell = v_0 \tau \cos \alpha; \\ 0 = -1/2 g \tau^2 + v_0 \tau \sin \alpha.$$

აქედან მოძრაობის დრო  $\tau = 2v_0/g \cdot \sin \alpha$ , ხოლო წერტილის პორიზონტალური ტყორცნის სიშორე

$$\ell = v_0^2/g \cdot \sin 2\alpha,$$

ფრენის სიმაღლის განსაზღვრისათვის საჭიროა ვიპოვოთ (ვ) ტოლობით მოცემული ფუნქციის მაქსიმუმი; მივიღებთ:

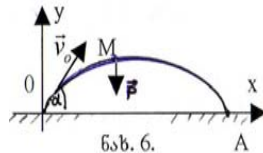
$$v_{\max} = H = v_0^2 \sin^2 \alpha / 2g.$$

**აშოგანა 1.19.**  $m = 200$  გ მასის ნივთიერი წერტილი მუდმივი  $F = 26$  ძალის მოქმედებით მოძრაობს პორიზონტალური  $Ox$  ღერძის გასწვრივ. საწყის მომენტში  $x_0 = 3$  მ,  $v_0 = 4$  მ/წმ. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლება. პასუხი:  $x = (5t^2 + 4t + 3)$  მ.

**აშოგანა 1.20.**  $m$  მასის ნივთიერი წერტილი მოძრაობს პორიზონტალურ  $Oxy$  სიბრტყეში; მასზე მოქმედებს ძალა, რომლის გვემიღებში საკოორდინატო ღერძებზე არიან:  $F_x = am \sin \omega t; F_y = 0$  ( $a, \omega$  - მოცემული მუდმივებია). განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის განტოლებები, თუ საწყის მომენტში:  $x_0 = y_0 = 0; v_{0x} = -a/\omega; v_{0y} = 0$ .

$$\text{პასუხი: } x = -a/\omega \sin \omega t; \quad y = 0.$$

**აშოგანა 1.21.** ავტომანქანა მოძრაობს გზის პორიზონტალურ წრფივ უბანზე  $90$  კმ/სთ სიჩქარით. დროის რომელიმე მომენტში ძრავა



გამორთეს. განსაზღვრეთ ძრავის გამორთვის მომენტიდან გაჩერებამდე ავტომანქანის მიერ განვლილი მანძილი და დრო, თუ მოძრაობისადმი წინაღობა მუდმივია და ავტომანქანის წონის 0,2-ის ტოლია. პასუხი: s = 159 მ; t = 12,7 წმ.

**ამოცანა 1.22.** ელექტრომატარებელი მოძრაობდა გზის ჰორიზონტალურ წრფეზე უბანზე 72 კმ/სთ სიჩქარით. შემანქანებ შეაჩინა რკინისგზის ხაზზე გაჩერებული ტრაქტორი და დაიწყო მატარებლის დამუხრუჭება ძალით, რომელიც მატარებლის წონის 0,05-ის ტოლია. რა მანძილზე ჩართო შემანქანებ მუხრუჭები, თუ მატარებელი გაჩერდა ტრაქტორიდან 5 მ მანძილზე. პასუხი: s = 413 მ.

**ამოცანა 1.23.**  $m = 2$  ნივთიერი წერტილი მოძრაობს კოორდინატთა სისტემის სათავიდან ჰორიზონტალური  $Ox$  ღერძის გასწვრივ და აქვს საწყისი სიჩქარე  $V_0 = 1,5$  მ/წმ. წერტილზე მოქმედებს მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა  $\vec{R} = -k\dot{x}\vec{i}$  (6), სადაც  $k = 6$  ნწმ/მ – დადებითი მუდმივია. განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი. პასუხი:  $x = 1/2 \cdot (1 - e^{-3t})$  მ.

**ამოცანა 1.24.** კატარღა მოძრაობს ტბაზე  $V = 36$  კმ/სთ სიჩქარით. დროის გარკვეულ მომენტში ძრავა გამორთეს და ერთი წუთის შემდეგ კატარღის სიჩქარე 10 - ჯერ შემცირდა. განსაზღვრეთ კატარღის სიჩქარე ორი წუთის შემდეგ, თუ კატარღის მოძრაობისადმი წინაღობის ძალა მისი სიჩქარის პროპორციულია. პასუხი: 0,36 კმ/სთ.

**ამოცანა 1.25.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე სხეული ეშვება თანაბრად. განსაზღვრეთ სხეულის აჩქარება, თუ სიბრტყე დახრილი იქნება ჰორიზონტისადმი  $\beta = 45^\circ$  კუთხით. პასუხი:  $w = 2,93$  მ/წმ<sup>2</sup>.

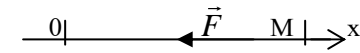
**ამოცანა 1.26.** ქვემეხი მოთავსებულია კოორდინატთა სისტემის სათავეში. ჰორიზონტისადმი როგორი  $\alpha$  კუთხით უნდა გავისროლოთ ჭურვი, რომ მოვახვედროთ მიზანში, რომლის კოორდინატებია  $x = 1$  კმ,  $y = 0,5$  კმ, თუ გასროლისას ჭურვის საწყისი სიჩქარეა  $V_0 = 1000$  მ/წმ. ჰაერის წინაღობა უგულვებელყავით.  $Oy$  ღერძი მიმართულია ზევით. პასუხი:  $\alpha = 26^\circ 50'$ .

**ამოცანა 1.27.** მართვადი რაკეტა 20 კმ სიმაღლეზე ვერტიკალური ასვლის შემდეგ მოძრაობს ისე, როგორც უჰაერო სივრცეში ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 50^\circ$  კუთხით და  $V_0 = 1700$  მ/წმ საწყისი სიჩქარით გასროლილი თავისუფალი სხეული. განსაზღვრეთ რაკეტის ფრენის დრო და სიშორე, აგრეთვე ფრენის სიმაღლე. პასუხი: T = 280 წმ; s = 306 კმ; H = 106,4 კმ.

**ამოცანა 1.28.** ავტომანქანა, რომელიც მოძრაობდა  $V_0 = 16$  მ/წმ სიჩქარით, ძრავის გამორთვის მომენტიდან იწყებს ასვლას ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 15^\circ$  კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f = 0,2$ . ჰაერის წინაღობა უგულვებელყავით და განსაზღვრეთ მანძილი, რომელსაც ავტომანქანა გადის გაჩერებამდე; რა დროა საჭირო ამ გზის გასავლელად? პასუხი: s = 28,9 მ. T = 3,61 წმ.

## § 2. წერტილი 13 ნივთიერი რხევა

$m$  მასის ნივთიერი  $M$  წერტილის წრფივ მოძრაობას  $Ox$  ღერძის გასწვრივ ჰარმონიული (ანუ თავისუფალი) რხევა ეწოდება, თუ მასზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი ძალა  $F = c \cdot x$ . აქ  $x = OM$  ( $O$  – წერტილის წონასწორობის მდგომარეობა)  $c$  - სიხისტის (დრეკადობის) კოეფიციენტი. გარემოს წინაღობა უგულვებელყოფილია.

რხევის დიფერენციალური განტოლება:  $\ddot{x} + k^2x = 0$ , ( $k^2 = c/m$ )  ნახ.7 (2.1)

რხევის საწყისი პირობები: როცა  $t_0 = 0$ , მაშინ  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = V_0$ . (2.2)

რხევის განტოლება:  $x = x_0 \cos kt + V_0/k \cdot \sin kt$ ; (2.3)

ან  $x = a \sin(kt + \alpha)$ . (2.4)

$a$  – რხევის ამპლიტუდაა:  $a = \sqrt{x_0^2 + V_0^2/k^2}$ . (2.5)

$(kt + \alpha)$  – რხევის ფაზა.  $\alpha$  - რხევის საწყისი ფაზა:  $\operatorname{tg} \alpha = kx_0/V_0$ ;

$k$  – რხევის კუთხური სიხშირე;

$T = 2\pi/k = 2\pi \sqrt{m/c}$  (2.6) - რხევის პერიოდი.

$\nu = 1/T$  - რხევის სიხშირე, ანუ რხევათა რიცხვი ერთ წამში.

**მითითება.** ჰარმონიულ რხევაზე ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შესრულდეს შემდეგი თანამიმდევრობით:

- 1) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით ნივთიერი წერტილის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში;
- 2) ჩავწეროთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის საწყისი პირობები;
- 3) ნახაზზე გამოვსახოთ ნივთიერ წერტილზე მოქმედი აქტიური და ბმის რეაქციის ძალები;
- 4) შევადგინოთ ნივთიერი წერტილის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება შესაბამის ღერძზე გეგმილებში;
- 5) მოვახდინოთ ამ დიფერენციალური განტოლების ინტეგრება; ინტეგრების მუდმივების განსაზღვრისათვის გამოვიყენოთ რხევის საწყისი პირობები.

**ამოცანა 2.1.** ვერტიკალური ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებული  $P$  წონის ტვირთის მოქმედებით ზამბარის სტატიკური დეფორმაცია  $\delta_{\text{ტვ}} = 10$  სმ. ტვირთი გადასწიეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან  $x_0 = 15$

სმ მანძილზე და მიანიჭეს ვერტიკალურად ქვევით მიმართული სიჩქარე  $V_0 = 99$  სმ/წმ. შეადგინეთ ტვირთის რხევის განტოლება, თუ  $0x$  ღერძი მიმართულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ქვევით.

**ამოხსნა** გამოვხაზოთ ვერტიკალურად დაკიდებული ზამბარის სამი პოზიცია: ა) ზამბარას საწყისი

არადეფორმირებული მდგომარეობა.

ბ) ზამბარის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობა-ზამბარის ბოლოზე  $P$  წონის ტვირთის დაკიდების შედეგად ზამბარამ განიცადა დეფორმაცია და დაგრძელდა  $\delta_{სტ}$  მანძილით.  $P = c\delta_{სტ}$ , სადა  $c$  - ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტი.

გ) ზამბარისა და მასზე დაკიდებული ტვირთის მდგომარეობა ტვირთის მოძრაობის მიმდინარე მდებარეობაში, როდესაც იგი გადაწეულია სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან  $x$  მანძილზე.

კოორდინატა სისტემის სათავე მოვათავსოთ ტვირთის დაკიდვის  $O$  წერტილში, როდესაც ტვირთი იმყოფება სტატიკურ წონასწორობაში.  $0x$  ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

ტვირთზე მოქმედებს ორი ძალა: ტვირთის  $P$  წონა, მიმართული ქვევით და ზამბარის დრეკადობის  $\vec{F}$  ძალა, მიმართული ზევით. რადგანაც ზამბარა მთლიანად დაგრძელდა  $(x + \delta_{სტ})$  მანძილზე, ამიტომ  $F = c(x + \delta_{სტ})$ .

ტვირთის მოძრაობის საწყისი პირობებია:

$$\text{როცა } t = t_0 = 0, \text{ მაშინ } x = x_0, V = \dot{x}_0 = V_0. \quad (\text{ა})$$

ტვირთი მოძრაობს გადატანითად, ამიტომ იგი შეიძლება ჩავთვალოთ ნივთიერ წერტილად. ტვირთის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{F}.$$

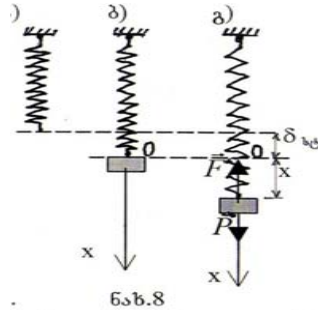
ამ ტოლობის  $x$  ღერძზე დაგეგმილებით მივიღებთ:  $m\ddot{x} = P - F$ , ანუ  $m\ddot{x} = c\delta_{სტ} - c(x + \delta_{სტ})$ ; აქედან, ტვირთის თავისუფალი რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \text{ სადაც } k^2 = c/m. \quad (\text{ბ})$$

ამ დიფერენციალური განტოლების ამოხსნას (ა) საწყისი პირობებით ასეთი სახე აქვს (იხ. 2.3 ფორმულა):  $x = x_0 \cos kt + V_0/k \cdot \sin kt$ ;

ამოცანის პირობის თანახმად:

$$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{g/\delta_{სტ}} = \sqrt{980/10} = 9,9; V_0/k = 10.$$



ნახ.8

რხევის განტოლება იქნება:  $x = (15 \cos 9,9t + 10 \sin 9,9t)$  სმ.

$$x = (15 \cos 9,9t + 10 \sin 9,9t) \text{ სმ.}$$

**ამოცანა 2.2.**

$P$  წონის ტვირთი დაკიდებულია ერთმანეთთან მიმდევრობით შეერთებული სხვადასხვა  $c_1$  და  $c_2$  სიხისტის კოეფიციენტებიანი ორმაგი ზამბარის ბოლოზე (იხ. ნახ. 9 ა).

განსაზღვრეთ ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური ზამბარის სიხისტის  $c$  კოეფიციენტი ოა  $P$  ტვირთის ვერტიკალური რხევის სიხშირე.  $15$  ას წონა უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა.** ვთქვათ  $P$  ტვირთის მოქმედებით  $c_1$  სიხისტის ზამბარამ მიიღო  $\delta_1$ , ხოლო  $c_2$  სიხისტის ზამბარამ  $\delta_2$  სტატიკური დაგრძელება.

ზამბარების წონა უგულებელყოფილია, ამიტომ  $\delta_1 = P/c_1$  და  $\delta_2 = P/c_2$ .

ამ ორმაგი ზამბარის ეკვივალენტური  $c$  სიხისტის ზამბარას სტატიკური დეფორმაცია იქნება  $\delta = \delta_1 + \delta_2$ , სადაც  $\delta = P/c$ . მივიღებთ  $P/c = P/c_1 + P/c_2$ .

$$\text{აქედან } c = c_1 c_2 / (c_1 + c_2).$$

$$P \text{ ტვირთის რხევის პერიოდი: } T = 2\pi \sqrt{m/c} = 2\pi \sqrt{(c_1 + c_2)P / g c_1 c_2};$$

$$\text{რხევის სიხშირე: } \nu = 1/T = 1/2\pi \sqrt{g c_1 c_2 / (c_1 + c_2) P}.$$

**ამოცანა 2.3.**

$P = 10$  ნ წონის ტვირთი საწყისი სიჩქარის გარეშე ვარდება  $h = 9$  სმ სიმალიდან და ეცემა ვერტიკალურ ზამბარაზე მიმაგრებულ ჰორიზონტალურ ფირფიტაზე. ზამბარის ქვედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული და მისი სიხისტის კოეფიციენტი  $c = 5$  ნ/სმ. განსაზღვრეთ ტვირთის შემდგომი მოძრაობის კანონი თუ ფირფიტისა და ზამბარის მასა უგულებელყოფილია.

**ამოხსნა.** ტვირთი ფირფიტაზე დაცემის შემდეგ იწყებს რხევით მოძრაობას. რხევის საწყისი სიჩქარე

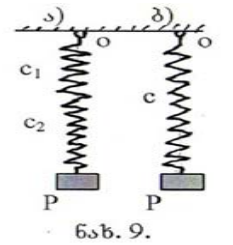
იქნება ტვირთის სიჩქარე ფირფიტაზე დაცემის მომენტში.

$h$  სიმალიდან საწყისი სიჩქარის გარეშე თავისუფლად ვარდნილი სხეულის სიჩქარე დაცემის

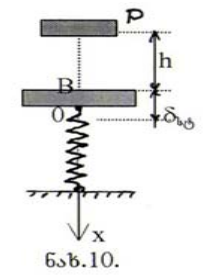
$B$  წერტილში გამოითვლება ფორმულით:

$$V_B = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 980 \cdot 9} = 42\sqrt{10} \text{ სმ/წმ.}$$

რხევა წარმოებს  $\vec{P}$  ძალის მოქმედებით. ზამბარის სტატიკური გადაადგილება  $\delta_{სტ} = P/c = 2$  სმ.



ნახ. 9.



ნახ.10.

კორდინატთა სისტემის სათავე მოვითავსოთ ტვირთის სტატიკური წონასწორობის 0 წერტილში და მივმართოთ 0x ღერძი ქვევით. რხევის საწყისი პირობებია:

როცა  $t = t_0 = 0$ , მაშინ  $x_0 = -\delta_{სტ} = -2$  სმ;  $V_0 = V_B = 42 \sqrt{10}$  სმ/წმ.

რხევის კუთხური სიხშირე  $k = \sqrt{c/m} = \sqrt{cg/P} = 7\sqrt{10}$ ;  $V_0/k = 6$ .

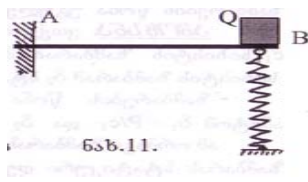
(2.3) ფორმულის თანახმად რხევის კანონი ასეთ სახეს იღებს:

$x = (-2\cos 7\sqrt{10}t + 6\sin 7\sqrt{10}t)$  სმ.

**ამოცანა 2.4.**

არადეფორმირებული დრეკადი AB ღეროს A ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო B ბოლო მიმაგრებულია ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტიცაა  $c_1 = 6$  ნ/სმ. ღეროს B ბოლოზე ათავსებენ  $Q = 30$  ნ წონის ტვირთს და უშვებენ საწყისი სიჩქარის გარეშე. ცნობილია,

რომ  $P = 12$  ნ ტვირთის სტატიკური მოქმედებისას ღეროს B ბოლო ზამბარის გარეშე დაიწვეს  $s = 1$  სმ-ზე. განსაზღვრეთ ზამბარის მაქსიმალური შეკუმშვა და ტვირთის რხევის პერიოდი. ღეროს და ზამბარის წონა უგულებელყავით.



**ამოხსნა.**

დრეკადი AB ღერო შევცვალოთ B წერტილში დამაგრებული მეორე ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტიცაა  $c_2$ . ამოცანის პირობის თანახმად  $P = c_2 s$ , საიდანაც  $c_2 = P/s = 12$  ნ/სმ. ამ შემთხვევაში შეგვიძლია ვივულისხმოთ, რომ ტვირთი ეყრდნობა ერთი და იმავე სიგრძის ორ პარალელურად ჩართულ  $c_1$  და  $c_2$  სიხისტის კოეფიციენტებიან ზამბარას (იხ. ნახ. 12). ეს ორმაგი ზამბარა შევცვალოთ მათი ეკვივალენტური ერთი ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტიცაა  $c$ .

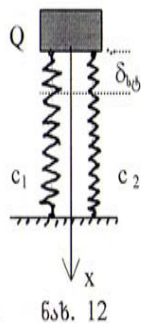
$c$  - ს განსაზღვრისათვის განვიხილოთ  $Q$  ტვირთის სტატიკური წონასწორობის პირობა. მხედველობაში

მივიღოთ, რომ  $Q$  ტვირთის მოქმედებით ორივე ზამბარა და მაშასადამე მათი ეკვივალენტური ზამბარაც შეიკუმშება ერთი და იგივე  $x$  მანძილით ( $x = x_1 = x_2$ ). ამასთანავე, ორმაგ ზამბარებში წარმოიქმნება დრეკადი აღმდგენი  $Q_1$  და  $Q_2$  ძალები, რომელთა სიდიდეების ჯამი ეკვივალენტური  $c$  სიხისტის ზამბარაში  $Q$  ტვირთით გამოწვეული დრეკადი აღმდგენი ძალის ტოლია. ცხადია:

$Q = cx$ ;  $Q_1 = c_1 x$ ;  $Q_2 = c_2 x$ .  $Q = Q_1 + Q_2$ .

მაშასადამე  $cx = c_1 x + c_2 x$ , საიდანაც  $c = c_1 + c_2$  ნ/სმ.

$Q$  ტვირთის სტატიკური გადაადგილება



ნახ. 12

$\delta_{სტ} = x = Q/c = 5/3$  სმ.

კორდინატთა სისტემის სათავე მოვითავსოთ ზამბარის სტატიკური წონასწორობის 0 წერტილში და  $x$  ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

$c$  სიხისტის (ეკვივალენტური) ზამბარის რხევის საწყისი პირობებია

$t = t_0 = 0$ ,  $x_0 = -\delta_{სტ} = -5/3$ ,  $V_0 = 0$ .

რხევის კუთხური სიხშირე

$k = \sqrt{c/m} = \sqrt{cg/Q} = \sqrt{18 \cdot 980/30} = 24,25$ .

ტვირთის რხევის განტოლება ასეთია (იხ. (2.3) განტოლება):

$x = -5/3 \cos 24,25t$  სმ.

აქედან:  $x_{max} = 5/3$  სმ. რხევის პერიოდი:  $T = 2\pi/k = 0,259$  წმ.

**ამოცანა 2.5.**

ზამბარაზე დაკიდებული  $P = 9,8$  ნ წონის ტვირთის ვერტიკალური რხევის პერიოდი 17 იპოვეთ ამ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი  $c$ .

**ამოცანა 2.6.**

ზედა ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული ზამბარის თავისუფალ ბოლოზე დაკიდებული 4,9 ნ წონის ტვირთის თავისუფალი რხევის პერიოდი  $\pi/4$  წმ. განსაზღვრეთ ძალა, რომლის მოქმედებითაც ზამბარა დაგრძელდება 1 სმ-ით.

**ამოცანა 2.7.**

ვერტიკალური ზამბარის ზედა ბოლო უძრავად არის ჩამაგრებული, ხოლო ქვედა ბოლოზე მიმაგრებული ტვირთი ასრულებს რხევით მოძრაობას  $x = 10 \sin 7t$  სმ კანონით. განსაზღვრეთ ზამბარის სტატიკური დეფორმაცია. პასუხი:  $\delta_{სტ} = 20$  სმ.

**ამოცანა 2.8.**

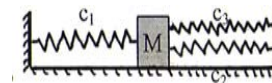
$c = 4$  ნ/მ სიხისტის ვერტიკალურ ზამბარაზე დაკიდებულია  $m = 16$  კგ მასის ტვირთი. წონასწორობის მდგომარეობიდან ტვირთს გადაადგილებენ ქვევით 8 სმ მანძილზე და ანიჭებენ საწყის სიჩქარეს ვერტიკალის გასწვრივ. როგორი უნდა იყოს საწყისი  $V_0$  სიჩქარის სიდიდე, რომ ტვირთის შემდგომი ჰარმონიული რხევის ამპლიტუდა იყოს  $a = 10$  სმ? პასუხი:  $V_0 = 3$  სმ/წმ.

**ამოცანა 2.9.**

ზამბარაზე დაკიდებული  $m = 1$  კგ მასის ნივთიერი წერტილი ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას კანონით:  $x = 2 \sin(kt + 1)$  სმ ( $t$  - წმ-ში). ცნობილია წერტილის მაქსიმალური სიჩქარე  $V_{max} = 4$  სმ/წმ. განსაზღვრეთ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი  $c$ . პასუხი:  $c = 4$  ნ/სმ.

**ამოცანა 2.10.**

$m$  მასის  $M$  სხეულზე მიმაგრებულია სამი ჰორიზონტალური ზამბარა, რომელთა სიხისტეა შესაბამისად  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ . ხახუნის უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ტვირთის რხევის პერიოდი.



ნახ. 13.

პასუხი:  $T = 2\pi\sqrt{m / (c_1 + 2c_2)}$  წმ.

### § 3. წერტილის მიღვევადი რხევა

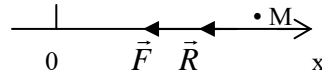
m მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობას Ox ღერძის გასწვრივ ეწოდება *მიღვევადი რხევა*, თუ მასზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი ძალა  $F = cx$  და განიცდის გარემოს წინაღობას ძალით, რომელიც წერტილის მოძრაობის სიჩქარის წრფივი ფუნქციაა:  $R = \mu V$  ( $\mu$  - გარემოს წინაღობის კოეფიციენტი).

რხევის დიფერენციალური განტოლება:

$$m\ddot{x} = -cx - \mu \dot{x},$$

ანუ  $\ddot{x} + 2b\dot{x} + k_1x = 0,$  (3.1)

სადაც  $k^2 = c/m;$   $2b = \mu/m.$  (3.2)



ნახ. 14.

რხევის საწყისი პირობები: როცა  $t = t_0 = 0,$  მაშინ  $x = x_0,$   $\dot{x} = V_0.$  (3.3)

შეიძლება განვიხილოთ მოძრაობის სამი შემთხვევა.

1)  $b < k$  - გარემოს წინაღობა მცირეა. ამ შემთხვევაში ნივთიერი წერტილი ასრულებს მიღვევად რხევას და მოძრაობის (3.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს (რხევის განტოლებას) აქვს შემდეგი სახე:

$$x = e^{-bt} [x_0 \cos k_1 t + (V_0 + bx_0) / k_1 \cdot \text{Sink}_1 t].$$
 (3.4)

ანუ ასეთი სახე:  $x = a e^{-bt} \text{Sin}(k_1 t + \alpha),$  (3.5)

სადაც  $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2},$  ( $b < k$ ); (3.6)

რხევის ამპლიტუდა:  $A = a e^{-bt},$  სადაც  $a = \sqrt{x_0^2 + (V_0 + bx_0)^2 / k_1^2};$  (3.7)

რხევის საწყისი ფაზა  $-\alpha,$  სადაც  $\text{tg}\alpha = k_1 x_0 / (V_0 + bx_0);$  (3.8)

რხევის პერიდი:  $T_1 = 2\pi / k_1;$  (3.9)

როცა  $t \rightarrow \infty,$  მაშინ  $x \rightarrow 0.$  ამიტომ რხევას ეწოდება *მიღვევადი*.

დროის მომენტები, რომლებშიც წერტილი იღებს მაქსიმალურ გადახრას კოორდინატთა სათავიდან (წონასწორობის მდგომარეობიდან), შეადგენენ არითმეტიკულ პროგრესიას  $T_1/2$  სხვაობით. მიღვევადი რხევის ამპლიტუდა ადგენს კლებად გეომეტრიულ პროგრესიას, რომლის მნიშვნელს მიღვევადი რხევის დეკრემენტი ეწოდება და ასე აღინიშნება:  $\lambda = e^{-bT_1/2}$ .

სიდიდეს  $d = \ln \lambda = bT_1/2$  (3.10) - რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი ეწოდება; ეს არის ორი თანამიმდევრული ამპლიტუდის ფარდობის ლოგარითმი.

მიღვევადი რხევის გრაფიკი მოცემულია ნახ. 15-ზე.

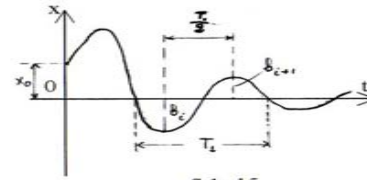
2)  $b > k$  - გარემოს წინაღობა დიდია. მოძრაობის (3.1) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ასეთი სახე აქვს:

$$x = e^{-bt} (c_1 e^{\sqrt{b^2 - k^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{b^2 - k^2} t}).$$

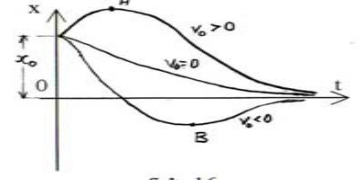
აქ  $c_1$  და  $c_2$  - ინტეგრების მუდმივებია.

წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მიღვევად რხევას: როცა  $t \rightarrow \infty,$  მაშინ  $x \rightarrow 0.$

3)  $b = k$  - “ზღვრული“ შემთხვევა. მოძრაობის (3.1) განტოლების



ნახ. 15.



ნახ. 16.

ამონახსნს აქვს ასეთი სახე:  $x = e^{-bt} (c_1 + c_2 t).$

ამ შემთხვევაში წერტილი ასრულებს აპერიოდულ მიღვევად რხევას.

როგორც 2), ასევე 3) შემთხვევაში მოძრაობის ხასიათი დამოკიდებულია საწყისი პირობებზე. საწყისი  $V_0$  სიჩქარეზე დამოკიდებულებით მოძრაობის გრაფიკს აქვს ნახ. 16-ზე გამოსახული სახე; სამივე შემთხვევაში ( $V_0 > 0, V_0 = 0, V_0 < 0$ ) მოძრაობა მალე ქრება.

**შეიშინება:** მიღვევად რხევაზე ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია იგივე თანამიმდევრობით, როგორც ჰარმონიული (თავისუფალი) რხევის დროს.

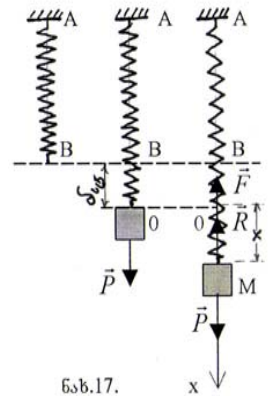
#### ამოცანა 3.1.

$P = 4,9$  კგ წონის სხეული ჩამოკიდებულია ერთი ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებულ ზამბარაზე, რომლის სტატიკური დაგრძელება ( $\delta_{სტ}$ ) ამ სხეულის წონის მოქმედებით უდრის 1 სმ-ს. ტვირთის მოძრაობისას ჰაერის წინაღობის ძალა მისი  $V$  სიჩქარის პროპორციულია და  $V = 1$  მ/წმ სიჩქარის დროს უდრის 0,1 კგ-ს. განსაზღვრეთ ტვირთის მოძრაობის კანონი, თუ დასაწყისში ზამბარა გაჭიმული იყო  $2\delta_{სტ}$  მანძილზე და ტვირთი მიშვებული იყო ნებაზე.

#### ამოხსნა

სხეული მოძრაობს გადატანითად და შეგვიძლია იგი ჩავთვალოთ ნივთიერ M წერტილად. გამოვსახოთ წერტილის მიმდინარე მდებარეობა და მასზე მოქმედი ძალები:  $\vec{P}$  - ტვირთის წონა,  $\vec{F}$  - ზამბარის დრეკადობის ძალა,  $\vec{R}$  - ჰაერის წინაღობის ძალა.

კოორდინატთა სისტემის სათავედ ავირჩიოთ ტვირთის (M წერტილის) სტატიკური



ნახ. 17.

წონასწორობის 0 მდებარეობაში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

AB – არადეფორმირებადი ზამბარის სიგრძეა.  $B0 = \delta_{\text{სტ}}$  – ზამბარას სტატიკური

დაგრძელება.  $0M = x$  – ტვირთის მიმდინარე მდებარეობა. M წერტილის მოძრაობის განტოლებას ნებისმიერ მდებარეობაში ასეთი სახე აქვს:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R}.$$

დავაგვიძლიოთ x ღერძზე:  $m \ddot{x} = P_x + F_x + R_x,$

სადაც  $P_x = P;$   $F_x = -c \cdot BM = -c(x + \delta_{\text{სტ}});$

$$R_x = -\mu V_x = -\mu \dot{x}.$$

გვექნება:  $m \ddot{x} = P - c(x + \delta_{\text{სტ}}) - \mu \dot{x}.$  (ა)

ვინაიდან სტატიკური წონასწორობის (0) მდებარეობაში  $P = c\delta_{\text{სტ}},$

ამიტომ (ა) ასეთ სახეს მიიღებს:  $m \ddot{x} = -cx - \mu \dot{x}.$

ეს არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, რომელიც ასე ჩავწერთ:  $\ddot{x} + 2b \dot{x} + 20$  (ბ)

სადაც  $b = \mu/2m;$   $k^2 = c/m.$

(ბ) დიფერენციალური განტოლების ამოხსნით მივიღებთ [იხ. (3.1) განტოლების (3.4) ამოხსნა]:

$$x = e^{-bt} [x_0 \text{Cos} k_1 t + (V_0 + bx_0) / k_1 \cdot \text{Sink}_1 t].$$
 (გ)

სადაც  $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2},$  ( $b < k$ ).

განვსაზღვროთ (გ) ტოლობაში შემავალი სიდიდეები.

ამოცანის პირობის თანახმად  $\delta_{\text{სტ}} = 1$  სმ. წინაღობის ძალა  $R = \mu V$  და როცა  $V = 1$  მ/წმ  $= 100$  სმ/წმ, მაშინ  $R = 0,1$  კგ. ამიტომ

$$\mu = R / V = 0,1 / 100 = 0,001 \text{ კგ წმ} / \text{სმ};$$

$$b = \mu / 2m = \mu g / 2P = 0,001 \cdot 980 / 9,8 = 0,1;$$

$$k_1 = \sqrt{c / m - b^2} = \sqrt{4,9 \cdot 980 / 4,9 - 0,01} = 31,3.$$

საწყისი პირობების თანახმად: როცა  $t_0 = 0,$  მაშინ  $x_0 = \delta_{\text{სტ}} = 1,$   $V_0 = 0;$  ამიტომ  $(V_0 + bx_0) / k_1 = 0,1 / 31,3 = 0,32.$

მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (გ) განტოლებაში, მივიღებთ M ტვირთის მოძრაობის კანონს:

$$x = e^{-0,1t} (\text{Cos} 31,3t + 0,32 \text{ Sin} 31,3t) \text{ სმ}.$$

**ამოცანა 3.2.**  $P = 4,96$  წონის,  $r = 6$  სმ რადიუსის და  $h = 8$  სმ

სიმაღლის ცილინდრი ჩამოკიდებულია A ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული AB ზამბარის თავისუფალ B ბოლოზე. ზამბარის დრეკადობის კოეფიციენტი  $c = 46$  სმ.

ცილინდრი ჩაშვებულია სითხეში და სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში ჩაყვინთულია თავისი სიმაღლის ნახევარზე.

ცილინდრი გამოიყვანეს სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან, ჩაძირეს თავისი სიმაღლის 2/3 ნაწილზე და გაუშვეს

საწყისი სიჩქარის გარეშე. განსაზღვრეთ ცილინდრის ვერტიკალური მოძრაობის კანონი, თუ მასზე მოქმედებს სითხის წინაღობის ძალა (R), რომელიც ცილინდრის მოძრაობის სიჩქარის პროპორციულია, ე.ი.  $R = \mu V;$  ( $\mu = 0,02$ ).

განსაზღვრეთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი.

**ამოხსნა** ცილინდრი ასრულებს ვერტიკალურ გადატანით მოძრაობას; მივიღოთ იგი ნივთიერ წერტილად. სტატიკური წონასწორობის

მდგომარეობაში (ნახ. 18. ა) ცილინდრზე მოქმედებს ცილინდრის P წონა, რომელიც გაწონასწორებულია ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალით  $F = c\delta_{\text{სტ}}$  (აქ  $\delta_{\text{სტ}} = h/2 -$  ზამბარის სტატიკური დაგრძელება) და სითხეში ჩაშვებული სხეულის ამომგდები არქიმედის ძალით  $P_s = \pi r^2 \gamma / 2$  (აქ  $\gamma$  - სითხის კუთრი წონაა), ე.ი.  $P = F + P_s,$

$$\text{ანუ } P = c\delta_{\text{სტ}} + \pi r^2 \gamma / 2$$

ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით ცილინდრის 0 ცენტრში სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობაში და x ღერძი მივმართოთ ვერტიკალურად ქვევით.

განვიხილოთ დროის რაიმე t მომენტი, როდესაც ცილინდრი გადაადგილდება ქვევით x მანძილზე. ამ მდებარეობაში ცილინდრზე მოქმედებს: სიმძიმის  $\vec{P}$  ძალა, ზამბარის დრეკადობის ძალა  $F = c(x + \delta_{\text{სტ}}),$  არქიმედეს ამომგდები ძალა  $P_s = \pi r^2 \gamma (h/2 + x)$  და სითხის წინაღობის ძალა  $\vec{R} = \mu \vec{v}.$  ცილინდრის მოძრაობის განტოლება ვექტორული სახით ასეთია:

$$m \vec{w} = \vec{P} + \vec{F} + \vec{P}_s + \vec{R}.$$

დავაგვიძლიოთ ეს ტოლობა x ღერძზე; მივიღებთ სითხეში ჩაშვებული ცილინდრის რხევის დიფერენციალურ განტოლებას:

$$m \ddot{x} = P_x - F_x - P_s - R_x,$$

ანუ  $P/g \cdot \ddot{x} = c\delta_{\text{სტ}} + \pi r^2 h \gamma / 2 - c(x + \delta_{\text{სტ}}) - \pi r^2 \gamma (h/2 + x) - \mu \dot{x};$

ეს განტოლება ასე გადავწერთ:

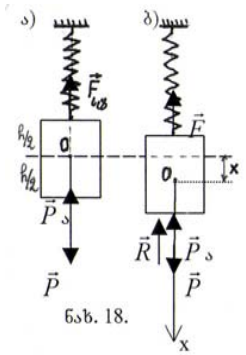
$$\ddot{x} + 2b \dot{x} + k^2 x = 0, \quad (ბ)$$

აქ  $b = \mu g / 2P;$   $k^2 = g(c + \pi r^2 \gamma) / P.$  (გ)

დავადგინოთ პირობა, როდესაც ცილინდრის მოძრაობა იქნება რხევითი; ამისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:  $b < k,$  ანუ  $b^2 - k^2 < 0.$  გვექნება:

$$(\mu g / 2P)^2 - g(c + \pi r^2 \gamma) / P < 0.$$

ამ პირობის შესრულებისას ცილინდრი შეასრულებს მიღებულ რხევას და მისი განტოლება იქნება (იხ. (3.1) განტოლების (3.5) ამოხსნა):



$$x = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha),$$

რხევის საწყისი პირობებია: როცა  $t_0=0$ , მაშინ  $x_0=h/6$ ;  $V_0=\dot{x}_0=0$ .

ამ პირობების და (3.6) – (3.8) ფორმულების გამოყენებით განისაზღვრებიან  $a$ ,  $b$ ,  $k_1$  და  $\alpha$  სიდიდეები.

**ამოცანა 3.3.** ნივთიერი წერტილის მიღევადი რხევა წარმოებს  $0x$  ღერძის გასწვრივ. რხევის პერიოდი  $T_1 = \pi/2$ , ხოლო ლოგარითმული დეკრემენტი  $d = \pi/10$ . განსაზღვრეთ წერტილის მოძრაობის კანონი, თუ საწყის  $t_0 = 0$  მომენტში  $x_0 = 3$  სმ,  $V_0 = 0$ .

**ამონსნა.** მიღევადი რხევის პერიოდი  $T_1 = 2\pi/k_1$ ; ამოცანის პირობის თანახმად  $2\pi/k_1 = \pi/2$ ; აქედან  $k_1 = 4$ . მიღევადი რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი  $d = bT_1/2$ ; მაშასადამე  $bT_1/2 = \pi/10$  და  $b = 0,4$ . მიღევადი რხევის განტოლებას ასეთი სახე აქვს (იხ. (3.4) განტოლება)

$$x = e^{-bt} (x_0 \cos k_1 t + (V_0 + b x_0) / k_1 \cdot \sin k_1 t).$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები და გავითვალისწინოთ საწყისი პირობები; მივიღებთ:

22

$$( \cos 4t + 0,1 \sin 4t ) \text{ სმ.}$$

**ამოცანა 3.4.**  $P = 9,8$  ნ წონის სხეული ასრულებს მიღევად რხევას წინაღობის ძალის მოქმედებით, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია. რხევის პერიოდია  $T_1 = 0,25$  წმ, ხოლო ლოგარითმული დეკრემენტი  $d = 1/2$ . განსაზღვრეთ გარემოს წინაღობის ძალა, როცა  $V = 1$  სმ/წმ.

$$\text{პასუხი: } R = 0,08 \text{ ნ.}$$

**ამოცანა 3.5.**  $m = 2$  კგ მასის და  $\ell = 0,49$  მ სიგრძის მათემატიკური ქანქარა ასრულებს მცირე მიღევად რხევას გარემოში, რომლის წინაღობა სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია. რხევის პერიოდია  $T_1 = \pi/2$  წმ. განსაზღვრეთ გარემოს წინაღობის ძალასა და სიჩქარეს შორის დამოკიდებულების პროპორციულობის (წინაღობის) კოეფიციენტი. მიიღეთ, რომ  $g = 9,8$  მ/წმ<sup>2</sup>.  
პასუხი 8 წმ/მ.

**ამოცანა 3.6.**  $P = 1$  ნ წონის ნივთიერი წერტილი ასრულებს მიღევად რხევას, რომლის პერიოდია  $T_1 = 0,102$  წმ. რამდენჯერ შემცირდება რხევის ამპლიტუდა, როდესაც წერტილი შეასრულებს ორ სრულ რხევას, თუ 1 სმ/წმ სიჩქარის დროს წინაღობის ძალა  $R = 0,02$  ნიუტონს?

$$\text{პასუხი: } e^2.$$

**ამოცანა 3.7.** წერტილის სამი სრული რხევის შედეგად მისი ამპლიტუდა შემცირდა 10-ჯერ. განსაზღვრეთ რხევის ლოგარითმული დეკრემენტი.  
პასუხი:  $d = 0,3838$ .

**ამოცანა 3.8.**  $P = 49$  ნ წონის სხეული დაკიდებულია ერთი ბოლოთი უძრავად ჩამაგრებული და  $c = 1,25$  ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარაზე. მოძრაობისას ზამბარა განიცდის გარემოს წინაღობას, რომელიც სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის  $0,5$  ნ-ს, როცა  $V = 1$  სმ/წმ. საწყის მომენტში ზამბარა გაჭიმულია წონასწორობის მდგომარეობიდან 3 სმ-ით და სხეულს მინიჭებული აქვს ქვევით მიმართული 6 სმ/წმ სიჩქარე. განსაზღვრეთ სხეულის მოძრაობის კანონი.

$$\text{პასუხი: } x = 3e^{-5t} (1+7t) \text{ სმ.}$$

**ამოცანა 3.9.** რამდენჯერ მეტია მიღევადი რხევის პერიოდი ( $T_1$ ) შესაბამისი ჰარმონიული რხევის პერიოდზე ( $T$ ), თუ ლოგარითმული დეკრემენტი  $d = 5\pi/12$  ?  
პასუხი:  $T_1 = 13/12 \cdot T$ .

## § 4. წერტილის იძულებითი რხევა

23

ნივთიერი  $M$  წერტილის  $v, \sigma, \sigma$  ძრაობას, როდესაც წერტილზე დრეკადი აღმდგენი ( $F = cx$ ) ძალისა და გარემოს წინაღობის ( $R = \mu v$ ) ძალის გარდა მოქმედებს რაიმე გარეშე შემაშფოთებელი პერიოდულად ცვალებადი ( $Q = H \sin pt$ ) ძალა, ეწოდება *იძულებითი რხევა*.

თუ მოძრაობა ხდება  $0x$  ღერძის გასწვრივ, მაშინ  $Q$  არის შემაშფოთებელი ძალის გეგმილი ამ ღერძზე;  $p$  - შემაშფოთებელი ძალის სიხშირეა,  $H$  - შემაშფოთებელი ძალის უდიდესი მნიშვნელობა.

$M$  წერტილის მოძრაობის (იძულებითი რხევის) დიფერენციალური განტოლება ჩაიწერება ასე:

$$m \ddot{x} = -cx - \mu \dot{x} + H \sin pt, \quad (4.1a)$$

$$\text{ანუ } \ddot{x} + 2b \dot{x} + k^2 x = h \sin pt; \quad (4.1)$$

$$\text{სადაც } b = \mu / 2m; \quad k^2 = c / m; \quad h = H / m. \quad (4.2)$$

$$1) \text{ გარემოს მცირე წინაღობის შემთხვევაში, როცა } k > b, \quad (4.1)$$

დიფერენციალური განტოლების ზოგადი ამონახსნი, ანუ იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:

$$x = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha) + h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \cdot \sin(pt + \beta), \quad (4.3)$$

სადაც  $\beta$  - იძულებითი რხევის საწყისი ფაზაა,

$$\text{tg } \beta = -2bp / (k^2 - p^2). \quad (4.4)$$

$$(4.3) \text{ ტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი შესაკრები}$$

$$x_1 = a e^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha)$$

წარმოადგენს მიღევად რხევას  $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$  სიხშირით, რომელიც დროის ზრდასთან ერთად მცირდება, ხოლო მეორე შესაკრები

$$x_2 = h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \cdot \sin(pt + \beta) \quad (4.5)$$

განსაზღვრავს წერტილის რხევას შემაშფოთებელი ძალის გავლენით; მას იძულებითი რხევა ეწოდება.

ა და  $\alpha$  განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით.

იძულებითი რხევის ამპლიტუდა

$$A = h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \quad (4.6)$$

2) თუ არ არსებობს გარემოს მცირე წინაღობა,  $R = 0$  და, მაშასადამე  $b = 0$ . ამ შემთხვევაში იძულებითი რხევის დიფერენციალური განტოლება დებულობს შემდეგ სახეს (იხ. (4.1)):

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin pt, \quad (4.7)$$

როცა  $k \neq p$ , მისი ზოგადი ამონახსნი იქნება (იხ. (4.3))

$$x = a \sin(kt + \alpha) + h / (k^2 - p^2) \cdot \sin pt. \quad (4.8)$$

აქ  $x_2 = h / (k^2 - p^2) \cdot \sin pt$  - იძულებითი რხევის კანონია, ხოლო იძულებითი რხევის ამპლიტუდა  $A = h / (k^2 - p^2)$ . (4.9)

თუ შემაშფოთებელი ძალა რხევით ზრდის სიხშირეს, მაშინ კრიტიკულ მომენტში, როცა  $p = k$  თი რხევის ამპლიტუდა ხდება უსასრულოდ დიდი ( $A \rightarrow \infty$ ). ასე სიხშირეს რეზონანსი ეწოდება. რეზონანსის შემთხვევაში (4.7) დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ასე წარმოიადგინება:  $x = a \sin(kt + \alpha) - ht/2k \cos kt$ . (4.10)

მაშასადამე, რეზონანსის შემთხვევაში იძულებითი რხევის ამპლიტუდა  $A = -ht/2k$  დროის ფუნქციაა და  $t$  დროის ზრდასთან ერთად უსასრულოდ იზრდება.

სიდიდეს  $\lambda = Ac/H$ , რომელიც ახასიათებს შემაშფოთებელი ძალით გამოწვეულ დინამიურ ეფექტს, დინამიურობის კოეფიციენტი ეწოდება. □

**აშოცანა 4.1.**  $c = 16$  კნ/მ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი განიცდის შემაშფოთებელი  $Q = 32 \sin 10t$  ნ ძალის მოქმედებას. წინაღობა უგულვებელყავით და დაადგინეთ ტვირთის იძულებითი რეზონანსული რხევის კანონი.

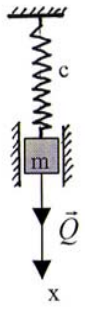
**აშოცანა.** გარემოს წინაღობა უგულვებელყოფილია ( $R = 0$ ), ამიტომ ტვირთის რხევის დიფერენციალური განტოლება იქნება

(იხ. (4.1ა) ფორმულა):  $m \ddot{x} + cx = 32 \sin 10t$ .

თუ ამ განტოლებას შევადარებთ იძულებითი რხევის (4.7)

დიფერენციალურ განტოლებას, მაშინ  $k^2 = c/m$ ,  $h = 32/m$ ,  $p = 10$ ;  $c = 16000$  ნ/მ.

რადგანაც რხევა რეზონანსულია, ამიტომ  $P = k = 10$ . მაშასადამე  $m = c/k^2 = 16000/100$  ნ/მ = 160ნ;  $h = 32/m = 0,2$ .



ნახ.19.

როდესაც არ არსებობს გარემოს წინაღობა, მაშინ იძულებითი რეზონანსული რხევის განტოლებას აქვს (4.10) სახე:  $x = -ht/2k \cos kt$

ამპლიტუდა  $A = ht / 2k = 0,2 t / 20 = 0,01 t$ .

ტვირთის რეზონანსული რხევის კანონი იქნება:

$$x = -0,01t \cos 10t, \text{ ანუ } x = 0,01t \sin(10t - \pi/2).$$

**აშოცანა 4.2.**

$G = 400$  გ წონის  $M$  ტვირთი დაკიდებულია ზამბარაზე, რომლის ზედა ბოლო ასრულებს ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას  $a = 2$  სმ ამპლიტუდით და  $p = 7$  წმ<sup>-1</sup> სიხშირით.

განსაზღვრეთ  $M$  ტვირთის იძულებითი რხევა, თუ ზამბარა  $F_1 = 40$  გ ძალის მოქმედებით გადაადგილდება  $x_1 = 1$  სმ მანძილზე.

**აშოცანა.**

ზამბარას ზედა  $D$  ბოლო ასრულებს ჰარმონიულ რხევას კანონით:  $x_D = a \sin pt = 2 \sin 7t$ . (ა)

შთქვამთ არადეფორმირებული ზამბარის სიგრძე  $l_0$ , ხოლო მისი სიხისტა  $c$ :  $c = F_1 / x_1 = 40 \text{ გ} / 1 \text{ სმ} = 40 \text{ გ} / \text{სმ}$ .

დროის ნებისმიერ  $t$  მომენტში  $DB$  ზამბარა გაჭიმულია  $(x_D + x + \delta_{\text{სტ}})$  სმ მანძილით, სადაც  $\delta_{\text{სტ}}$  არის ზამბარის სტატიკური დაგრძელება  $G$  ტვირთის მოქმედებით ( $G = c \delta_{\text{სტ}}$ ), ხოლო  $x = BM$  არის  $M$  ტვირთის მიმდინარე გადაადგილება.

ზამბარის დაჭიმულობის ძალა  $F_{\text{ღრ}} = c(x_D + x + \delta_{\text{სტ}})$ .

დროის ნებისმიერ მომენტში ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$m \ddot{x} = G - F_{\text{ღრ}}, \text{ ანუ } m \ddot{x} = G - c(x_D + x + \delta_{\text{სტ}}). \quad (ბ)$$

ვინაიდან  $G = c \delta_{\text{სტ}}$ , ეს ტოლობა ასე ჩაიწერება:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin 7t, \quad (გ)$$

სადაც  $k^2 = c/m = cg/G = 40 \cdot 980 / 400 = 98$ ;  $h = 2 k^2$ .

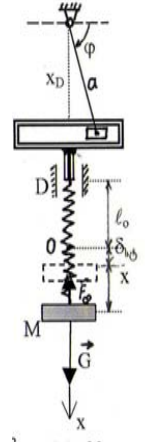
(გ) არის ტვირთის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება, საიდანაც ჩანს, რომ ზამბარის ზედა  $D$  ბოლოს მოძრაობა გამოწვეულია შემაშფოთებელი  $2 k^2 \sin 7t$  ძალის მოქმედებით. (გ) განტოლების ზოგადი ამონახსნი იქნება (იხ. (4.8) ფორმულა):  $x = a_1 \sin(kt + \alpha) + h / (k^2 - p^2) \cdot \sin pt$ .

აქედან ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი ასეთია:

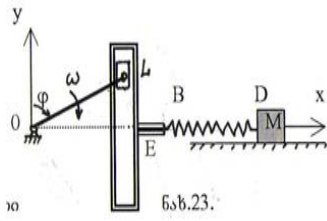
$$x_M = h / (k^2 - p^2) \cdot \sin pt.$$

აქ  $p = 7$ , ხოლო რხევის ამპლიტუდა  $A = h / (k^2 - p^2) = 4$ .

$M$  ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება ასეთია:  $x = 4 \sin 7t$ .



ნახ. 20.



**ამოცანა 4.5.**  $r$  რადიუსიან ლილვზე დახვეულია თოკი, რომლის თავისუფალ  $D$  ბოლოზე მიმაგრებულია  $c$  სიხისტის  $DB$  ზამბარა, ხოლო ზამბარის  $B$  ბოლოზე  $-m$  მასის  $M$  ტვირთი. ლილვის სიბრტყის მართობული  $0$  ღერძის გარშემო ლილვი განიცდის რხევას  $\varphi = \varphi_0 \sin pt$  კანონით. განსაზღვრეთ  $M$  ტვირთის იძულებითი რხევა იმ ღერძის მიმართ, რომელიც გაკლებულია ტვირთის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით. ამოცანა ამოხსენით ორი შემთხვევისათვის: 1)  $p \neq \sqrt{c/m}$ ; 2)  $p = \sqrt{c/m}$

პასუხი: 1)  $x = cr\varphi_0 / (c - mp^2) \cdot \sin pt$ ;  
2)  $x = -cr\varphi_0 t / 2mp \cdot \cos pt$ .

**ამოცანა 4.6.** ვერტიკალური  $DB$  ზამბარის ქვედა  $D$  ბოლოზე დაკიდებული  $P$  წონის ტვირთის თავისუფალი (ჰარმონიული) რხევის პერიოდი  $T = 0,8$  წმ. განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ ზამბარის ზედა  $B$  ბოლო ირხევა ვერტიკალური მიმართულებით  $T_1 = 1,2$  წმ პერიოდით და  $a = 3$  სმ ამპლიტუდით.

პასუხი: 5,4 სმ.

**ამოცანა 4.7.** კულისური მექანიზმის  $B$  ბოლოზე მიმაგრებულია ჰორიზონტალური  $BD$  ზამბარა, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი  $c = 5$  ნ/სმ. ზამბარის  $D$  ბოლოზე მიმაგრებულია  $Q = 400$  ნ წონის  $M$  ტვირთი, რომელსაც შეუძლია ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ისრიალოს ხაზუნის გარეშე.

განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი, თუ  $0L = 10$  სმ სიღმხარა ბრუნავს  $0$  ღერძის გარშემო  $\omega = 2$  რად/წმ კუთხური სიჩქარით და როცა  $\varphi = 0$ ,  $BD$  ზამბარა არადეფორმირებულია.

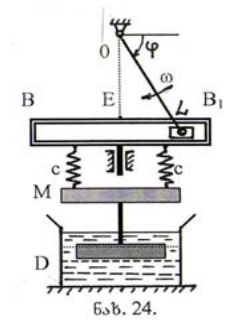
პასუხი:  $x = 14,15 \sin 2t$  სმ.

**ამოცანა 4.8.** როგორი უნდა იყოს წინა {4.7} ამოცანაში  $0L$  მრუდმხარას ბრუნვის კანონი, რომ  $m$  მასის ტვირთმა იმოდროს რეზონანსული რეჟიმით?

პასუხი:  $\varphi = 3,5 t$

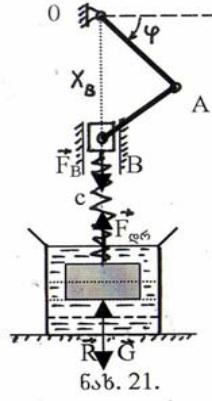
**ამოცანა 4.9.**  $Q = 98$  ნ წონის  $M$  ტვირთი დაკიდებულია  $BB_1$  კულისაზე მიმაგრებულ ორ პარალელურ ზამბარაზე; თითოეული ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი  $c = 6,8$  ნ/სმ.  $D$  დემპფერი წარმოშობს წინალობის ძალას, რომლისთვისაც წინალობის კოეფიციენტი უდრის თავისუფალი (ჰარმონიული) რხევის სიხშირეს:  $b = k$ .

განსაზღვრეთ  $M$  ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება, თუ  $0A = 7,5$  სმ მრუდმხარას



ნახ. 24.

**ამოცანა 4.3.**  $c = 0,5$  ნ/სმ სიხისტის კოეფიციენტის მქონე ზამბარას ზედა ბოლო მიმაგრებულია მრუდმხარა-ბარბაცა მექანიზმის  $B$  ცოციაზე, ხოლო ქვედა ბოლოზე დაკიდებულია  $G=1,5$  ნ წონის  $M$  სხეული.  $0A=AB=3$  სმ.  $0A$  მრუდმხარა ბრუნავს  $0$  ღერძის გარშემო  $\omega = 4\pi$  წმ<sup>-1</sup> კუთხური სიჩქარით; ამასთანავე,  $M$  სხეული ასრულებს რხევით მოძრაობას გარემოში, რომლის წინალობის ძალა ( $\vec{R}$ ) სიჩქარის პირველი ხარისხის პროპორციულია და უდრის  $0,02$  ნ-ს, როცა სიჩქარე  $V=1$  სმ/წმ.



ნახ. 21.

განსაზღვრეთ  $M$  სხეულის იძულებითი რხევის კანონი, თუ  $0_1x$  ღერძი გაკლებულია  $M$  სხეულის სტატიკური წონასწორობის მდგომარეობიდან ვერტიკალურად ქვევით, როცა  $0A$  მრუდმხარა ჰორიზონტალურად.

**ამოცანა.**  $M$  სხეული ასრულებს იძულებით რხევას წინალობის მქონე გარემოში. რხევის განტოლება ზოგადი სახით მოცემულია (4.3) ფორმულით. გარემოს წინალობის ძალა  $R=\mu V$ , საიდანაც წინალობის კოეფიციენტი  $\mu = R/V = 0,02$ ;

$$b = \mu/2m = \mu g / 2G = 0,02 \cdot 980 / 2 \cdot 1,5 = 6,53.$$

$0A$  მრუდმხარა ბრუნავს  $\varphi = \omega t = 4\pi t$  კანონით, ხოლო  $B$  ცოცია მოძრაობს კანონით:

$$x_B = 0B = 2 \cdot 0A \cdot \sin 4\pi t$$

ზამბარის  $B$  ბოლოზე მოქმედებს ელასტოტეხილი ძალა

$$F_B = cx_B = 0,5 \cdot 6 \cdot \sin 4\pi t = 3 \cdot \sin 4\pi t;$$

ე.ი.  $H = 3$ ;  $p = 4\pi$ ;  $h = H/m = 3g/G = 1960.$

ამასთანავე  $k^2 = c/m = cg/G = 326,6$

$\beta$  - რხევის საწყისი ფაზაა. (4.4)-ის თანახმად

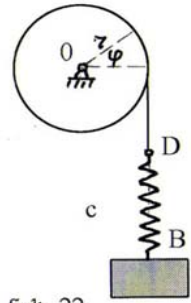
$$\operatorname{tg} \beta = 2bp / (k^2 - b^2) = 0,9709; \quad \beta = 44^\circ 10';$$

რადიანებში:  $\beta = 0,771.$

წინალობის მქონე გარემოში  $M$  სხეულის იძულებითი რხევის განტოლება ასეთია (იხ. (4.5) ფორმულა):

$$x = h / \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} \cdot \sin(pt + \beta), \quad \text{ანუ } x = 8,32 \sin(4\pi t + 0,771) \text{ სმ.}$$

**ამოცანა 4.4.**  $P = 2,45$  ნ წონის ტვირთი დაკიდებულია ზამბარაზე, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი  $c=1$  ნ/სმ. ტვირთზე მოქმედებს ვერტიკალური ძალა  $Q=1,8 \sin 16t$  ნ. განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის კანონი. პასუხი:  $x = 5 \sin 16t$  სმ.



ნახ. 22.

თანაბარი ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა  $\omega = 6$  რად/წმ

პასუხი:  $x = 5.93 \sin(6t - 0.95)$  სმ.

**ამოცანა 4.10.**

წინა [4. 9] ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ D დემფერის მიერ წარმოშობილი წინაღობის ძალა არის  $R = 1,2V$  ნ (V მ/წმ); იმავე ამოცანის პირობიდან აიღეთ საჭირო მონაცემები და განსაზღვრეთ 0A მრუდმხარას როგორი კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას იქნება იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმალური? იძულებითი რხევის ამპლიტუდა განსაზღვრეთ აგრეთვე რეზონანსის შემთხვევაში და დაწერეთ ამ რხევების განტოლებები.

პასუხი:  $\omega = 8$  წმ<sup>-1</sup>;  $A_{max} = 8,5$  სმ;  $x = 8,5 \sin(8t - \arctg 4/3)$  სმ.

$A = 7,29$  სმ;  $x = -7,29 \cos 11,66t$  სმ.

**ამოცანა 4.11.**

m მასის ტვირთი დაკიდებულია c სიხისტის ზამბარაზე.

მასზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა  $\bar{Q}$ , რომელიც მიმართულია

ვერტიკალური z ღერძის გასწვრივ, და გარემოს წინაღობის ძალა  $\bar{R} = \mu \bar{V}$ .

განსაზღვრეთ ტვირთის იძულებითი რხევის ამპლიტუდა, თუ  $Q_z = H \sin \sqrt{c/m} t$

პასუხი:  $A = H/\mu \cdot \sqrt{m/c}$ .

**§ 5. მასა 28 ინტრი. მყარი სხეული 'ცინის მომენტი**

ნივთიერ წერტილთა სისტემის ან მყარი სხეულის მოძრაობა არსებითად დამოკიდებულია მასში მასების განაწილების ხასიათზე; მასების განაწილების შეცვლით იცვლება სხეულის (სისტემის) ინერციულობის მახასიათებლებიც. სხეულში მასების განაწილების მახასიათებლებია მასათა ცენტრი და ინერციის მომენტები.

ნივთიერი წერტილის ან სხეულის ინერციულობის საზომი გადატანითი მოძრაობის დროს არის მისი მასა.

სხეულის (სისტემის) ბრუნვითი მოძრაობისას ინერციულობის მახასიათებლები განისაზღვრებიან ამ სხეულის (სისტემის) ინერციის მომენტებით.

ნივთიერ წერტილთა  $\{M_k(x_k, y_k, z_k)\}$  სისტემის მასების ცენტრი, ანუ ინერციის ცენტრი ეწოდება გეომეტრიულ C  $(x_c, y_c, z_c)$  წერტილს, რომლის მდებარეობა კოორდინატთა Oxyz სისტემაში განისაზღვრება რადიუს-ვექტორით:

$$\vec{r}_c = \sum m_k \vec{r}_k / M \quad (5.1)$$

$$x_c = \sum m_k x_k / M; \quad y_c = \sum m_k y_k / M; \quad z_c = \sum m_k z_k / M. \quad (5.2)$$

აქ  $m_k$ - სისტემის  $M_k$  წერტილის მასაა,  $\vec{r}_k$  - მისი რადიუს-ვექტორი. M - მთელი სისტემი (სხეულის) მასა:  $M = \sum m_k$ .

თუ წერტილთა სისტემა წარმოადგენს აბსოლუტურად მყარ სხეულს, მაშინ:

$$\vec{r}_c = 1/M \cdot \int_M \vec{r} dm;$$

(5.3)

$$x_c = 1/M \cdot \int_M x dm; \quad y_c = 1/M \cdot \int_M y dm; \quad z_c = 1/M \cdot \int_M z dm. \quad (5.4)$$

მექანიკური სისტემის ინერციის მომენტი რაიმე ცენტრის (ღერძის ან სიბრტყის) მიმართ არის სიდიდე, რომელიც ტოლია სისტემაში შემავალი წერტილების  $m_k$  მასებისა და აღებულ ცენტრამდე (ღერძამდე ან სიბრტყემდე) მათი  $r_k$  მანძილების კვადრატების ნამრავლთა ჯამისა.

აღინიშნება ასოთი J, შესაბამისი ინდექსით:  $J = \sum m_k r_k^2$ . (5.5)

კოორდინატთა სისტემის O სათავის მიმართ:

$$J_o = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2); \quad (5.6)$$

საკოორდინატო ღერძების მიმართ:

$$J_x = \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \quad J_y = \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \quad J_z = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad (5.7)$$

საკოორდინატო სიბრტყეების მიმართ:

$$J_{xoy} = \sum m_k z_k^2; \quad J_{xoz} = \sum m_k y_k^2; \quad J_{yoz} = \sum m_k x_k^2. \quad (5.8)$$

ცენტრიდანული ინერციის მომენტები:

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k; \quad J_{xz} = \sum m_k x_k z_k; \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k. \quad (5.9)$$

ამ ინერციის მომენტებს შორის ასეთი დამოკიდებულებაა:

$$J_x + J_y + J_z = 2J_o; \quad J_{xoy} + J_{xoz} + J_{yoz} = J_o. \quad (5.10)$$

ერთ სიბრტყეში მოთავსებულ 29 თა სისტემისათვის:

$$J_o = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2); \quad J_x = \sum r \sum m_k x_k^2, \quad J_y = \sum r \sum m_k y_k^2, \quad J_z = \sum r \sum m_k z_k^2, \quad (5.11)$$

თუ საკოორდინატო ღერძები ინერციის მთავრი ღერძებია, მაშინ

$$J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

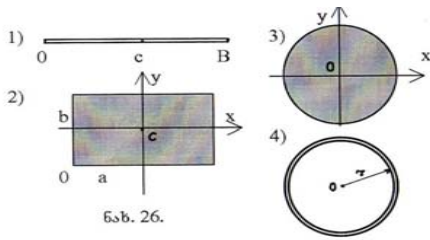
ერთგვაროვანი მყარი სხეულებისათვის:  $J = \int_M r^2 dm$ . (5.12)

სიდიდეს  $r = \sqrt{J/M}$  - ინერციის რადიუსი ეწოდება.

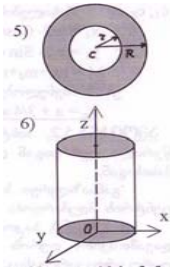
ზოგიერთი ერთგვაროვანი სხეულის ინერციის მომენტის გამოსათვლელი ფორმულა:

- 1) წვრილი წრფივი ღერო:  $J_o = 1/3 \cdot M \ell^2$ ;  $J_c = 1/12 \cdot M \ell^2$  ( $\ell$  - 0B ღეროს სიგრძეა, M - ღეროს მასა);
- 2) მართკუთხა ფირფიტის:  $J_o = 1/3 \cdot M(a^2 + b^2)$ ;  $J_a = 1/3 \cdot M b^2$ ;  $J_b = 1/3 \cdot M a^2$ ;  $J_x = 1/12 \cdot M b^2$ ;  $J_y = 1/12 \cdot M a^2$ ;  $J_c = 1/12 \cdot M(a^2 + b^2)$ ;
- 3) თხელი წრიული ფირფიტა (დისკი):  $J_o = 1/2 \cdot M r^2$ ;  $J_x = J_y = 1/4 \cdot M r^2$  (r- დისკოს რადიუსია);
- 4) წვრილი წრიული რგოლი:  $J_o = M r^2$  (r - რგოლის რადიუსია);
- 5) წრიული რგოლი:  $J_c = 1/2 \cdot M(R^2 + r^2)$ , აქ r და R რგოლის შიგა და გარე რადიუსებია);

6) წრიული ცილინდრი:  $J_z = 1/2 \cdot Mr^2$ .



ნახ. 26.



სხეულის ინერციის მომენტი სხვადასხვა ღერძის მიმართ ზოგადად სხვადასხვაა, მაგრამ არსებობს კავშირი პარალელური ღერძების მიმართ სხეულის ინერციის მომენტებს შორის, რომელსაც გამოხატავს პიუგენს – შტაინერის თეორემა: მყარი სხეულის ინერციის მომენტი რაიმე მოცემული z ღერძის მიმართ ტოლია ამ ღერძის პარალელური და სხეულის მასების ცენტრზე გამავალი  $z_c$  ღერძის მიმართ ინერციის მომენტს დამატებული სხეულის M მასისა და ამ ღერძებს შორის d მანძილის კვადრატის ნამრავლი. ეს თეორემა გამოხატულია ტოლობით:

$$J_z = J_{z_c} + Md^2. \quad (5.13)$$

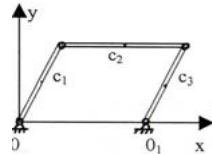
**ამოცანა 5.1.**

განსაზღვრეთ ერთგვაროვანი სახსროვანი  $OABO_1$  პარალელოგრამის მასების ცენტრის კოორდინატები იმ მომენტში, როდესაც  $OA$  მრუდმხარა პორიზონტალურ ღერძთან ადგენს  $\varphi$  კუთხეს, თუ

$$OA = O_1B = 1/2 \cdot AB = a.$$

**ამონსნა.**

დაუშვათ ღეროების სიკვრივეა  $\rho$ ; მაშინ  $OA$  და  $O_1B$  ღეროების მასებია  $m_1 = m_3 = \rho a$ , ხოლო  $AB$  ღეროს მასა  $m_2 = 2\rho a$ . ერთგვაროვანი ღეროების მასების  $c_1, c_2, c_3$  ცენტრები მათ შუა წერტილებში მდებარეობენ. ავირჩიოთ კოორდინატთა  $Oxy$  სისტემა სათავით  $O$  წერტილში და  $x$  ღერძი მივმართოთ პორიზონტალურად. (5.2) ფორმულების თანახმად:



$$x_c = 1/M \cdot (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \quad y_c = 1/M \cdot (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \quad (ა)$$

აქ  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  - არიან შესაბამისად  $c_1, c_2, c_3$  წერტილების კოორდინატები:  $x_1 = a/2 \cdot \cos \varphi$ ;  $x_2 = a + a \cos \varphi$ ;  $x_3 = 2a + a/2 \cdot \cos \varphi$ ;  
 $y_1 = a/2 \cdot \sin \varphi$ ;  $y_2 = a \sin \varphi$ ;  $y_3 = a/2 \cdot \sin \varphi$ .

$M = m_1 + m_2 + m_3 = 4\rho a$ . ეს მნიშვნელობები შევიტანოთ (ა) ტოლობებში; მივიღებთ:  $x_c = a + 3/4 \cdot a \cos \varphi$ ;  $y_c = 3/4 \cdot a \sin \varphi$ .

**ამოცანა 5.2.**

სისტემა შედგება m მასის  $AB = \ell$  სიგრძის ერთგვაროვან წვრილი ღეროსგან და ღეროს B ბოლოში მოთავსებული  $2m$  წვრილიღოვანი მასისაგან.

განსაზღვრეთ სისტემის მასების C A | C B

ცენტრის მდებარეობა A წერტილის მიმართ.

**ამონსნა.** საკოორდინატო Ax ღერძი

ნახ. 28.

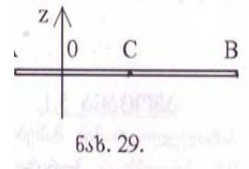
დავათხვიოთ ღეროს სათავით A წერტილში. ღერო ერთგვაროვანია; ამიტომ მისი მასების ცენტრი C მოთავსებულია ღეროს შუაში:  $AC = CB = \ell/2$ . სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან. სისტემის მასა  $M = m + 2m = 3m$ . მასების ცენტრის აბსცისა:

$$x_c = 1/M \cdot \sum m_k x_k = (m_{AB} \cdot AC + m_B \cdot AB) / 3m = (m\ell/2 + 2m\ell) / 3m = 5\ell/6.$$

$$x_c = 5\ell/6.$$

**ამოცანა 5.3.**

იპოვეთ M მასის ერთგვაროვანი წვრილი  $AB = \ell$  სიგრძის ღეროს ინერციის მომენტი იმ z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის O წერტილში ღეროს პერპენდიკულარულად, თუ  $AO = \ell/4$  A



ნახ. 29.

**ამონსნა.** პიუგენს – შტაინერის

თეორემის თანახმად (იხ. (5.13) ფორმულა):

$$J_z = J_c + M \cdot OC^2.$$

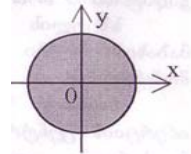
ვინაიდან  $J_c = 1/12 \cdot M\ell^2$ , ხოლო  $OC = \ell/4$ . ამიტომ

$$J_z = 1/12 \cdot M\ell^2 + 1/16 \cdot M\ell^2 = 7/48 \cdot M\ell^2.$$

პასუხი:  $J_z = 7/48 \cdot M\ell^2$ .

**ამოცანა 5.4.**

გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიუ, ს ინერციის მომენტი მისი დიამეტრის მიმართ



ნახ. 30.

**ამონსნა.**

ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა სათავით დისკოს ცენტრში. ბრტყელი სიმეტრიული ნაკვეთისათვის საკოორდინატო ღერძების მიმართ

ინერციის მომენტებს შორის ადგილი აქვს (5.11)

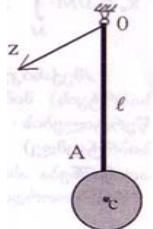
ტოლობას  $J_x + J_y = J_c$  (\*); ვინაიდან ერთგვაროვანი დისკოს ინერციის მომენტი მისი ყოველი დიამეტრის მიმართ ერთი და იგივეა, ამიტომ  $J_x = J_y$ . მეორეს მხრივ  $J_c = 1/2 \cdot MR^2$ . (\*) ტოლობიდან:  $2J_x = 1/2 \cdot MR^2$ , საიდანაც  $J_x = 1/4 \cdot MR^2$ . ასევე  $J_y = 1/4 \cdot MR^2$ . პასუხი:  $J_x = J_y = 1/4 \cdot MR^2$ .

**ამოცანა 5.5.**

O წერტილში დაკიდებული ქანქარა შედგება წვრილი ერთგვაროვანი  $\ell$  სიგრძის და  $M_1$  მასის ღეროსგან, რომლის A ბოლოზე მიმაგრებულია R რადიუსის და  $M_2$  მასის წრიული დისკო. გამოთვალეთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების Oz ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია.

**ამონსნა.** ქანქარა შედგება ორი სხეულისაგან:

ღერო და დისკო. ამიტომ  $J_z = J_z^{\text{ღერო}} + J_z^{\text{დისკო}}$ . (\*)



ნახ. 31.

ღეროს ინერციის მომენტი  $J_z^{\text{ღერ}} = 1/3 \cdot M_1 \ell^2$ .

0z ღერძის მიმართ დისკოს ინერციის მომენტის გამოსათვლელად გამოვიყენოთ ჰიუგენს – შტაინერის თეორემა:  $J_z^{\text{ღერ}} = J_c^{\text{ღერ}} + M_2 d^2$ , სადაც  $J_c^{\text{ღერ}} = 1/2 \cdot M_2 R^2$  არის დისკოს ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრზე და 0z ღერძის პარალელურად გაშვებული ღერძის მიმართ, ხოლო d - მანძილი დისკოს ცენტრიდან 0z ღერძამდე:  $d = OC = \ell + R$ . გვექნება:  $J_z^{\text{ღერ}} = 1/2 \cdot M_2 R^2 + M_2 (\ell + R)^2$ .

(\*) – დან მივიღებთ:  $J_z = 1/3 \cdot M_1 \ell^2 + M_2 (3R^2 / 2 + 2\ell R + \ell^2)$ .

**ამოცანა 5.6.** M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკო მიმაგრებულია AB

ღეროზე, რომელიც მასების C ცენტრიდან დაშორებულია  $OC = R/2$  მანძილით. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები x, y, z ღერძების მიმართ; აგრეთვე ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.

**ამოხსნა.** ერთგვაროვანი დისკოსთვის  $J_c = 1/2 \cdot MR^2$ .

0y ღერძი გავლებულია დისკოს სიბრტყის მართობულად; ამიტომ, თუ გავავლებთ მასების C

ცენტრზე 0y -ის პარალელურ  $Cy_c$  ღერძს, მაშინ ამ ღერძის მიმართ  $J_{y_c} = J_c = 1/2 \cdot MR^2$ .

გამოვიყენოთ ჰიუგენს – შტაინერის თეორემა; გვექნება:

$$J_y = J_{y_c} + M \cdot OC^2 = 3/4 \cdot MR^2.$$

C წერტილში გავავლოთ 0z - ის პარალელური  $Cz_c$  ღერძი. ვინაიდან, როგორც x, ასევე  $z_c$  ღერძი დისკოს დიამეტრების თანამთხვეულია, ამიტომ

$$J_x = J_{z_c} = 1/4 \cdot MR^2.$$

ჰიუგენს – შტაინერის თეორემის თანახმად:  $J_z = J_{z_c} + M \cdot OC^2 = 1/2 \cdot MR^2$ .

რადგანაც დისკო სიმეტრიულია, როგორც x, ასევე y ღერძის მიმართ, ამიტომ  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ .

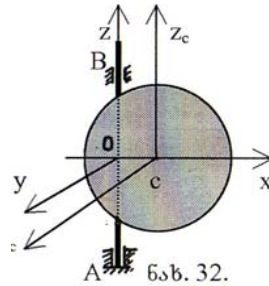
$$\text{პასუხი: } J_x = 1/4 \cdot MR^2; \quad J_y = 3/4 \cdot MR^2; \quad J_z = 1/2 \cdot MR^2; \\ J_{xy} = J_{yz} = J_{xz} = 0.$$

**ამოცანა 5.7.** გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს ინერციის მომენტი მისი მხები წრფის მიმართ.

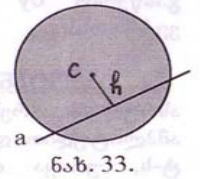
$$\text{პასუხი: } J_d = 5/4 \cdot MR^2.$$

**ამოცანა 5.8.** გამოთვალეთ M მასის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი მსახველის მიმართ.

$$\text{პასუხი: } J = 3/2 \cdot MR^2.$$

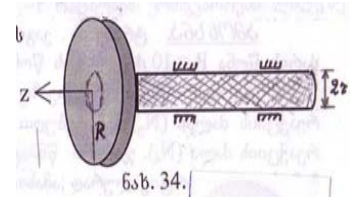


**ამოცანა 5.9.** გამოთვალეთ P წონის და R რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული დისკოს ინერციის მომენტი იმ ღერძის მიმართ, რომელიც მდებარეობს მის სიბრტყეში და სიმძიმის ცენტრიდან დაშორებულია რადიუსის მეოთხედი მანძილით ( $h = R/4$ ).  
პასუხი:  $J_a = 5PR^2 / 16g$ .

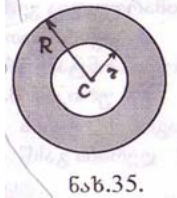


**ამოცანა 5.10.**  $P_1$  წონის r რადიუსის ერთგვაროვანი ლილვზე ჩამოცმულია  $P_2$  წონის და R რადიუსის მქნევარა.

გამოთვალეთ ლილვის ინერციის მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ, თუ მქნევარა წარმოადგენს ერთგვაროვან წრიულ დისკოს.  
პასუხი:  $J_a = 1/2g \cdot (P_1 r^2 + P_2 R^2)$ .



**ამოცანა 5.11.** თხელ ერთგვაროვან R რადიუსის წრიულ დისკოში ამობურღულია r რადიუსის კონცენტრიული ხვრელი. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტი იმ z ღერძის მიმართ, რომელიც გადის მისი სიმძიმის ცენტრში დისკოს სიბრტყის პერპენდიკულარულად, თუ დისკოს წონა არის P.  
პასუხი:  $J_{cz} = P/2g \cdot (R^2 + r^2)$ .

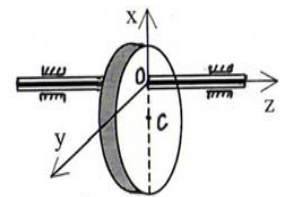


**ამოცანა 5.12.** ქანქარა შედგება ერთგვაროვანი  $M_1$  მასის წვირელ AB ღეროსაგან, რომლის ბოლოზე მიმაგრებულია  $M_2$  მასის ერთგვაროვანი C დისკო. ღეროს სიგრძე უდრის  $4r$ , სადაც r - დისკოს რადიუსია.

გამოთვალეთ ქანქარას ინერციის მომენტი მისი დაკიდების O ღერძის მიმართ, რომელიც ქანქარას სიბრტყის მართობია და ღეროს A ბოლოდან დაშორებულია r მანძილით.

$$\text{პასუხი: } J_{Oz} = 1/6 \cdot (14M_1 + 99M_2)r^2.$$

**ამოცანა 5.13.** M მასის ერთგვაროვანი წრიული დისკო ექსცენტრულად ჩამოცმულია მისი სიბრტყის მართობ z ღერძზე. დისკოს რადიუსია r, ხოლო ექსცენტრისიტეტი  $OC = a$ , სადაც C არის

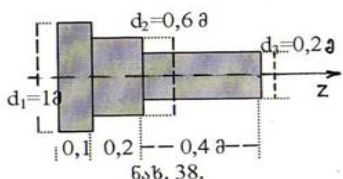


ნახ. 37

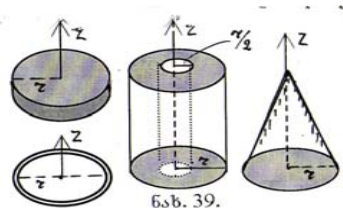
დისკოს მასების ცენტრი. გამოთვალეთ დისკოს ინერციის მომენტები 37-ე ნახაზზე მითითებული ღერძების მიმართ, აგრეთვე ცენტრიდანული ინერციის მომენტები.

პასუხი:  $J_x = 1/4 \cdot Mr^2$ ;  $J_y = M(1/4 \cdot r^2 + a^2)$ ;  
 $J_z = M(1/2 \cdot r^2 + a^2)$ .  $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ .

**აშოცანა 5.14.** გამოთვალეთ მთლიანი თუჯის საფეხუროვანი ბორბალის ინერციის მომენტი მისი z ღერძის მიმართ (სიმკვრივე = 7800 კგ/მ<sup>3</sup>).  
 პასუხი:  $J_z = 97$  კგმ<sup>2</sup>.



**აშოცანა 5.15.** როგორ შეეფარდებიან ერთმანეთს მთლიანი დისკოს, წრიული რგოლის, დრუ ცილინდრის და წრიული კონუსის ინერციის რადიუსები ვერტიკალური ღერძის მიმართ, თუ ყველა მათგანს აქვთ ერთი და იგივე მასა?  
 პასუხი:  $\sqrt{1/2} : 1 : \sqrt{5/8} : \sqrt{3/10}$ .



### § 6. მასების ცენტრის მოძრაობა

მექანიკური სისტემის (უ<sup>34</sup> მყარი სხეულის) მოძრაობის დასახასიათებლად ხშირ შემთხვევაში საკმარისია ვიცოდეთ მისი მასების ცენტრის მოძრაობის ხასიათი, რომელსაც გამოსახავს შემდეგი თეორემა: მექანიკური სისტემის (სხეულის) მასების ცენტრი მოძრაობს ისე როგორც ერთი ნივთიერი წერტილი, რომელშიც თავმოყრილია მთელი სისტემის მასა და რომელზეც მოქმედებს გარე ძალების ნაკრები ვექტორი. ეს ასე გამოისახება:

(6.1)  $M \vec{w}_c = \vec{F}^{\Sigma}$   
 აქ M - მთელი სისტემის (სხეულის) მასაა,  $\vec{w}_c$  - მასების ცენტრის აჩქარება,  $\vec{F}^{\Sigma}$  - სისტემაზე (სხეულზე) მოღებულ გარე ძალების ნაკრები ვექტორი.

მასების C ( $x_c, y_c, z_c$ ) ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებებია:

$Md^2x_c/dt^2 = X^{\Sigma}$ ,  $Md^2y_c/dt^2 = Y^{\Sigma}$ ,  $Md^2z_c/dt^2 = Z^{\Sigma}$ . (6.2)

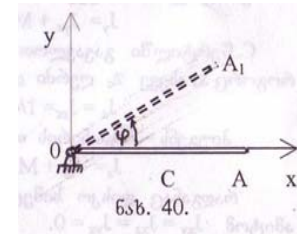
**შენიშვნა.** მასების ცენტრი გეომეტრიული წერტილია და გარე ძალები ფაქტიურად მოღებულია არა მასების ცენტრზე, არამედ სისტემის (სხეულის) წერტილებზე.

**შედეგი:** თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ( $\vec{F}^{\Sigma}$ ) ან მისი გვემილი მოცემულ უძრავ ღერძზე ( $F_x^{\Sigma}$ ) ნულის ტოლია  $\vec{F}^{\Sigma} = 0$  (ან  $F_x^{\Sigma} = 0$ ), მაშინ სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე ან მისი გვემილი აღებულ ღერძზე მუდმივია  $\vec{v}_c = \text{const}$  (ან  $v_{cx} = \text{const}$ ). ეს ნიშნავს, რომ მასების ცენტრი მოძრაობს წრფივად და თანაბრად, ან უძრავია ( $\vec{v}_c = 0$ , ან  $v_{cx} = 0$ ). ამ შემთხვევას ეწოდება მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონი (ან მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონი ამ x ღერძის მიმართ). როდესაც  $\vec{v}_c = 0$  (ან  $v_{cx} = 0$ ), მაშინ სისტემის მასების ცენტრის კოორდინატები დროის საწყის და მოცემულ მომენტებში ერთმანეთის ტოლია:  $x_c^0 = x_c^t$ ;  $y_c^0 = y_c^t$ ;  $z_c^0 = z_c^t$ ; (ან  $x_c^0 = x_c^t$ ). (6.3)

**მითითება.** მასების ცენტრის თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით:

- 1) ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა გარე ძალა.
- 2) ავირჩიოთ კოორდინატთა სისტემა;
- 3) მასების ცენტრის მოძრაობის თეორემა ჩავწეროთ გვემილებში ((6.2) ტოლობების სახით);
- 4) გამოვთვალოთ ყველა გარე ძალის გვემილი კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე;
- 5) მიღებული მნიშვნელობები შევიტანოთ (6.2) განტოლებებში.

**აშოცანა 6.1.** OA = 40 სმ სიგრძის ერთგვაროვანი ღერო  $\varphi = \pi t^2/2$  კანონით ბრუნავს 0 ბოლოზე ღეროს მართობულად გამავალი უძრავი ღერძის გარშემო. t = 0 მომენტისათვის 35 განსაზღვრეთ მასების C ცენტრის სიდიდე და ღეროზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის მიმართულება.



**ამონსნა.** t = 0 მომენტში  $\varphi = 0$ ; ღეროს უკავია OA მდებარეობა. ღეროს მასების C ცენტრი მოძრაობს კანონით:  $M \vec{w}_c = \vec{F}^{\Sigma}$ .

C წერტილი შემოწერს  $R = OA/2 = 20$  სმ რადიუსის წრეწირს. მისი აჩქარება  $\vec{w}_c = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n$ ; სიდიდით  $w_c = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2}$ ; აქ  $w_\tau = \varepsilon R$ ;  $w_n = \omega^2 R$ . ვინაიდან  $\omega = \dot{\varphi} = \pi t$ , ხოლო  $\varepsilon = \dot{\omega} = \pi$ ; ამიტომ t = 0 მომენტში  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon = \pi$ . მაშასადამე  $w_\tau = \pi R$ ;  $w_n = 0$ . მივიღებთ  $w_c = w_\tau = 20\pi$  სმ/წმ<sup>2</sup>. აჩქარება  $\vec{w}_c$  მიმართულია ტრანსვერსალურად (წრეწირის) მხების

გასწვრივ  $Oy$  ღერძის პარალელურად. იგივე მიმართულება აქვს  $\vec{F}$  ვექტორსაც.

**ამოცანა 6.2.** ჰორიზონტალურ გზაზე მოძრაობისას ტრამვაის ვაგონი ასრულებს რესორებზე ვერტიკალურ ჰარმონიულ რხევას  $a=2,5$  სმ ამპლიტუდით და  $T=0,5$  წმ პერიოდით. ვაგონის ძარა ტვირთით იწონის 10 ტ-ს, ურიკა თვლებთან ერთად 1 ტ-ს. განსაზღვრეთ ვაგონის წნევა რელსებზე.

**ამონსნა.** ტრამვაის ვაგონზე მოქმედი გარე ძალებია: ვაგონის ძარის წონა  $P_1=10$  ტ, ურიკას წონა თვლებთან ერთად  $P_2=1$  ტ,

ვაგონის წნევა რელსებზე ტოლია ურიკას წონით გამოწვეულ რეაქციის ძალას ( $N_1$ ) დამატებული ძარის რხევითი მოძრაობით გამოწვეული რეაქციის ძალა ( $N_2$ ). ჯამური წნევის რეაქციის ძალა  $N=N_1+N_2$ . ეს ძალები მიმართულია ვერტიკალურად; ამასთანავე,  $N_1 = P_2$  განვსაზღვროთ  $N_2$ .

ავირჩიოთ კოორდინატთა  $Oxy$  სიტემა და  $Ox$  ღერძი მივმართოთ ჰორიზონტალურად.

ურიკას მასების ცენტრი არ იცვლის მდებარეობას  $y$  ღერძის გასწვრივ. ვაგონის ძარის მასების  $C$  ცენტრი (ძარის ვერტიკალური რხევის გამო)  $y$  ღერძის გასწვრივ ასრულებს ჰარმონიულ რხევას და მოძრაობს კანონით:

$$y_c = a \sin kt.$$

პირობის თანახმად რხევის პერიოდი  $T = 2\pi/k$ , საიდანაც  $k = 2\pi/T = 4\pi$ ;

$$\text{მაშასადამე } y_c = 2,5 \sin 4\pi t. \quad (ა)$$

ძარას მასების  $C$  ცენტრის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლება იქნება

$$m_1 d^2 y_c / dt^2 = -P_1 + N_2.$$

(ბ)

თუ გავითვალისწინებთ (ა) ტოლობას, მაშინ (ბ) -დან გვექნება:

$$N_2 = P_1 - P_1/g \cdot 2,5 \cdot 16 \pi^2 \sin 4\pi t = P_1 - P_1/g \cdot 40 \pi^2 \sin 4\pi t.$$

საბოლოოდ, ვაგონის მოძრაობისას ჯამური წნევის ძალა იქნება:

$$N = P_2 + P_1 - P_1/g \cdot 40 \pi^2 \sin 4\pi t.$$

ამ ტოლობიდან გამოვძინარეობს, რომ:

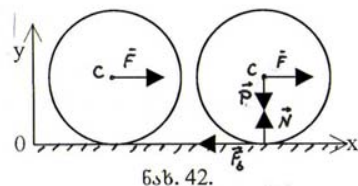
$$1) N = N_{\max}, \text{ როცა } \sin 4\pi t = -1, \text{ ე.ი.}$$

$$N_{\max} = P_2 + P_1 + P_1/g \cdot 40 \pi^2 = 10 + 1 + 10/980 \cdot 40 \cdot 3,14^2 \approx 15 \text{ ტ};$$

$$2) N = N_{\min}, \text{ როცა } \sin 4\pi t = +1, \text{ ე.ი. } N_{\min} = P_2 + P_1 - P_1/g \cdot 40 \pi^2 \approx 7 \text{ ტ}.$$

პასუხი: ვაგონის წნევა რელსებზე იცვლება

7 ტონიდან 15 ტონამდე.



ნახ. 42.

**ამოცანა 6.3.** ავტომანქანის ამყლი თვალი  $F$  ძალის მოქმედებით სრიალით გორავს ჰორიზონტალურ წრფეზე (ნახ.42). განსაზღვრეთ თვალის სიმძიმის  $C$  ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f$ , ხოლო  $F = 5fP$ , სადაც  $P$  - თვლის წონაა. საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.

**ამონსნა.** თვალზე მოქმედებს ოთხი ძალა:  $F$  - მამოძრავებელი ძალა,  $P$  - სიმძიმის ძალა,  $F_f$  - სრიალის ხახუნის ძალა,  $N$  - საყრდენის ნორმალური რეაქციის ძალა. მასების  $C$  ცენტრის მოძრაობის

$$\text{განტოლება } M \ddot{x}_c = \vec{F} + \vec{P} + \vec{F}_f + \vec{N}.$$

$$\text{დავაგვიძლიოთ ეს ტოლობა } x \text{ და } y \text{ ღერძებზე: } M \ddot{x}_c = F - F_f, \\ 0 = -P + N. \quad (ა)$$

აქ  $y_c = R = \text{const}$  და  $\ddot{y}_c = 0$ ;  $N = P$ ; სრიალის ხახუნის ძალა:  $F_f = fN = fP$ . (ა) -დან გვექნება:  $P/g \ddot{x}_c = 5fP - fP$ ; აქედან  $\ddot{x}_c = 4fg$ .

$$\text{ვაინტეგრირებთ ეს ტოლობა: } \dot{x}_c = 4fgt + c_1. \quad (ბ)$$

საწყის მომენტში თვალი უძრავია, ე.ი. როცა  $t_0 = 0$ , მაშინ  $\dot{x}_c = V_{ox} = 0$ ; მათი (ბ)-ში შეტანით მივიღებთ  $c_1 = 0$ ; ამიტომ (ბ) ასეთ სახეს იღებს:

$$\dot{x}_c = 4fgt; \quad \text{ვაინტეგრირებთ ეს ტოლობა: } x_c = 2fgt^2 + c_2. \quad (გ)$$

განვლილი მანძილი ავითვალთ მოძრაობის დაწყების მომენტიდან, ე.ი., როცა  $t_0 = 0$ , მაშინ  $x_c = 0$  და მაშასადამე (გ) -დან  $c_2 = 0$ .

$$\text{მასების ცენტრის მოძრაობის განტოლება იქნება: } x_c = 2fgt^2.$$

**ამოცანა 6.4.** გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოთავსებულია  $P_1=16$  ნ წონის სამკუთხა პრიზმა. პრიზმის დახრილი  $AE$  წახნაგის გასწვრივ საწყისი  $D$  მდებარეობიდან უსრიალოდ მიგორავს  $P_2=8$  ნ წონის და  $r=6,5$  სმ რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრი და შეასრულა ორი ბრუნა. ამ დროის განმავლობაში რა  $x$  მანძილზე გადაადგილდება პრიზმა ჰორიზონტალური სიბრტყის გასწვრივ? მოცემულია:  $AB=50$  სმ;  $BE=120$  სმ.

**ამონსნა.** სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: ცილინდრისა და პრიზმისაგან. სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის გვეძლიო  $x$  ღერძზე  $F_x = 0$ . ე.ი. ადვილი აქვს  $x$  ღერძის მიმართ მასების ცენტრის მოძრაობის შენახვის კანონს:

$$x_c^0 = x_c^t. \quad (ა)$$

მანძილი ავითვალთ  $AB$  წიბოს საწყისი მდებარეობიდან. საწყის  $t_0=0$  მომენტში მასების ცენტრის აბსცისა

$$x_c = (m_1 x_1 + m_2 x_2) / M \quad (ბ)$$

სადაც  $M = m_1 + m_2$ , ხოლო  $x_1$  და  $x_2$  არიან პრიზმისა და ცილინდრის სიმძიმის ცენტრის აბსცისები.

ვთქვათ  $t$  დროის შემდეგ  $D$  ცილინდრმა გააკეთა ორი სრული ბრუნი, ე. ი. გაიარა  $DD_1 = 4\pi r$  სმ მანძილი, ხოლო ამავე დროში პრიზმა გადაადგილდა მარცხნივ  $x$  სმ მანძილით. მაშინ პრიზმას და ცილინდრის  $D_1$  მდებარეობის აბსცისები შესაბამისად იქნებიან

$$(x_1 - x) \quad \text{და} \quad (x_2 + l - x), \quad \text{სადაც}$$

$$l = DD_1 \cos \alpha = 4\pi r \cos \alpha.$$

$$(\operatorname{tg} \alpha = AB/BE = 5/12; \quad \cos \alpha = 12/13).$$

დროის  $t$  მომენტისათვის სისტემის მასების ცენტრის მდებარეობა განისაზღვრება ტოლობით:  $x_c^1 = [m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 + l - x)] / M.$  (გ)

(ა) ტოლობის თანახმად (ბ) და (გ) - დან გვექნება:

$$(m_1 x_1 + m_2 x_2) / M = [m_1(x_1 - x) + m_2(x_2 + l - x)] / M$$

$$\text{ანუ} \quad (m_1 + m_2) x = m_2 l;$$

$$\text{საიდანაც} \quad x = m_2 l / (m_1 + m_2) = 4\pi r P_2 \cos \alpha / (P_1 + P_2) = 25,12 \text{ სმ.}$$

$$x = 25,12 \text{ სმ (მარცხნივ).}$$

### ამოცანა 6.5.

$m = 50$  კგ მასის  $A$  ტვირთი ადის დახრილ სიბრტყეზე ბაგირის საშუალებით, რომელიც დახვეულია  $R = 0,4$  მ რადიუსის  $B$  დოლზე.

განსაზღვრეთ  $A$  სხეულზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორის სიითი. თუ დოლის კუთხური აჩქარება  $38$   $\text{წმ}^{-2}$ .

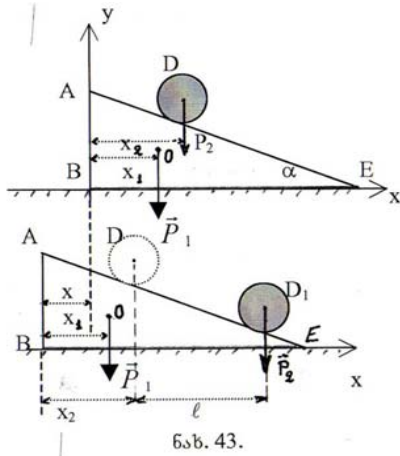
$$\text{პასუხი: } F^{(a)} = 100 \text{ ნ.}$$

### ამოცანა 6.6.

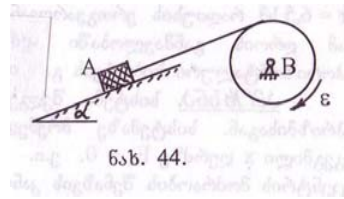
$P_1$  წონის  $A$  სოლი მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე, ხოლო  $P_2$  წონის  $B$  სხეულს შეუძლიან ვერტიკალური მოძრაობა. კუთხე  $\alpha$  ცნობილია.

განსაზღვრეთ სისტემის მასების ცენტრის აჩქარება, თუ სოლის აჩქარება არის  $w$ .

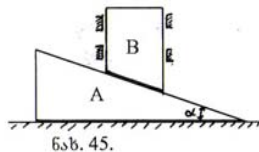
$$\text{პასუხი: } w_c = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \operatorname{tg}^2 \alpha / (P_1 + P_2) \cdot w.$$



ნახ. 43.



ნახ. 44.



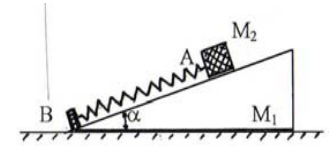
ნახ. 45.

### ამოცანა 6.7.

70 ნ წონის  $M_1$  სოლი მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. 30 ნ წონის  $M_2$  სხეულზე მიმაგრებული ზამბარა შეკუმშეს და უძრავი მდგომარეობიდან სხეული გაუშვეს.

განსაზღვრეთ მანძილი, რომელზეც გადაადგილდება სოლი, თუ  $\alpha = 30^\circ$  და  $M_2$  სხეულმა სოლის დახრილ წახნაგზე გაიარა 40 სმ მანძილი.

$$\text{პასუხი: } s = 10,4 \text{ სმ (მარცხნივ)}$$



ნახ. 46.

### ამოცანა 6.8.

$r_1$  და  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ) რადიუსების ერთგვაროვანი ბლოკები ერთმანეთთან ზისტად არიან შეერთებულნი და ჩამოცმულნი არიან ბრუნვის საერთო 0 ღერძზე.

განსაზღვრეთ წნევა ამ ღერძზე, თუ ბლოკების საერთო წონა არის  $Q$ .  $M_1$  და  $M_2$  ტვირთების წონებია შესაბამისად  $P_1$  და  $P_2$ .  $M_1$  ტვირთის აჩქარება  $w_1$ -ს ტოლია.

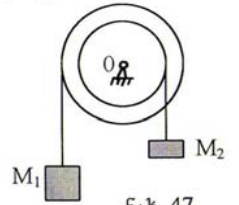
$$\text{პასუხი: } N = P_1 + P_2 + Q - (P_1 r_1 - P_2 r_2) \cdot w_1 / g r_1.$$

### ამოცანა 6.9.

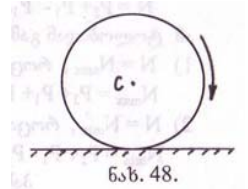
ავტომანქანის წამყვანი თვალი მასზე მოდებული მასბრუნე მომენტის მოქმედებით სრიალით გორავს ჰორიზონტალურ წრფეზე.

განსაზღვრეთ თვალის სიმძიმის  $C$  ცენტრის მოძრაობის კანონი, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f$ . საწყის მომენტში თვალი უძრავი იყო.

$$\text{პასუხი: } x_c = f g t^2 / 2.$$



ნახ. 47.



ნახ. 48.

## § 7. მოძრაობის კინემატიკის ცვლილების აჩქარება

$\vec{v}$  სიჩქარით მოძრავი  $m$  მასის ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობა ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს:  $\vec{Q} = m \vec{v}$ , (7.1)

ნივთიერ წერტილთა სისტემის მოძრაობის რაოდენობა:  $\vec{Q} = \sum m_k \vec{v}_k$ . აქ  $m_k$  - სისტემის  $k$ -ური წერტილის მასაა,  $\vec{v}_k$  - ამ წერტილის სიჩქარე.

$$\text{ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის: } \vec{Q} = M \vec{v}_c, \quad (7.2)$$

სადაც  $M$  - სისტემის მასაა,  $\vec{v}_c$  - სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე. წერტილის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა:  $d\vec{Q}/dt = \vec{F}$ ; (7.3)

სისტემის მოძრაობის რაოდენობის თეორემა:  $d\vec{Q}/dt = \vec{F}^{\text{ა}}$ .

მოძრაობის რაოდენობის ნაზრდის თეორემა:

წერტილისათვის:  $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_0^t \vec{F} dt;$  (7.4)

აქ  $\vec{v}_0$  და  $\vec{v}$  - წერტილის მოძრაობის საწყისი და საბოლოო სიჩქარეა, ხოლო  $\tau$  - მოძრაობის დროის შუალედი.

დეკარტის მართკუთხა კოორდინატა უძრავი სისტემის ღერძებზე (7.4) ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$mv_x - mv_{0x} = \int_0^t F_x dt; \quad mv_y - mv_{0y} = \int_0^t F_y dt; \quad mv_z - mv_{0z} = \int_0^t F_z dt; \quad (7.5)$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის:  $\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \int_0^t \vec{F}^{\text{ა}} dt;$  (7.6)

სიდიდეს  $\vec{S} = \int_0^t \vec{F} dt$  - ეწოდება ძალის სრული იმპულსი; სიდიდეს

$d\vec{S} = \vec{F} dt$  - ძალის ელემენტარული იმპულსი ეწოდება.

თუ  $\vec{F} = \text{const}$ , მაშინ (7.3) ასე ჩაიწერება:  $m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{F} \cdot \tau;$  (7.7)

თუ  $\vec{F} = 0$ , მაშინ (7.3) -დან  $\vec{Q} = \text{const}$ ; ე.ი. ადგილი აქვს მოძრაობის

რაოდენობის შენახვის კანონს:  $\vec{Q}_0 = \vec{Q}_t.$  (7.8)

თუ  $F_x = 0$ , მაშინ  $Q_x = \text{const}$ ; ადგილი აქვს  $x$  ღერძის მიმართ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს:  $mv_{0x} = mv_{tx} = \text{const}.$  (7.9)

მიზიძვრა. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა რეკომენდებულია შემდეგი თანამიმდევრობით: 1) ნახაზზე გამოვსახოთ წერტილზე მოქმედი ყველა აქტიური და რეაქციის ძალა (სისტემის შემთხვევაში - ყველა გარე ძალა); 2) ავირჩიოთ კოორდინატა სისტემა; 3) მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა (როგორც წერტილისათვის, ასევე - სისტემისათვის) ჩავწეროთ საკოორდინატო ღერძებზე გეგმილებში; 4) მიღებული განტოლებებიდან განვსაზღვროთ უცნობი სიდიდე (მოძრაობის საწყისი ან საბოლოო სიჩქარე, მოძრაობის დრო, რომელიმე უცნობი ძალა ან მისი გეგმილი).

შენიშვნა. 1) თუ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები ვექტორი ან მისი გეგმილი რომელიმე ღერძზე ნულის ტოლია, მაშინ

გამოვიყენებთ მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს (7.8) ან (7.9) ტოლობის სახით და განვსაზღვრავთ საძებნ სიდიდეს.

2) (7.2) ტოლობიდან ჩანს, რომ თუ სისტემა (ან სხეული) ისე მოძრაობს, რომ მისი მასების ცენტრი უძრავია ( $\vec{V}_c = 0$ ), მაშინ სისტემის (ან სხეულის) მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია. მაგალითად, თუ სხეული ბრუნავს მასების ცენტრზე გამავალი ღერძის გარშემო, მაშინ მისი მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია.

ამოცანა 7.1 განსაზღვრეთ ქანქარას მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი, თუ იგი შედგება  $P_1$  წონის  $OA=4r$  სიგრძის ერთგვაროვანი ღეროსა და  $P_2$  წონის  $r$  რადიუსის  $B$  დისკოსაგან; ადებულ მომენტში ქანქარას კუთხური სიჩქარე  $\omega$  - ს ტოლია.

ამოხსნა. ღეროს სიმძიმის ცენტრი შუა  $C$  წერტილშია მოთავსებული, ხოლო დისკოსი -  $B$  ცენტრში. სისტემის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი გამოითვლება ფორმულით:

$$\vec{Q} = m_{0A} \cdot \vec{v}_c + m_B \cdot \vec{v}_B; \quad (\text{ა}) \quad \text{აქ } m_{0A} = P_1/g; \quad m_B = P_2/g.$$

ქანქარას მოძრაობის დროს მისი  $C$  და  $B$  წერტილები მოძრაობენ წრეწირებზე  $\omega$  კუთხური სიჩქარით, ამიტომ  $v_c = \omega \cdot OC = 2r \omega;$

$$v_B = \omega \cdot OB = 5r \omega.$$

სიჩქარის  $\vec{v}_c$  და  $\vec{v}_B$  ვექტორები მიმართულნი არიან ნახაზის სიბრტყეში  $OB$  წრფის მართობულად და მაშასადამე  $\vec{Q}$  ვექტორიც  $OB$ -ს მართობულია.

თუ (ა) ტოლობას დავაგეგმილებთ ნახაზის სიბრტყეში მდებარე  $OB$  წრფის მართობულ ღერძზე, მივიღებთ:

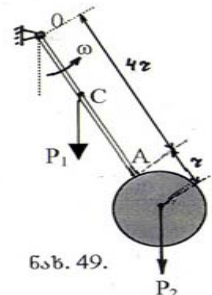
$$Q = m_{0A} v_c + m_B v_B = P_1/g \cdot 2r \omega + P_2/g \cdot 5r \omega = (2P_1 + 5P_2)r \omega / g.$$

პასუხი:  $Q = (2P_1 + 5P_2)r \omega / g;$  ( $Q$  მიმართულია  $OB$ -ს მართობულად მოძრაობის მხარეს).

ამოცანა 7.2  $P = 12$  კგ წონის გრანატა, რომელიც მიფრინავდა  $15$  მ/წმ სიჩქარით, ჰაერში გასკდა ორ ნაწილად.  $P_1=8$  კგ წონის ნამსხვრევის სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებით გაიზარდა  $25$  მ/წმ-დე. იპოვეთ მეორე ნაწილის სიჩქარე.

ამოხსნა. გრანატის მასა  $m = P/g = 12/g$ , ხოლო გასკდომის შედეგად მიღებული ნამსხვრევების მასებია:  $m_1 = P_1/g = 8/g;$   $m_2 = P_2/g = 4/g.$

გრანატის სიჩქარე  $v=15$  მ/წმ, ხოლო ნამსხვრევებისა:  $v_1=25$  მ/წმ და  $v_2$ . უნდა განვსაზღვროთ  $v_2$ .



გრანატის გასკდომამდე მოძრაობის რაოდენობასა და გასკდომის შემდეგ მიღებული ორი სხეულის სისტემის მოძრაობის რაოდენობას შორის არსებობს დამოკიდებულება:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2, \text{ ანუ } m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2. \quad (ა)$$

ამოცანის პირობის თანახმად, ერთ-ერთი ნამსხვრევის სიჩქარე გრანატის მოძრაობის მიმართულებას ემთხვევა, ე.ი.  $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}$ ; ამის გამო,

(ა) ტოლობას ექნება ადგილი მხოლოდ მაშინ, თუ აგრეთვე  $\vec{v}_2 \parallel \vec{v}$ ; ეს კი გვიჩვენებს, რომ თუ (ა) ტოლობას დავაგვიძლიებთ მოძრაობის ამ მიმართულებაზე, მივიღებთ:  $mv = m_1v_1 + m_2v_2$ .

შევიტანოთ აქ მიღებული მნიშვნელობები:  $12 \cdot 15 = 8 \cdot 25 + 4 v_2$ ;

აქედან:  $v_2 = -5$  მ/წმ. ნიშანი “-“ გვიჩვენებს, რომ მეორე ნამსხვრევის სიჩქარე მიმართულია პირველის საწინააღმდეგოდ.

პასუხი:  $v_2 = 5$  მ/წმ.

**ამოცანა 7.3.** გამოთვალეთ ნახაზზე გამოსახული ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ მხედველობაში მიღებულია ორივე ბორბლისა და ღვედის მასა. ბორბლების სიმძიმის ცენტრები მათი ბრუნვის ღერძებზე მდებარეობს.

**ამოსნა.** სისტემა შედგება სამი სხეულისაგან: ორი ბორბლისა და ღვედისაგან; ამიტომ, სისტემის მოძრაობის რაოდენობა იქნება:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 + \vec{Q}_3$$

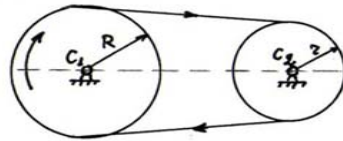
ორივე ბორბლის სიმძიმის ცენტრი მოთავსებულია მათი ბრუნვის ღერძებზე, რომლებიც უძრავია, ამიტომ  $v_{c1} = 0$ ,  $v_{c2} = 0$ , და მივიღებთ:

$$Q_1 = m_1 v_{c1} = 0,$$

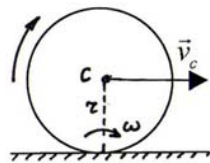
$$Q_2 = m_2 v_{c2} = 0.$$

$Q_3$  წარმოადგენს ღვედის მოძრაობის რაოდენობას. ღვედი განლაგებულია კორიზონტალური 42 ს მიმართ სიმეტრიულად. ღვედის ნაწილაკების მასებიც  $m$ -ის სიმეტრიულად არიან განლაგებულნი, ხოლო ამ ნაწილაკების სიჩქარეები ყველანი ერთმანეთის ტოლია და სიმეტრიულ ნაწილებში ურთიერთსაწინააღმდეგო მიმართულება აქვთ. ამიტომ, ღვედის ყოველი  $m$  მასის ნაწილაკის  $mv$  მოძრაობის რაოდენობისათვის მოიძებნება იმავე  $m$  მასის სიმეტრიული ნაწილაკის  $-mv$  მოძრაობის რაოდენობა და მათი ჯამი 0-ის ტოლი იქნება. მაშასადამე, მთლიანი ღვედის მოძრაობის რაოდენობა  $Q_3 = 0$ .

მივიღეთ, რომ ღვედური გადაცემის მოძრაობის რაოდენობა ნულის ტოლია:  $Q = 0$ .



ნახ. 50.



ნახ. 51.

**ამოცანა 7.4.**  $P=100$  კგ წონის და  $r=50$  სმ რადიუსის ბორბალი რელსზე გორავს სრიალის გარეშე და აკეთებს 60 ბრ/წთ-ს. გამოთვალეთ ბორბლის მოძრაობის რაოდენობა.

**ამოსნა.** ბორბალი ასრულებს ბრტყელ თანაბარ ბრუნვას ( $n=60$  ბრ/წთ). ბრუნვის მყის ცენტრია K წერტილი. ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იქნება  $\omega = \pi n / 30$ . ეს არის ბრუნვის მყის K ცენტრის გარშემო შემობრუნების კუთხური სიჩქარე. ბორბალი ერთგვაროვანია. მისი სიმძიმის C ცენტრი მოძრაობს  $v_c = \omega r$  სიჩქარით.

ბორბლის წერტილები ბრუნვის K ცენტრის მიმართ მოძრაობენ სხვადასხვა რადიუსიან წრეწირებზე. ამ წერტილების სიჩქარეების ვექტორები მიმართულია ამ წრეწირების მხებების გასწვრივ; ამიტომ სხვადასხვა წერტილის მოძრაობის რაოდენობას აქვს სხვადასხვა მიმართულება. მათი ნაკრები ვექტორი  $\vec{Q}$  მიმართულია მასების ცენტრის სიჩქარის მიმართულებით და სიდიდით იქნება:

$$Q = mv_c = P / g \cdot \pi n / 30 = 100 \cdot \pi \cdot 60 \cdot 50 / 980 \cdot 30 = 10,2\pi \text{ კგ/წმ.}$$

პასუხი:  $Q = 10,2\pi$  კგ/წმ.

**ამოცანა 7.5.** კორიზონტალურ A ბაქანზე, რომელიც მოძრაობს

$v_0$  სიჩქარით, მოძრაობს B ურიკა ფარდობითი  $u_0$  სიჩქარით. გარკვეულ მომენტში ურიკა დაამუხრუჭეს. განსაზღვრეთ ურიკას გაჩერების შემდეგ ბაქანის ურიკასთან ერთად მოძრაობის საერთო  $v$  სიჩქარე, თუ M - ბაქანის მასაა, ხოლო m - ურიკას მასა. ურიკას და ბაქანის ბორბლების მასები უგულებელყავით.

**ამოსნა.** სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან (ბაქანი და ურიკა). ბაქანი და ურიკა მოძრაობენ წრფივად, მუდმივი სიჩქარით, ანუ ინერციულად;

ეს ნიშნავს, რომ სისტემაზე გარე ძალები არ მოქმედებენ. ამ შემთხვევაში ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის შენახვის კანონს, ე.ი. სისტემის მოძრაობის რაოდენობა წარმოადგენს მუდმივ სიდიდეს:

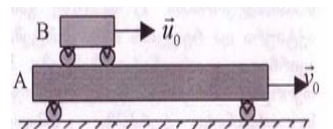
$$\vec{Q}_0 = \vec{Q} = \text{const}. \quad (ა)$$

$\vec{Q}_0$  არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერებამდე:

$$\vec{Q}_0 = \vec{Q}_A + \vec{Q}_B.$$

ვინაიდან  $\vec{v}_0 \parallel \vec{u}_0$ , ე.ი.  $\vec{Q}_A \parallel \vec{Q}_B$ , ამიტომ  $Q_0 = Q_A + Q_B$ . (ბ)

ბაქანის სიჩქარის სიდიდეა  $v_0$ , მაშასადამე  $Q_A = Mv_0$ ; ურიკას აბსოლუტური სიჩქარის სიდიდეა  $v_0 + u_0$ , ამიტომ



ნახ. 52.

$$Q_B = m(v_0 + u_0).$$

ამ მნიშვნელობების შეტანით (ბ) - ში, მივიღებთ

$$Q_0 = Mv_0 + m(v_0 + u_0). \quad (გ)$$

(ა) ტოლობაში  $\vec{Q}$  არის სისტემის მოძრაობის რაოდენობა ურიკას გაჩერების შემდეგ; ე.ი. ურიკა და ბაქანი შეგვიძლიან განვიხილოთ, როგორც ერთი მთლიანი სხეული მასით  $(M+m)$ , რომელიც მოძრაობს გადატანითად  $v$  სიჩქარით; მაშასადამე  $Q = (M+m)v$ . (დ)

(ა) ტოლობის თანახმად  $Q_0 = Q$ . შევიტანოთ აქ (გ) და (დ) მნიშვნელობები, მივიღებთ:  $Mv_0 + m(v_0 + u_0) = (M+m)v$ ;

აქედან:  $v = \frac{v_0 + m / (M+m) \cdot u_0}{1}$  პასუხი:  $v = v_0 + \frac{m}{M+m} \cdot u_0$ .

**ამოცანა 7.6.**  $m = 2$  კგ მასის თავისუფალი ნივთიერი წერტილი მოძრაობს წრფეზე;  $t = 6$  წმ-ის განმავლობაში მოძრაობის მიმართულებით მასზე მოქმედებს მუდმივი ძალა  $F = 10$  ნ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის სიჩქარის ნაზრდი ძალის მოქმედების დროის შუალედში.

პასუხი:  $\Delta v = 30$  მ/წმ.

**ამოცანა 7.7.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე მდებარე სხეულს მიანიჭეს საწყისი  $v_0 = 4$  მ/წმ სიჩქარე ზევით. განსაზღვრეთ, რა დროის შემდეგ მიაღწევს სხეული უდიდეს სიმაღლეს ამდართზე?

პასუხი:  $t = 0,815$  წმ.

**ამოცანა 7.8** ბავშვი ეშვება მარხილით ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ ფერდობზე საწყისი სიჩქარის გარეშე. განსაზღვრეთ მარხილის სიჩქარე 4 წმ-ის შემდეგ, თუ მოძრაობისას მარხილის თოვლზე სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $0,04$ .

პასუხი:  $v \approx 18$  მ/წმ.

**ამოცანა 7.9.** ავტომანქანა “ნივა” მოძრაობს თანაბრად წრფივ ჰორიზონტალურ გზაზე 72 კმ/სთ სიჩქარით. განსაზღვრეთ ავტომანქანის მოძრაობის რაოდენობის ნაკრები ვექტორი და მანქანაზე მოდებული გარე ძალების სრული იმპულსი დროის ნებისმიერ სასრულ შუალედში, თუ ავტომანქანის მარის მასა მძღვრთად არის 1300 კგ, ხოლო თითოეული ბორბალის მასა 20 კგ.

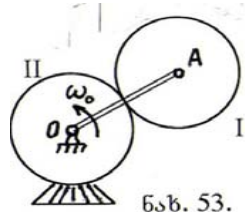
პასუხი:  $\vec{v} = 1300$  კგმ/წმ. გარე ძალების

იმპულსების

$\vec{v} = 1300$  კგმ/წმ. გარე ძალების

0.

**ამოცანა 7.10.**  $r$  რადიუსის ერთგვაროვანი I კბილანა გორავს იმავე რადიუსის უძრავ II კბილანაზე OA მრუდმხარას საშუალებით, რომელიც ბრუნავს 0 წერტილის გარშემო მუდმივი  $\omega_0$  კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ სისტემის მოძრაობის რაოდენობა, თუ I კბილანის მასაა  $m_1$ , ხოლო

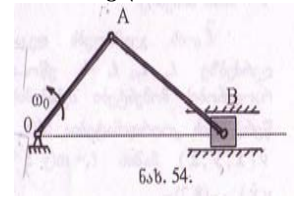


ნახ. 53.

მრუდმხარა წარმოადგენს  $m_2$  მასის ერთგვაროვან ღეროს.

პასუხი:  $Q = \omega_0 r (2m_1 + m_2)$ ;  $\vec{Q} \perp OA$ .

**ამოცანა 7.11.**  $P_1$  წონის და  $OA = a$  სიგრძის მრუდმხარა  $\omega_0$  კუთხური სიჩქარით ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო და მოძრაობაში მოჰყავს  $P_2$  წონის AB ბარბაცა და  $P_3$  წონის B ცოცია. განსაზღვრეთ მექანიზმის მოძრაობის რაოდენობა იმ შემთხვევებში, როცა OA მრუდმხარა: 1) 0B წრფის მართობულია; 2) მიმართულია 0B-ს გასწვრივ.



ნახ. 54.

პასუხი: 1)  $Q_1 = Q_3 = a \omega_0 (P_1 + 2P_2 + 2P_3) / 2g$ ;

2)  $Q_2 = Q_4 = a \omega_0 (P_1 + P_2) / 2g$ .

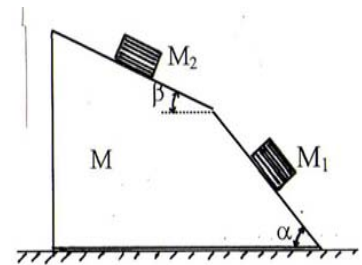
**ამოცანა 7.12.** გლუვ, ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე მოთავსებული P წონის M პრიზმის

წახნაგებზე ერთდროულად ქვევით იწეებს მოძრაობას ორი  $M_1$  და  $M_2$  სხეული, რომელთა

წონებია შესაბამისად  $P_1$  და  $P_2$ . ჩათვალოთ, რომ  $\alpha$  და  $\beta$  კუთხეები ცნობილია და განსაზღვრეთ M პრიზმის  $v$  სიჩქარე  $M_1$  და  $M_2$

სხეულების ფარდობითი  $v_1$  და  $v_2$  სიჩქარეებზე დამოკიდებულებით.

პასუხი:  $v = (P_1 v_1 \cos \alpha + P_2 v_2 \cos \beta) / (P + P_1 + P_2)$



ნახ. 55.

## § 8. მოძრაობის კოორდინატის მომენტის

0 45 5

ნივთიერი წერტილის ან წერტილთა სისტემის (სხეულის) ბრუნვითი მოძრაობის დასახასიათებლად შემოაქვთ მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცნება.

$m$  მასის ნივთიერი M წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი 0 ცენტრის მიმართ ეწოდება ვექტორულ სიდიდეს:  $\vec{l}_0 = \vec{r} \times m \vec{v}$ . (8.1)

აქ  $\vec{r}$  - მოძრავი წერტილის რადიუს - ვექტორია 0 ცენტრის მიმართ;  $\vec{v}$  - მისი სიჩქარე.

$\vec{l}_0$ -ის გეგმილებს დეკარტის კოორდინატთა  $Oxyz$  სისტემის ღერძებზე  $l_x, l_y, l_z$  -ს ეწოდება ნივთიერი წერტილის მოძრაობის რაოდენობის მომენტები შესაბამისად  $x, y, z$  ღერძების მიმართ. თუ  $M$  წერტილის კოორდინატებია  $M(x, y, z)$ , ხოლო  $\vec{v}$  სიჩქარის გეგმილება  $\vec{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ , მაშინ

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}); \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}); \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (8.2)$$

ნივთიერ წერტილთა  $\{M_k\}$  სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტი (კინეტიკური მომენტი)  $0$  ცენტრის მიმართ:

$$\vec{l}_0 = \sum (\vec{r}_k \times m_k \vec{v}_k); \quad (8.3)$$

აქ  $\vec{r}_k$  - სისტემის  $M_k$  წერტილის რადიუს - ვექტორია  $0$  ცენტრის მიმართ,  $\vec{v}_k$  - მისი სიჩქარე.

მყარი სხეულის უძრავი  $Oz$  ღერძის გარშემო  $\omega$  კუთხური სიჩქარით ბრუნვისას მისი კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის მიმართ გამოითვლება ფორმულით:

$$l_z = J_z \omega, \quad (8.4)$$

სადაც  $J_z$  - სხეულის ინერციის მომენტია ბრუნვის  $Oz$  ღერძის მიმართ.

კინეტიკური მომენტის თეორემა:

$$\text{წერტილისათვის: } d\vec{l}_0 / dt = \vec{L}_0; \quad (8.5)$$

$$\text{სისტემისათვის: } d\vec{l}_0 / dt = \vec{L}_0^{\text{ს}}; \quad (8.6)$$

აქ  $\vec{L}_0^{\text{ს}}$  არის სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი  $0$  ცენტრის მიმართ:  $\vec{L}_0^{\text{ს}} = \sum \text{მომ}_0 \vec{F}_k^{\text{ს}} = \sum (\vec{r}_k \times \vec{F}_k^{\text{ს}})$ . (8.7)

საკოორდინატო ღერძებზე (8.5) ტოლობის დაგეგმილებით მივიღებთ:

$$dl_x / dt = L_x^{\text{ს}}; \quad dl_y / dt = L_y^{\text{ს}}; \quad dl_z / dt = L_z^{\text{ს}}. \quad (8.8)$$

$L_x^{\text{ს}}, L_y^{\text{ს}}, L_z^{\text{ს}}$  - გარე ძალების ნაკრები მომენტებია შესაბამისად  $x, y, z$  ღერძების მიმართ.

თუ რაიმე  $0$  ცენტრის (ან  $46$ ) მიმართ  $\vec{L}_0^{\text{ს}} = 0$  ( $L_z^{\text{ს}} = 0$ ),

მაშინ იმავე ცენტრის (ან ღერძის) მიმართ  $\vec{l}_0 = \text{const}$  ( $l_z = \text{const}$ ) და ადგილი აქვს სისტემის მოძრაობის რაოდენობის მომენტის (კინეტიკური მომენტის) შენახვის კანონს; ეს ნიშნავს, რომ მოძრაობის რაოდენობის მომენტი, როგორც სიდიდით, ასევე მიმართულებით რჩება მუდმივი:

$$l_0^0 = l_0^{\text{ს}}; \quad (l_z^0 = l_z^{\text{ს}}). \quad (8.9)$$

უძრავი  $Oz$  ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:

$$J_z d^2\varphi / dt^2 = L_z^{\text{ს}}, \quad \text{ანუ } J_z \varepsilon = L_z^{\text{ს}}. \quad (8.10)$$

$\varepsilon$  - სხეულის ბრუნვის კუთხური აჩქარებაა.

### ამოცანა 8.1. ნივთიერი $A$ წერტილი მოძრაობს ელიფსურ

ტრაექტორიაზე მიზიდულობის  $\vec{F}$  ძალის მოქმედებით, რომელიც მიმართულია ელიფსის ერთ-ერთ ფოკუსზე თანამთხვეველ  $O_1$  ცენტრისაკენ. ელიფსის ნახევარღერძებია  $a = 5$  სმ და  $b = 3$  სმ. განსაზღვრეთ ამ წერტილის  $v_2$  სიჩქარე  $A_2$  მდებარეობაში, თუ  $A_1$  მდებარეობაში მისი სიჩქარეა  $v_1 = 27$  სმ/წმ.

ამოხსნა. წერტილის მოძრაობისას

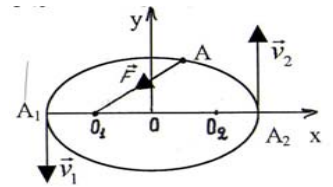
მიზიდულობის  $\vec{F}$  ძალის ფუძე ყოველთვის გადის ერთ და იმავე  $O_1$  წერტილში, ამიტომ  $L_0 = \text{მომ}_0 \vec{F} = 0$ . ეს ნიშნავს, რომ ადგილი აქვს მოძრაობის რაოდენობის მომენტის შენახვის კანონს:  $l_0^{A1} = l_0^{A2}$ ,

$$\text{ანუ } mv_1 \cdot A_1 O_1 = mv_2 \cdot A_2 O_1. \quad (*)$$

მოცემულობის თანახმად  $A_1 O_1 = a = 5$ ,  $B O_1 = b = 3$ . ელიფსის თვისების თანახმად  $O O_1 = c = \sqrt{a^2 - b^2} = 4$ . ამიტომ  $A_1 O_1 = a - c = 1$ ;  $A_2 O_1 = a + c = 9$ .

თუ გაავითვალისწინებთ მიღებულ მნიშვნელობებს, (\*) ტოლობიდან მივიღებთ:  $v_2 = v_1 \cdot A_1 O_1 / A_2 O_1 = 9$ .

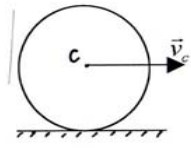
პასუხი:  $v_2 = 9$  სმ/წმ.



ნახ. 56.

### ამოცანა 8.2. $M$ მასის და $R$ რადიუსის

ერთგვაროვანი დისკო უსრიალოდ მიგორავს წრფივ ჰორიზონტალურ რელსზე. განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური მომენტი მისი ბრუნვის მყისი ცენტრის მიმართ, თუ დისკოს  $C$  ცენტრის  $\vec{v}_c$  სიჩქარე მუდმივია.



ნახ. 57.

ამოხსნა. დისკოს ბრუნვის მყისი ცენტრია

რელსთან შეხების  $O$  წერტილი. გავავლოთ  $O$  წერტილზე ნახაზის სიბრტყის მართობული  $Oz$  ღერძი, რომელიც იქნება ბრუნვის მყისი ღერძი. ამ ღერძის მიმართ დისკოს კინეტიკური მომენტი იქნება (იხ. (8.4) ფორმულა):  $l_0 = J_0 \omega$ . (\*)  
სადაც  $J_0$  არის დისკოს ინერციის მომენტი  $Oz$  ღერძის მიმართ, ხოლო  $\omega$  - ამ ღერძის გარშემო დისკოს ბრუნვის მყისი კუთხური სიჩქარე. თუ ჩავთვლით, რომ დისკოს  $C$  ცენტრზე გავლებულია  $Oz$ -ის პარალელური  $Cz_1$  ღერძი, მაშინ ჰიუგენს-შტაინერის თეორემის თანახმად:

$$J_0 = J_c + M R^2 = 1/2 \cdot MR^2 + MR^2 = 3/2 \cdot MR^2.$$

ამოცანის პირობის თანახმად  $\vec{v}_c = \text{const}$ ; ამასთანავე  $v_c = \omega_0 R$ . აქედან

$\omega_0 = v_c / R$ . შევიტანოთ  $J_0$ -ის და  $\omega_0$ -ის მნიშვნელობები (ა) ტოლობაში; გვექნება:  $l_0 = J_0 \omega_0 = 3/2 \cdot MR^2 \cdot v_c / R = 3/2 \cdot MR v_c$ .

პასუხი:  $l_0 = 3/2 \cdot MR v_c$ .

**ამოცანა 8.3.**

a სიგრძის და P წონის ერთგვაროვანი წვრილი ჰორიზონტალური OA ღეროს ბოლოში მიმაგრებულია AC = r რადიუსის და Q წონის ერთგვაროვანი დისკო, რომლის სიბრტყე ვერტიკალურია, ხოლო AC რადიუსი წარმოადგენს OA-ს გაგრძელებას. სხეული ბრუნავს ვერტიკალური Oz ღერძის გარშემო ω კუთხური სიჩქარით. განსაზღვრეთ სხეულის კინეტიკური მომენტი ამ ღერძის მიმართ. საკისარში ხახუნი უგულებელყავით.

**ამოხსნა.**

სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: OA ღეროსა და C დისკოსაგან.

ამ სისტემის კინეტიკური მომენტი Oz ღერძის მიმართ მოიცემა ტოლობით:

$$L_z = L_z^{OA} + L_z^C \quad (ა)$$

OA ღეროს კინეტიკური მომენტი:

$$L_z^{OA} = J_z^{OA} \omega = Pa^2 \omega / 3g \quad (ბ)$$

C დისკოს კინეტიკური მომენტი Oz

ღერძის მიმართ:  $L_z^C = J_z^C \omega$  (გ)

აქ  $J_z^C = J_d + m_c \cdot OC^2$ ; d - დისკოს დიამეტრია;  $OC = a + r$ ;  $m_c = Q/g$ ;  $J_d = Qr^2/4g$ ; ამიტომ:  $J_z^C = Qr^2/4g + Q(a+r)^2/g$ .

ამ მნიშვნელობის შეტანით (გ)

ტოლობაში, გვექნება:

$$L_z^C = Q/4g \cdot [r^2 + 4(a+r)^2] \omega \quad (დ)$$

(ბ) და (დ) მნიშვნელობები შევიტანოთ (ა) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$L_z = Pa^2 \omega / 3g + Q/4g \cdot [r^2 + 4(a+r)^2] \omega$$

საბოლოოდ  $L_z = \omega / 12g \cdot [4Pa^2 + 3Qr^2 + 12Q(a+r)^2]$ .

**ამოცანა 8.4.**

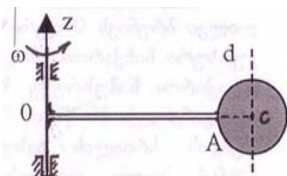
საერთო O ღერძზე ჩამოცმულია ორი ერთმანეთთან ხისტად შეერთებული r1 და r2 (r1 < r2) რადიუსის ბლოკები, რომლებიც წარმოადგენენ ერთგვაროვან, შესაბამისად Q1 და Q2 წონის დისკოებს. ბლოკებზე დახვეული თოკების ბოლოებში დაკიდებული P1 და P2 წონის M1 და M2 ტვირი 48 ელებით ბლოკები იწყებენ ბრუნვას.

განსაზღვრეთ ბლოკების ბრუნვის კუთხური აჩქარება. საკისარში ხახუნი უგულებელყავით.

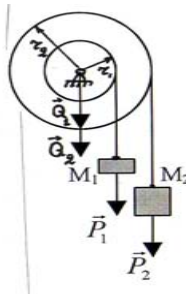
**ამოხსნა.**

ბლოკების ბრუნვის კუთხური ε აჩქარების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ უძრავი O ღერძის გარშემო მყარი სხეულის ბრუნვის (8.10) განტოლება:  $J_0 \varepsilon = L_0^3$ . (ა)

სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან: ორი ბლოკისა და ორი ტვირთისაგან. ბრუნვის Oz ღერძი გაკავალთმცენტრში ნახაზის სიბრტყის მართობულად. მაშინ სისტემის ინერციის მომენტი ამ ღერძის მიმართ



ნახ. 58.



ნახ. 59.

იქნება:

$$J_0 = Q_1 r_1^2 / 2g + Q_2 r_2^2 / 2g + P_1 r_1^2 / g + P_2 r_2^2 / g = [(Q_1 + 2P_1) r_1^2 + (Q_2 + 2P_2) r_2^2] / 2g \quad (ბ)$$

სისტემაზე მოქმედებს ოთხი ძალა: Q1, Q2, P1, P2: აქედან, ორი ძალა - Q1 და Q2 მოდებულნი არიან ბრუნვის O ცენტრში; ამიტომ სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების ნაკრები მომენტი O ცენტრის მიმართ იქნება:

$$L_0^3 = P_1 r_1 + P_2 r_2 \quad (გ)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (ბ) და (გ) გამოსახულებებს, მაშინ (ა) ტოლობიდან განისაზღვრება ბლოკების ბრუნვის კუთხური აჩქარება:

$$\varepsilon = L_0^3 / J_0 = 2g(P_1 r_1 + P_2 r_2) / [(Q_1 + 2P_1) r_1^2 + (Q_2 + 2P_2) r_2^2]$$

**ამოცანა 8.5.** R რადიუსის და P წონის

ერთგვაროვანი დისკო ω კუთხური სიჩქარით ბრუნავს ვერტიკალური z ღერძის გარშემო, რომელიც გადის დისკოს ფერსოზე მდებარე A წერტილზე და დისკოს სიბრტყის მართობულია.

გამოთვალეთ დისკოს კინეტიკური მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ.

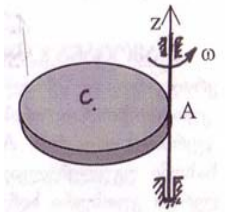
პასუხი:  $\lambda = 3P/2g \cdot R^2 \omega$ .

**ამოცანა 8.6.**

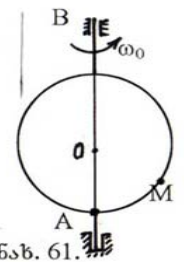
P წონის ერთგვაროვანი დისკო ბრუნავს ვერტიკალური AB დიამეტრის გარშემო მუდმივი ω0 კუთხური სიჩქარით. A მდებარეობიდან დისკოს ფერსოს გასწვრივ დაიწყო მოძრაობა Q წონის M წერტილმა.

განსაზღვრეთ დისკოს ბრუნვის კუთხური ω სიჩქარე იმ მომენტში, როცა M წერტილი ბრუნვის AB ღერძიდან დაშორებული იქნება უდიდესი მანძილით. საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით.

პასუხი:  $\omega = P \omega_0 / (P + 4Q)$ .



ნახ. 60.

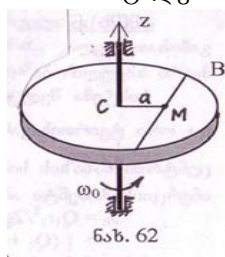


ნახ. 61.

**ამოცანა 8.7.**

P წონის და r 49 ერთგვაროვანი ჰორიზონტალური დისკო ბრუნავს მის გამავალი ვერტიკალური Cz ღერძის გარშემო მუდმივი კუთხური ω0 სიჩქარით. დისკოს ფერსოზე მდებარე A წერტილიდან ქორდის გასწვრივ A-დან B-კენ უსაწყისო ფარდობითი სიჩქარით მოძრაობს Q წონის M წერტილი.

განსაზღვრეთ დისკოს კუთხური სიჩქარე იმ მომენტში, როცა წერტილი იმყოფება დისკოს ცენტრიდან უმოკლეს a მანძილზე, თუ ამ მომენტში აქვს ფარდობითი u სიჩქარე. საკისრებში ხახუნი



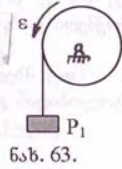
ნახ. 62.

უგულებელყავით.

პასუხი:  $\omega = [(P + 2Q) r^2 \omega_0 - 2Qau] / (Pr^2 + 2Qa^2)$ .

**ამოცანა 8.8.**  $P_2$  წონის და  $r$  რადიუსის ცილინდრულ დოლზე დახვეული თოკის ბოლოზე დაკიდებულია  $P_1$  წონის ტვირთი. ხახუნი და თოკის მასა უგულებელყავით და განსაზღვრეთ დოლის ბრუნვის კუთხური აჩქარება  $\epsilon$ .

პასუხი:  $\epsilon = 2P_1g / r(2P_1 + P_2)$ .

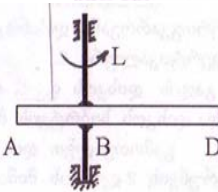


ნახ. 63.

**ამოცანა 8.9.**  $m = 1$  კგ მასის და  $a = 2$  მ სიგრძის

ერთგვაროვანი წვრილი წრფივი AD ღერო მართი კუთხით ხისტად არის მიმაგრებული ვერტიკალურ ღერძთან, ისე, რომ  $AB = a/3$ . საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ღეროს კუთხური სიჩქარე, თუ ღეროზე მოქმედებს მახრუნებელი მომენტი  $L = 4$  ნ მ.

პასუხი:  $\epsilon = 9$  წმ<sup>2</sup>.



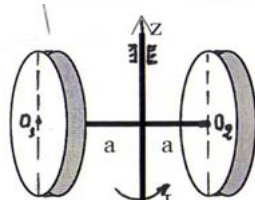
ნახ. 64.

**ამოცანა 8.10.** ორი ერთგვაროვანი,

თითოეული  $P$  წონის და  $R$  რადიუსის დისკო, რომლებიც მოთავსებულია  $2a$  სიგრძის უწონად  $O_1, O_2$  ღეროს პერპენდიკულარულად ვერტიკალურ სიბრტყეში, ბრუნავენ ვერტიკალური  $Oz$  ღერძის გარშემო მახრუნებელი  $L$  მომენტის მოქმედებით.

საკისრებში ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ დისკოების ბრუნვის კუთხური აჩქარება.

პასუხი:  $\epsilon = 2gL / P(R^2 + 4a^2)$ .

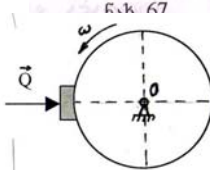
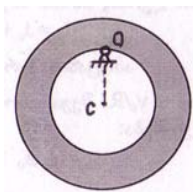


ნახ. 66.

**ამოცანა 8.11.** ერთ, რგოლი შემოსაზღვრულია ორი კი 50 კლი  $r$  და  $R$  ( $r < R$ ) რადიუსებიანი წრეწიოვით. იგი ირხევა ჰორიზონტალური ღერძის გარშემო, რომელიც გადის  $r$  რადიუსიანი წრეწირის  $O$  წერტილში რგოლის სიბრტყის მართობულად (ე.ი. რგოლი წარმოადგენს ფიზიკურ ქანქარას).

წინააღმდეგობის ძალები უგულებელყავით და განსაზღვრეთ რგოლის მცირე რხევის პერიოდი.

პასუხი:  $T = 2\pi\sqrt{(R^2 + 3r^2) / 2gr}$ .



ნახ. 68

**ამოცანა 8.12.**  $m = 10$  კგ მასის და  $R = 0,1$  მ რადიუსის ცილინდრული ლილვი ბრუნავს  $\omega$  ღერძის გარშემო  $n = 600$  ბრ/წთ კუთხური სიჩქარით. როგორი  $Q$  ძალით უნდა მივაჭიროთ სამუხრუჭე ხუნდი ლილვს, რომ იგი გაჩერდეს  $10$  წმ-ის შემდეგ, თუ ლილვზე ხუნდის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f = 0,4$ , ხოლო ლილვის ინერციის რადიუსი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის  $\rho = 0,3$  მ. ლილვის საყრდენში ხახუნი უგულებელყავით. განსაზღვრეთ აგრეთვე ლილვის სრული ბრუნვათა  $N$  რიცხვი დამუხრუჭების დაწყების მომენტიდან გაჩერებამდე.

პასუხი:  $Q = 45\pi$  ნ;  $N = 50$ .

### § 9. კინეტიკური ენერჯის ცვლილების თეორემა

კინეტიკური ენერჯია არის სკალარული დადებითი სიდიდე და წარმოადგენს სხეულის როგორც გადატანითი, ასევე ბრუნვითი მოძრაობის დინამიკურ მახასიათებელს; იგი ახასიათებს მექანიკური მოძრაობის შესაძლებლობას გარდაიქმნას სხვა სახის მოძრაობის ექვივალენტური რაოდენობის ენერჯიაში (პოტენციურ ენერჯიაში, სითბოში და სხვა).

$v$  სიჩქარით მოძრაობის მასის ნივთიერი წერტილის კინეტიკური ენერჯია:

$$T = mv^2 / 2; \tag{9.1}$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემის კინეტიკური ენერჯია:

$$T = \sum m_k v_k^2 / 2; \tag{9.2}$$

თუ სისტემა ასრულებს როტულ მოძრაობას, მაშინ კინეტიკური ენერჯია განისაზღვრება კენივის ფორმულით:

$$T = Mv_c^2 / 2 + T_{\text{rot}}; \tag{9.3}$$

აქ  $M$  – სისტემის მასაა,  $v_c$  – სისტემის მასების ცენტრის სიჩქარე;  $T_{\text{rot}}$  – წერტილთა სისტემის ფარდობითი მოძრაობის კინეტიკური ენერჯიაა იმ კოორდინატთა სისტემის მიმართ, რომელიც ასრულებს წარმტან-გადატანითი მოძრაობას მის მასების ცენტრთან ერთად.

მყარი სხეულის გადატანითი მოძრაობისას:  $T = Mv_c^2 / 2; \tag{9.4}$

უძრავი  $Oz$  ღერძის გარშემო სხეულის ბრუნვისას:  $T = J_z \omega^2 / 2; \tag{9.5}$

აქ  $J_z$  – სხეულის ინერციის მომენტი ბრუნვის  $Oz$  ღერძის მიმართ;  $\omega$  – ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

სხეულის ბრტყელი მოძრაობისას:  $T = Mv_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2; \tag{9.6}$

აქ  $J_c$  არის სხეულის ინერციის მომენტი მასების  $C$  ცენტრზე გამავალი ბრუნვის მყისი ღერძის მიმართ.

წერტილზე მოდებული ძალის ელემენტარული მუშაობა:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Xdx + Ydy + Zdz; \tag{9.10}$$

ძალის სრული მუშაობა წერტილის სასრულ s გადაადგილებაზე:

$$A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_s (Xdx + Y dy + Zdz); \quad (9.11)$$

სხეულის სიმძიმის ძალის მუშაობა:  $A = \pm P \cdot h_c$ , (9.12)

P – სხეულის სიმძიმის ძალა,  $h_c$  – სხეულის მასების ცენტრის ვერტიკალური გადაადგილება.

Oz ღერძის გარშემო მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალების მუშაობა:

$$A = L_z \varphi; \quad (9.13)$$

$L_z$  – მბრუნებელი მომენტი,  $\varphi$  – სხეულის შემობრუნების კუთხე.

ღრეკადი  $F = -c x$  ძალის მუშაობა წრფივი გადაადგილებისას:

$$A = c (x_1^2 - x_2^2)/2. \quad (9.14)$$

გორვისადმი წინაღობის ძალის მუშაობა:  $A = -\delta N \varphi$ ; (9.15)

$\delta$  – გორვის ხახუნის კოეფიციენტი, N – ნორმალური რეაქციის ძალა,  $\varphi$  – სხეულის შემობრუნების კუთხე.

კინეტიკური ენერჯის ნაზრდის თეორემა:

$$\text{წერტილისათვის: } mv^2/2 - mv_0^2/2 = A = \int_s \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (9.16)$$

აქ  $v_0$  და  $v$  – შესაბამისად წერტილის საწყისი და საბოლოო სიჩქარეა s გზაზე.

A – F ძალის მიერ s გზაზე შესრულებული მუშაობა.

$$\text{სისტემისათვის: } T - T_0 = A^{\text{მ}} + A^{\text{ბ}}. \quad (9.17)$$

უცვლადი სისტემისათვის  $A^{\text{მ}} = 0$ .

სხეულის თანაბარი მოძრაობისას მამოძრავებელი ძალის მუშაობა ტოლია წინაღობის ძალების მუშაობისა.

წერტილზე მოდებული ძალის სიმძლავრე:

$$N = dA/dt = \vec{F} \cdot \vec{v} = X \dot{x} + Y \dot{y} + Z \dot{z}. \quad (9.18)$$

$$\text{მბრუნავ სხეულზე მოდებული ძალისათვის: } N = L_z \omega. \quad (9.19)$$

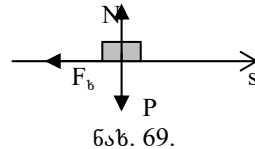
52

**ამოცანა 9.1.** არაგლუვ ვერტიკალურ სიბრტყეზე სხეულმა მიიღო საწყისი  $v_0$  სიჩქარე, გაიარა  $s=1$  მ მანძილი და გაჩერდა. განსაზღვრეთ სხეულის საწყისი სიჩქარე, თუ სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f=0,1$ .

**ამოხსნა.** გამოვიყენოთ წერტილის კინეტიკური ენერჯის ნაზრდის ფორმულა:

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = A. \quad (*)$$

აქ  $v$  – წერტილის საბოლოო სიჩქარეა:  $v = 0$ . A – წერტილზე მოდებული ძალების მუშაობა s გზაზე. წერტილზე მოქმედებს სამი ძალა:



ნახ. 69.

სხეულის სიმძიმის ძალა- P, სრიალის ხახუნის ძალა-  $F_b$ , ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N. ამ ძალების s გზაზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ  $A = -F_b s$ . ხახუნის ძალა  $F_b = fN = fP$ .

მაშასადამე  $A = -f P s = -fmg s$ . თუ გავითვალისწინებთ მდებულ მნიშვნელობებს, (\*) ტოლობიდან გვექნება:  $v_0 = \sqrt{2fgs} = 1,4$  მ/წმ.

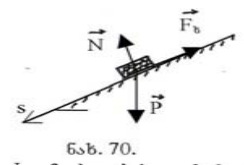
**ამოცანა 9.2.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული. ხახუნის კოეფიციენტი უდრის 0,2 –ს. როგორი სიჩქარე ექნება სხეულს მოძრაობის დაწყებიდან 2 მ-ის გავლის შემდეგ.

**ამოხსნა.** პირობის თანახმად:  $v_0 = 0$ ;  $f = 0,2$ ;  $s = 2$ ;  $v = ?$  გამოვიყენოთ კინეტიკური ენერჯის ნაზრდის თეორემა:  $mv^2/2 - mv_0^2/2 = A$ . (\*)

ამოვთვალოთ სხეულზე მოქმედი ძალების მუშაობა დახრილ სიბრტყეზე s მანძილზე გადაადგილებისას. სხეულზე მოქმედებს სამი ძალა: სხეულის სიმძიმის ძალა- P, სრიალის ხახუნის ძალა-  $F_b$ , ზედაპირის ნორმალური რეაქციის ძალა - N. ამ ძალების s გზაზე დაგეგმილების შედეგად მივიღებთ, რომ  $A = (P \sin \alpha - F_b) s$ . ხახუნის ძალა  $F_b = f N = fP \cos \alpha$ . მაშასადამე  $A = (P \sin \alpha - fP \cos \alpha) s$ . თუ გავითვალისწინებთ მდებულ მნიშვნელობებს, (\*) ტოლობიდან გვექნება ( $P = mg$ ):

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha) s.$$

$$\text{აქედან } v = \sqrt{2g (\sin \alpha - f \cos \alpha) s} = 3,58. \quad v = 3,58 \text{ მ/წმ.}$$



ნახ. 70.

**ამოცანა 9.3** ბურთულა, რომელსაც აქვს საწყისი  $v_0=14$  მ/წმ სიჩქარე, ვარდება  $h_1=1,8$  მ სიმალიდან ვერტიკალურად ქვევით ჰორიზონტალურ იატაკზე და აირეკლება მისგან ზევით.

განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარე იატაკიდან  $h_2=6,8$  მ სიმაღლეზე, თუ მხედველობაში არ მოვიტოვოთ ჰაერის წინააღობას და მექანიკური ენერჯის სხვა დანაკარგებს 53

**ამოხსნა.** ბურთულაზე მოქმედებს მხოლოდ სიმძიმის ძალა  $P = mg$ .

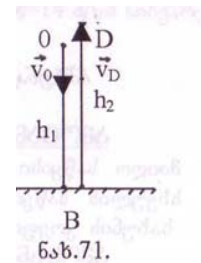
ბურთულის ვარდნისას ვერტიკალის მონაკვეთზე:

$$mv_B^2/2 - mv_0^2/2 = mgh_1;$$

$$\text{აქედან: } v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1} = 15,2 \text{ მ/წმ;}$$

იატაკიდან არეკვლისას ვერტიკალის მონაკვეთზე მოძრაობისას  $v_B$  წარმოადგენს სიჩქარეს, ხოლო საბოლოო სიჩქარეა  $v_D$ .

გზის  $BD = h_2$  მონაკვეთზე მოძრაობისას:



ნახ. 71.

$$mv_D^2/2 - mv_B^2/2 = -mgh_2;$$

აქედან:  $v_D = \sqrt{v_B^2 - 2gh_2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$ . პასუხი:  $v_D = 7\sqrt{2}$  მ/წმ.

**ამოცანა 9.4.**

$R = 0,2$  მ რადიუსის და  $M = 20$  კგ მასის ერთგვაროვანი დისკო ჰორიზონტალურ  $Oxy$  სიბრტყეში ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას კანონით:  $x_c = t$ ,  $y_c = t^2$ ,  $\varphi = t^3$  ( $x_c$ ,  $y_c$  - დისკოს  $C$  ცენტრის კოორდინატებია მეტრებში,  $t$  - წამებში,  $\varphi$  - რადიანებში). განსაზღვრეთ დისკოს კინეტიკური ენერგია დროის  $t = 1$  წმ მომენტში.

**ამოხსნა.** დისკო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას;

მისი კინეტიკური ენერგია ასე გამოისახება (იხ. (9.6) ფორმულა):  $T = Mv_c^2/2 + J_c \omega^2/2$ ; (\*)

$v_c$  - დისკოს მასების ცენტრის სიჩქარე:

$$v_c = \sqrt{v_{cx}^2 + v_{cy}^2};$$

$$v_{cx} = dx_c/dt = 1; \quad v_{cy} = dy_c/dt = 2t; \quad v_c = \sqrt{1 + 4t^2};$$

$$t = 1 \text{ წმ მომენტში } v_c = \sqrt{5}$$

დისკოს ინერციის მომენტი მისი მასების  $C$  ცენტრის მიმართ

$$J_c = 1/2 \cdot MR^2 = 0,4 \text{ კგმ}^2.$$

$\omega$  არის  $C$  ცენტრის გარშემო დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე:

$$\omega = d\varphi/dt = 3t^2; \quad t = 1 \text{ წმ მომენტში } \omega = 3 \text{ წმ}^{-1}.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (\*) ტოლობაში, გვექნება:

$$T = 1/2 \cdot 20 \cdot 5 + 1/2 \cdot 0,4 \cdot 3^2 = 51,8. \quad T = 51,8 \text{ ჯოული.}$$

**ამოცანა 9.5.**

$Q$  წონის ლილვზე დახვეული თოკის ბოლოში მიბმულია  $P$  წონის ტვირთი, რომელიც ეშვება ქვევით და თან აბრუნებს ლილვს  $\omega$  კუთხური სიჩქარით. ლილვის რადიუსია  $r$ . განსაზღვრეთ ტვირთისა და ლილვისაგან შედგენილი სისტემის კინეტიკური ენერგია.

**ამოხსნა.** სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან; მისი კინეტიკური ენერგია  $T = T_1 + T_2$ ; (\*)

აქ  $T_1$  - ტვირთის კინეტიკური ენერგია

$$T_2 - \text{ლილვის კინეტიკური ენერგია} \quad 54$$

ტვირთი ასრულებს გადატანით

სიჩქარით:  $v_p = v_k = \omega r$ .

( $k$  არის ლილვის ფერსოზე მდებარე წერტილი, რომელიც მოძრაობს  $r$  რადიუსიან წრეწირზე);

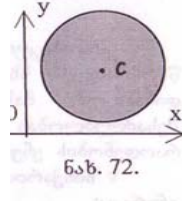
$$T_1 = T_{\text{ტვ}} = 1/2 \cdot m_1 v_p^2 = P/2g \cdot (\omega r)^2 = P\omega^2 r^2 / 2g.$$

ლილვი წარმოადგენს უძრავი  $x$  ღერძის გარშემო მბრუნავ წრიულ ცილინდრულ სხეულს;

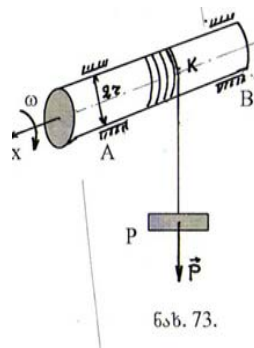
$$\text{ამიტომ: } T_2 = T_{\text{ლილვ}} = 1/2 \cdot J_x \omega^2. \quad (**)$$

აქ  $J_x$  არის ლილვის ინერციის მომენტი ბრუნვის  $x$  ღერძის მიმართ:

$$J_x = 1/2 \cdot m_2 r^2 = Qr^2 / 2g.$$



ნახ. 72.



ნახ. 73.

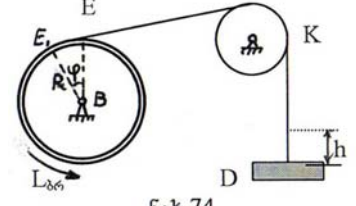
(\*\*) - დან გვექნება:  $T_2 = 1/2 \cdot Qr^2 \omega^2 / 2g = Q/4g \cdot r^2 \omega^2$ .

(\*) - დან მივიღებთ:  $T = T_1 + T_2 = P\omega^2 r^2 / 2g + Q/4g \cdot r^2 \omega^2 = \omega^2 r^2 / 4g \cdot (2P + Q)$ .

პასუხი:  $T = \omega^2 r^2 / 4g \cdot (2P + Q)$ .

**ამოცანა 9.6.**

74-ე ნახაზზე გამოსახულია ჯალამბრის ამწე მექანიზმი.  $m_1$  მასის  $D$  ტვირთი აიწევა ზევით  $C$  ბლოკზე გადაკიდებული  $R$  რადიუსის და  $m_2$  მასის  $B$  დოლზე დახვეული გვარლის საშუალებით. დოლზე მოდებულია მარბუნი  $L_{\text{არ}}$  მომენტი, რომელიც ჩართვის მომენტიდან დოლის მობრუნების  $\varphi$  კუთხის კვადრატის პროპორციულია:  $L_{\text{არ}} = a\varphi^2$ , სადაც  $a$  მუდმივი კოეფიციენტია. განსაზღვრეთ  $D$  ტვირთის სიჩქარე ( $v_D$ ) იმ მომენტში, როცა იგი ავა  $h$  სიმაღლეზე.  $B$  დოლის მასა ჩათვალეთ თანაბრად განაწილებულად მის ფერსოზე.  $C$  ბლოკი  $m_3$  მასის მთლიანი დისკოა. ჩათვალეთ, რომ გვარლი უჭიმადი და უწონადია. საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია.



ნახ. 74.

**ამოხსნა.**  $D$  ტვირთის სიჩქარის განსაზღვრად გამოვიყენოთ ნივთიერი სისტემის კინეტიკური ენერგიის ნაზრდის თეორემა (იხ. (9.17) ფორმულა):

$$T - T_0 = A^{\text{შ}} + A^{\text{ბ}}. \quad (1)$$

რადგანაც საწყის მომენტში სისტემა წონასწორობაშია, ამიტომ  $T_0 = 0$ .

სისტემაში შემავალი სხეულები აბსოლუტურად მყარი სხეულებია; გვარლი უჭიმადი და უწონადია; ამიტომ შიგა ძალების მუშაობათა ჯამი  $A^{\text{შ}} = 0$ . (1) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:  $T = A^{\text{ბ}}$ . (2)

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია ( $T$ ) იმ მომენტში, როცა  $D$  ტვირთი ავა  $h$  სიმაღლეზე.

სისტემა შედგება  $B$  დოლის,  $C$  ბლოკისა და  $D$  ტვირთისაგან; ამიტომ

$$\text{სისტემის კინეტიკური ენერგია} \quad 55 \quad + T_C + T_B. \quad (3)$$

$D$  ტვირთი მოძრაობს გადატანით, მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_D = 1/2 \cdot m_D v_D^2 = 1/2 \cdot m_1 v_D^2. \quad (4)$$

$C$  ბლოკი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო, მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_C = 1/2 \cdot J_C \omega_c^2; \quad (5)$$

აქ  $J_C$  არის დისკოს (ბლოკის) ინერციის მომენტი  $C$  წერტილის მიმართ:

$J_C = 1/2 \cdot m_3 r^2$ , ( $r$  - ბლოკის რადიუსია).  $\omega_c$  არის  $C$  დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე. როგორც ნახაზიდან ჩანს,  $D$  ტვირთსა და  $C$  ბლოკის ფერსოზე მდებარე  $K$  წერტილს აქვთ ერთი და იგივე სიჩქარე:  $v_D = v_K$

$=\omega_C r$ . იგივე ხაზოვანი სიჩქარე აქვს B დოლის ფერსოზე მდებარე E წერტილსაც:

$$v_E = v_D = v_K. \quad \omega_C = v_K / r = v_D / r.$$

მიღებული მნიშვნელობები ჩავსვათ (5) ფორმულაში, მივიღებთ

$$T_C = 1/2 \cdot 1/2 \cdot m_3 r^2 \cdot v_D^2 / r^2 = 1/4 \cdot m_3 v_D^2. \quad (6)$$

B დოლი ბრუნავს უძრავი ღერძის გარშემო; მისი კინეტიკური ენერგია

$$T_B = 1/2 \cdot J_B \omega_B^2. \quad (7)$$

$J_B$  – დოლის ინერციის მომენტი მისი ბრუნვის ღერძის მიმართ.

ვინაიდან დოლის მასა თანაბრად განაწილებულია მის ფერსოზე, ამიტომ დოლის ინერციის მომენტი გამოითვლება წვრილი წრიული რგოლის ინერციის მომენტის საანგარშო ფორმულით:  $J_B = m_3 R^2$ .

$\omega_B$  – დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა:  $\omega_B = v_E / R = v_D / R$  ( $v_E = v_K = v_D$ ).

$$(7) - \text{დან მივიღებთ: } T_B = 1/2 \cdot m_3 R^2 \cdot (v_D / R)^2 = m_3 v_D^2 / 2. \quad (8)$$

შევიტანოთ (4), (6) და (8)

მნიშვნელობები სისტემის კინეტიკური ენერგიის გამოსათვლელ (3) ფორმულაში, მივიღებთ:

$$T = 1/2 \cdot m_1 v_D^2 + 1/4 \cdot m_3 v_D^2 + 1/2 \cdot m_2 v_D^2;$$

$$\text{ანუ } T = 1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3) v_D^2. \quad (9)$$

ახლა გამოვვალთ სისტემაზე მოდებული ყველა გარე ძალის მუშაობათა ჯამი ( $A^{\circ}$ ) მოცემულ გადაადგილებაზე (როცა D ტვირთი ავა h სიმაღლეზე). ცხადია  $A^{\circ} = A_D + A_C + A_B$ . (10)

ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა... (ნახ.75). D ტვირთის სიმძიმის ძალის მუშაობა  $A_D = -P_D h = -m_1 g h$ .

C ბლოკის სიმძიმის ძალა და რეაქციის ძალა მოდებულნი არიან უძრავ C საკისარში; ამიტომ  $A_C = 0$ . B დოლზე მოქმედებს სიმძიმის ძალა,

საკისარის რეაქცია და მბრუნებელი მომენტი  $L_{\text{ახ}}$ . სიმძიმისა და რეაქციის ძალები მოდებულნი არიან უძრავ საკისარში და მათი მუშაობა ნულის ტოლია; მბრუნებელი მომენტის მიერ შესრულებული მუშაობა იქნება:

$$A_B = A_{\text{ახ}} = \int_0^{\varphi} L_{\text{ახ}} d\varphi = \int_0^{\varphi} a \varphi^2 d\varphi = a/3 \cdot \varphi^3; \quad (11)$$

აქ  $\varphi$  არის დოლის შემობრუნების კუთხე. როცა D ტვირთი აიწვევს ზევით h მანძილზე, B დოლი შემობრუნდება  $\varphi$  კუთხით, რომელსაც შეესაბამება h სიგრძის  $EE_1$  რკალი; ამიტომ  $EE_1 = h = R\varphi$ , საიდანაც  $\varphi = h / R$  შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (11)–ში, მივიღებთ:  $A_B = ah^3 / 3R^3$ .

$A_D, A_C$  და  $A_B$ –ს მიღებული მნიშვნელობების გათვალისწინებით სისტემაზე მოქმედი ძალების სრული მუშაობა (10) ასე გამოისახება:

$$A^{\circ} = -m_1 g h + ah^3 / 3R^3. \quad (12)$$

(2) ტოლობის თანახმად, (9) და (12) მნიშვნელობათა გატოლებით მივიღებთ:  $1/4 \cdot (2m_1 + 2m_2 + m_3) v_D^2 = -m_1 g h + ah^3 / 3R^3$ ;

საიდანაც

$$v_D = \sqrt{4h(ah^2 - 3m_1 R^3 g) / 3R^3 (2m_1 + 2m_2 + m_3)}.$$

**ამოცანა 9.7.** ნივთიერი წერტილი  $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$  (6) ძალის

მოქმედებით გადაადგილება  $B_0(2;2;2\text{მ})$  მდებარეობიდან  $B(3;3;3\text{მ})$  მდებარეობაში. რა სიდიდით შეიცვლება წერტილის კინეტიკური ენერგია ასეთი გადაადგილებისას? პასუხი:  $\Delta T = 3\text{ჯ}$ .

**ამოცანა 9.8.** ჰორიზონტალური წრფივი გზის უბანზე მოძრავი

მატარებლის დამუხრუჭებისას წარმოქმნილი წინაღობის ძალა მატარებლის წონის 0,1 ნაწილის ტოლია. დამუხრუჭების დაწყების მომენტში მატარებლის სიჩქარე იყო 72 კმ/სთ. იპოვეთ საპუხრუჭო გზა. პასუხი:  $s = 204 \text{ მ}$ .

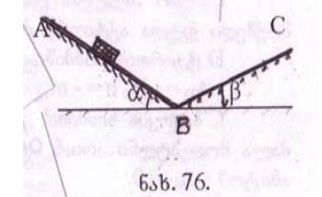
**ამოცანა 9.9.** როგორი უნდა იყოს დამუხრუჭებულ

ავტომობილის თვლების გზაზე ხახუნის კოეფიციენტი f, თუ v კმ/სთ სიჩქარით მოძრაობისას დამუხრუჭების მომენტიდან იგი გაჩერდა s მეტრის გავლის შემდეგ.

პასუხი:  $f = v_0^2 / 2gs$ .

**ამოცანა 9.10.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha$

კუთხით დახრილ AB სიბრტყეზე საწყისი სიჩქარის გარეშე ეშვება მძიმე სხეული; A სხეულმა B წერტილამდე გაიარა  $s_1$  მანძილი და იწყო ასვლა ჰორიზონტისადმი  $\beta$  კუთხით დახრილ BC სიბრტყეზე.

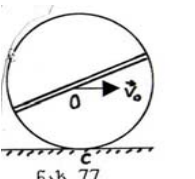


ნახ. 76.

ჩათვალეთ, რომ B წერტილში მცირე მომრგვალების გამო არ ხდება სიჩქარის დაკარგვა და განსაზღვრეთ  $s_2$  მანძილი, რომელსაც სხეული BC სიბრტყეზე გაივლის გაჩერებამდე. ხოლო ხახუნის კუთხეები AB და BC სიბრტყეებზე შესაბამისად არის  $\varphi_1$  და  $\varphi_2$ ; ამასთანავე  $\varphi_1 < \alpha$ . პასუხი:  $s_2 = s_1 \cos\varphi_2 \sin(\alpha - \varphi_1) / \cos\varphi_1 \sin(\beta + \varphi_2)$

**ამოცანა 9.11.** R რადიუსის და P წონის

ერთგვაროვანი დისკოს დიამეტრის გასწვრივ დამაგრებულია 2R სიგრძის და Q წონის წვრილი ერთგვაროვანი ღერო. დისკო ღეროსთან ერთად უსრიალად მიეორავს ჰორიზონტალურ წრფივ გზაზე. განსაზღვრეთ სისტემის კინეტიკური ენერგია, თუ დისკოს ცენტრის სიჩქარეა  $v_0$ .

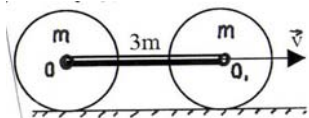


ნახ. 77.

პასუხი:  $T = (9P + 8Q) v_0^2 / 12g$ .

**ამოცანა 9.12.**

მექანიკური სისტემა შედგება ორი ერთნაირი, თითოეული  $m$  მასის თელისაგან და  $3m$  მასის ღეროსაგან, რომელიც აერთებს ამ თვლებს. თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან მთლიან დისკებად, მათი სრიალი ჰორიზონტალურ გზაზე უგულვებლყავით და განსაზღვრეთ მთელი სისტემის კინეტიკური ენერგია, თუ თვალის ცენტრის სიჩქარეა  $v$ . პასუხი  $T = 3mv^2$ .



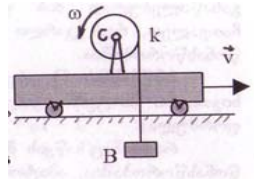
ნახ. 78.

**ამოცანა 9.13.**

$m=1$  კგ მასის და  $\ell = 1$  მ სიგრძის წვრილი ერთგვაროვანი წრფივი ღერო  $Oxy$  სიბრტყეში მოძრაობს კანონით:  $x_c = t^2$ ;  $y_c = 2t$ ;  $\varphi = 4t^3$  ( $x_c, y_c$  - ღეროს მასების ცენტრის კოორდინატებია მეტრებში;  $t$  - წამებში;  $\varphi$  - რადიანებში). განსაზღვრეთ ღეროს კინეტიკური ენერგია დროის  $t = 1$  წმ მომენტში. პასუხი:  $T = 10$  ჯ.

**ამოცანა 9.14.**

ურიკაზე, რომელიც მოძრაობს ჰორიზონტალურ ლიანდაგზე  $v=2$  მ/წმ მუდმივი სიჩქარით, დადგმულია ჯალამბარი, რომლის დოლის რადიუსია  $r=0,5$  მ და რომელიც ბრუნავს თანაბრად  $\omega=2$  წმ<sup>-1</sup> კუთხური სიჩქარით. დოლზე დახვეულია თოკი, რომლის საშუალებითაც აიწევა



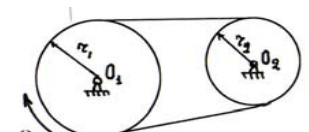
ნახ. 79.

ტვირთი. დაადგინეთ, რამდენჯერ მეტია გზის მიმართ ამ ტვირთის კინეტიკური ენერგია ურიკას მიმართ კინეტიკურ ენერგიაზე.

პასუხი: 5 - ჯერ.

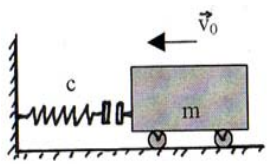
**ამოცანა 9.15**

ავტომანქანის კომპრესორის ბორბალი, რომლის რადიუსია  $r_1 = 0,1$  მ და ინერციის მომენტი ცენტრის მიმართ  $J_1 = 0,04$  კგმ<sup>2</sup>, ბრუნავს  $\omega_1 = 120$  წმ<sup>-1</sup> კუთხური სიჩქარით. მასთან უსასრულო ლვედით შეერთებულია  $r_2 = 0,07$  მ რადიუსის ბორბალი, რომლის მომენტი ცენტრის მიმართ არის  $J_2 = 0,01$  კგმ<sup>2</sup>. განსაზღვრეთ 58 ემის კინეტიკური ენერგია, რომელიც შედგება ორი ბორბლისა და ლვედისგან, თუ ლვედის მასა  $m = 0,5$  კგ.  $O_1$  და  $O_2$  ღერძები უძრავია.



ნახ. 80.

პასუხი:  $T = 1/2 \cdot (J_1 + J_2 r_1^2 / r_2^2 + m r_1^2) \omega_1^2$ ;  $T = 471$  ჯ.



ნახ. 81.

**ამოცანა 9.16.**

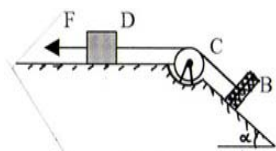
$m$  მასის ვაგონი ეჯახება  $c$  სიხისტის ზამბარიან ამორტიზატორს  $v_0$  სიჩქარით. განსაზღვრეთ ამორტიზატორის უდიდესი დეფორმაცია, თუ უგულვებლყოფთ მის მასას და ჩათვლით, რომ დაჯახებამდე იგი არ იყო დეფორმირებული. პასუხი:  $s = v_0 \sqrt{m/c}$

**ამოცანა 9.17.**

ავტომანქანა მოძრაობს გზის ჰორიზონტალურ წრფივ უბანზე საწყისი სიჩქარის გარეშე. პირველი 10 წამის განმავლობაში იგი მოძრაობს მუდმივი 1,2 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით, ხოლო შემდგომ 8 წმ-ის განმავლობაში მუდმივი 0,9 მ/წმ<sup>2</sup> აჩქარებით. გზის რომელ უბანზე ასრულებს მეტ მუშაობას და რამდენჯერ? პასუხი: მეორეზე, 1,56 - ჯერ.

**ამოცანა 9.18.**

$P_1$  წონის  $D$  სხეულზე, რომელზეც  $DCB$  თოკის საშუალებით მიმაგრებულია  $P_2$  წონის  $B$  სხეული, მოქმედებს მუდმივი ჰორიზონტალური ძალა  $\vec{F}$ . უგულვებლყავით ხახუნი, ბლოკის და თოკის წონა; ჩათვალეთ, რომ თოკი უჭიმადია, კუთხე  $\alpha$  ცნობილია და განსაზღვრეთ  $D$  სხეულის სიჩქარე და აჩქარება მის მიერ განვლილ  $s$  მანძილზე დამოკიდებულებაში. სხეულის საწყისი სიჩქარე ნულის ტოლია.

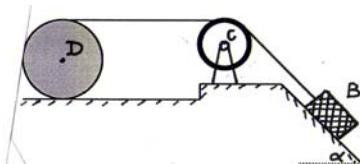


ნახ. 82.

პასუხი:  $v^2 = 2gs(F - P_2 \sin \alpha) / (P_1 + P_2)$ ;  $w = g(F - P_2 \sin \alpha) / (P_1 + P_2)$ .

**ამოცანა 9.19.**

ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე სრიალებს  $m_1 = 40$  კგ მასის  $B$  ტვირთი, რომელიც მიბმულია  $m_2 = 4$  კგ მასის  $C$  ბლოკზე გადადებული და  $D$  საგორაზე დახვეული უჭიმადი თოკის ბოლოში.  $D$  საგორავი წარმოადგენს ერთგვაროვან  $m_3 = 80$  კგ მასის მთლიან ცილინდრს, რომელიც უსრიალოდ გორავს ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. უგულვებლყავით თოკის მასა, გორვის ხახუნი, ბლოკის ღერძში ხახუნი და განსაზღვრეთ  $B$  ტვირთის სიჩქარე იმ მომენტისათვის, როცა იგი დახრილ სიბრტყეზე გაივლის  $s = 1$  მ მანძილს. საწყის მომენტში სისტემა უძრავია.  $C$  ბლოკის მასა თანაბრადაა განაწილებული ფერსოზე. 59



ნახ. 83.

პასუხი:  $v_B = 4 \sqrt{m_1 g \sin \alpha / (8m_1 + 8m_2 + 3m_3)} = 2.3$  მ/წმ.

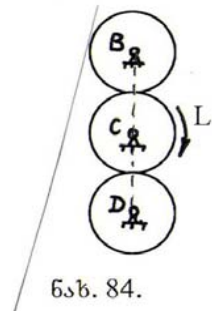
**ამოცანა 9.20.**

ამოხსენით წინა (9.19) ამოცანა იმ შემთხვევისათვის, როდესაც მხედველობაშია მიღებული  $D$  საგორავის

პორიზონტალურ სიბრტყეზე გორვის ხახუნი, თუ გორვის ხახუნის  $\delta$  კოეფიციენტის ფარდობა საგორავის  $R$  რადიუსთან უდრის  $0,05$ .

პასუხი:  $v_B = 4\sqrt{(m_1 R \sin\alpha - 0,05m_2 \delta) g s / R (8m_1 + 8m_2 + 3m_3)} = 2,18 \text{ მ/წმ}$ .

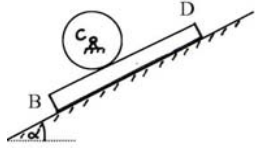
**ამოცანა 9.21.** უძრავ პარალელურ ღერძებზე ჩამოცმული სამი ერთნაირი კბილანსაგან შედგენილი სისტემა მოძრაობაში მოდის  $C$  თვალზე მოდებული მუდმივი მახრუნებელი  $L$  მომენტი. ჩათვალეთ, რომ თითოეული თვალი წარმოადგენს  $r$  რადიუსის და  $P$  წონის ერთგვაროვან დისკოს. ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ თვლების ბრუნვის კუთხური და სიჩქარე მობრუნების  $\varphi$  კუთხეზე დამოკიდებულებაში. განსაზღვრეთ აგრეთვე თვლების კუთხური აჩქარება.



ნახ. 84.

პასუხი:  $\omega = 2/r \cdot \sqrt{Lg\varphi/3P}$ ;  $\varepsilon = 2Lg / 3Pr^2$ .

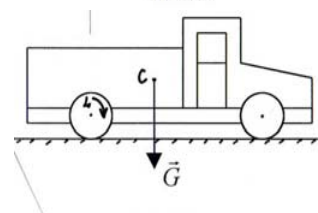
**ამოცანა 9.22.**  $\ell$  სიგრძის და  $P$  წონის  $BD$  კბილანა ლარტყა მოთავსებულია პორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის დროს ლარტყა აბრუნებს უძრავი  $C$  ღერძის გარშემო მბრუნავ  $Q$  წონის კბილანა თვალს. კბილანა თვალი ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოდ, ხახუნი უგულებელყავით და განსაზღვრეთ ლარტყას სიჩქარე იმ მომენტში, როდესაც შეხების წერტილში იმყოფება ლარტყას  $D$  ბოლო, თუ საწყის მომენტში შეხების წერტილში იმყოფებოდა  $B$  ბოლო და ამასთანავე ლარტყას სიჩქარე იყო ნულის ტოლი.



ნახ. 85.

პასუხი:  $v^2 = 4g\ell P \sin\alpha / (2P + Q)$ .

**ამოცანა 9.23.**  $G$  წონის ორღერძა ავტომანქანა უსრიალოდ მოძრაობს გზის პორიზონტალურ წრფეზე უბანზე და მოძრაობის დაწყებიდან ( $v_0=0$ ) გადის  $s$  მანძილს. ავტომანქანას აქვს ორი წამყვანი ბორბალი, რომელთაგან თითოეულზე მოდებულია მახრუნებელი  $L$  მომენტი. წამყვანი და ამჟღად თვლების რადიუსებია  $R$ . თითოეული წამყვანი ბორბალის ღერძის მიმართ მბრუნავი მასის ინერციის მომენტია  $J_2$ , ხოლო ყოველი ამჟღად თვლის ინერციის მომენტია  $J_1$ . განსაზღვრეთ ავტომანქანის საბ 60 ჰქარე, თუ ბორბალის გორვის ხახუნის კოეფიციენტი მუდმივია და უდრის  $\delta$ -ს.



ნახ. 86.

პასუხი:  $v^2 = 2gsR (2L - \delta G) / [GR^2 + 2(J_1 + J_2)g]$ .

**ამოცანა 9.24.** წინა (9.23) ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ ავტომანქანა მოძრაობდა  $v_0$  სიჩქარით. გარკვეულ მომენტში უკანა

ბორბლებზე მოსდეს მუდმივი დამამუხრუჭებელი მომენტი  $L$ , რის შედეგადაც ავტომანქანა გაჩერდა. განსაზღვრეთ დამუხრუჭების გზა, თუ ჩათვლით, რომ გორვისას სრიალს ადგილი არა აქვს; ( $G, R, J_1, J_2, \delta$  - მოცემულია).

პასუხი:  $s = v_0^2 [GR^2 + (J_1 + J_2)g] / 2gR(L + \delta G)$ .

**§ 10. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი**

ნივთიერ წერტილთა სისტემის შესაძლო გადაადგილება ეწოდება სისტემის წერტილების ისეთ უსასრულოდ მცირე გადაადგილებებს, როდესაც არ ირღვევა სისტემაზე დადებული ბმები.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობის აუცილებელ და საკმარის პირობას. იგი შემდეგში მდგომარეობს: გეომეტრიული, სტაციონარული და იდეალური ბმების მქონე სისტემის წონასწორობისათვის აუცილებელია და საკმარისი, რომ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალის მუშაობათა ჯამი ყოველ შესაძლო გადაადგილებაზე იყოს ნულის ტოლი, ე.ი.

$$\sum (F_k \cdot \delta \vec{r}_k) = 0, \tag{10.1}$$

$$\text{ანუ გეგმილებში } \sum (X_k \delta x_k + Y_k \delta y_k + Z_k \delta z_k) = 0. \tag{10.2}$$

აქ  $F_k(X_k, Y_k, Z_k)$  - სისტემის  $k$ -ურ წერტილზე მოქმედი ძალების ტოლქმედია, ხოლო  $\delta \vec{r}_k (\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k)$  - იმავე წერტილის შესაძლო გადაადგილება.

თუ სისტემაზე დადებული ბმა არ არის იდეალური, მაშინ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპში აქტიური ძალების მუშაობასთან ერთად აიღება აგრეთვე ბმის რეაქციის ძალების მუშაობათა ჯამიც; ე.ი. (10.1) განტოლებაში შევლენ ბმის რეაქციის ძალებიც და განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\sum (F_k + \vec{R}_k) \delta \vec{r}_k = 0, \tag{10.3}$$

ეს პრინციპი განზოგადებულ კოორდინატებში ასე გამოისახება:

$$Q_j = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, s), \tag{10.4}$$

სადაც  $Q_j$  არის  $q_j$  განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა;  $s$  - სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის გამოყენებით ამოცანების ამოხსნა შეიძლება გაიყოს შ: 61 ითადი ტიპის ამოცანებად:

I. ამოცანები, სადა მოცემულია სისტემის წონასწორობისათვის მოთხოვნილია ამ სისტემაზე მოქმედი ძალების განსაზღვრა, ან ამ ძალებს შორის დამოკიდებულების განსაზღვრა.

II. ამოცანები, რომლებშიც სისტემაზე მოქმედი მოცემული ძალებისათვის მოთხოვნილია სისტემის წონასწორობის მდგომარეობის განსაზღვრა.

III. ამოცანები, რომლებშიც მოთხოვნილია ბმის რეაქციების განსაზღვრა.

ამოცანები ნივთიერ წერტილთა სისტემის წონასწორობაზე შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის გამოყენებით მიზანშეწონილია ამოიხსნას შემდეგი თანმიმდევრობით:

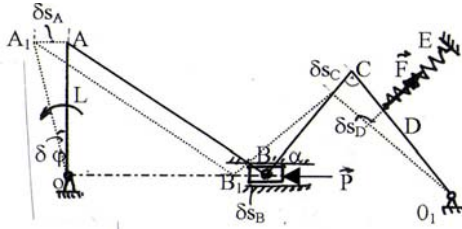
- 1) გამოვყოთ სისტემა, რომლის წონასწორობასაც ვიხილავთ;
- 2) გამოვსახოთ მოცემულ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალა;
- 3) თუ ბმა არაიდელურია, გამოვსახოთ შესაბამისი ბმის რეაქციები;
- 4) სისტემის ერთ-ერთ წერტილს მივცეთ რაიმე შესაძლო გადაადგილება და სისტემის დანარჩენი წერტილების შესაძლო გადაადგილებები გამოვსახოთ აღებული შესაძლო გადაადგილების საშუალებით;
- 5) გამოვთვალოთ ყველა ძალის მუშაობა მათი მოდების წერტილების შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე და მათი ჯამი გაუტოლოთ ნულს;
- 6) ამოვხსნათ მიღებული წონასწორობის განტოლება.

**ამოცანა 10.1** ნახაზზე მოცემული მექანიზმის  $OA$  მრუდმხარაზე მოდებულია მახრუნებელი მომენტი  $L$ , ხოლო  $B$  ცოციაზე მოქმედებს  $P$  ძალა. მექანიზმი გაწონასწორებულია  $DE$  ზამბარის დაჭიმულობის ძალით. განსაზღვრეთ ზამბარის სიხისტის (დრეკადობის) კოეფიციენტი, თუ ზამბარის დეფორმაციაა  $h$ . მოცემულია:  $OA = \ell$ ;  $O_1D = 2 CD$ ;  $BC \perp O_1C$ ;  $DE \perp O_1C$ .

**ამოხსნა.** მექანიზმზე მოქმედი მახრუნებელი  $L$  მომენტი და  $P$  ძალა გაწონასწორებულნი არიან ზამბარის დრეკადი აღმდგენი ძალით  $F = ch$  (მოცემული სქემის მიხედვით ზამბარა დაჭიმულია).

მივანიჭოთ მექანიზმის  $OA$  მრუდმხარას რაიმე შესაძლო მობრუნება  $\delta\phi$ . მაშინ  $A, B, C, D$  წერტილები შესაბამისად მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:

$$AA_1 = \delta s_A, \quad BB_1 = \delta s_B, \quad C \quad 62 \quad DD_1 = \delta s_D.$$



ნახ. 87.

შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ასე გამოისახება (აქ საყრდენების რეაქციებს მხედველობაში არ ვიღებთ, რადგანაც ისინი არავითარ მუშაობას არ ასრულებენ):

$$L\delta\phi + P\delta s_B - F\delta s_D = 0,$$

$$\text{ანუ} \quad L\delta\phi + P\delta s_B - ch\delta s_D = 0.$$

$$\text{აქედან} \quad c = (L\delta\phi + P\delta s_B) / h\delta s_D. \quad (*)$$

დავამყაროთ დამოკიდებულება  $\delta\phi$ ,  $\delta s_B$  და  $\delta s_D$  შესაძლო გადაადგილებებს შორის. როგორც ნახაზიდან ჩანს  $\delta s_A = OA \cdot \delta\phi$ .  $AB$  ღეროს შესაძლო გადაადგილება გადატანითი მოძრაობაა, ამიტომ

$$\delta s_B = \delta s_A = OA \cdot \delta\phi = \ell \delta\phi. \quad (**)$$

$BC$  ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას.  $B$  და  $C$  წერტილების შესაძლო გადაადგილებები ამ წერტილების შესაძლო სიჩქარეების პროპორციულია. ვინაიდან მყარი სხეულის მოძრაობისას მისი ყოველი ორი წერტილის სიჩქარის გეგმილი ამ წერტილების შემაერთებელ წრფეზე ტოლია, ამიტომ გვექნება: გეგმ $_{BC} \delta s_B =$  გეგმ $_{BC} \delta s_C$ , ანუ  $\delta s_B \cos\alpha = \delta s_C$ ; ე.ი.  $\delta s_C = \ell \cos\alpha \delta\phi$ .

( $\delta s_B$  და  $\delta s_C$  შესაძლო გადაადგილებებს შორის დამოკიდებულება შეიძლება დამყარდეს აგრეთვე  $BC$  ღეროს ბრუნვის მყისი ცენტრის მოძებნითაც – გამოთვალეთ !!).

$$\text{მოცემულობის თანახმად} \quad O_1C / O_1D = 3/2; \text{ ამიტომ } \delta s_C / \delta s_D = 3/2;$$

$$\text{აქედან} \quad \delta s_D = 2/3 \cdot \delta s_C, \text{ ანუ } \delta s_D = 2/3 \cdot \ell \cos\alpha \delta\phi.$$

ეს და (\*\*\*) მნიშვნელობები ჩავსვათ (\*) ტოლობაში, მივიღებთ:

$$c = (L\delta\phi + P\ell \delta\phi) / (2h/3\ell \cdot \cos\alpha \delta\phi),$$

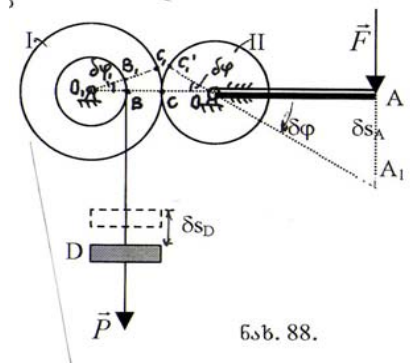
$$\text{საიდანაც} \quad \underline{c = 3(L + P\ell) / 2h\ell \cos\alpha}.$$

**ამოცანა 10.2**

ჯალამბარი შედგება დოლისაგან, ამ დოლზე ხისტად მიმაგრებული  $I$  კბილანასაგან,  $I$  კბილანასთან ჩაბმაში მყოფი  $II$  კბილანასაგან და  $OA$  სახელურისაგან, რომელიც  $II$  კბილანაზეა მიდრეკილი.

განსაზღვრეთ  $\vec{F}$  ძალის მინიმალური სიდიდე, რომელიც უნდა მოვლით  $OA$  სახელურის ბოლოში მისდამი მართობულად, რომ ავწიოთ ბაგირზე დაკიდებული  $P$  წონის  $D$  ტვირთი, თუ თვლების კბილანების რიცხვი

შესაბამისად არიან  $z_1$  და  $z_2$ . სახელურის სიგრძეა  $\ell$ , ხოლო დოლის რადიუსი  $O_1B = r$ . ბაგირი ჩათვალეთ უჭიმდად დაუწონადად; ხახუნი უგულებელყავით.



ნახ. 88.

**ამოხსნა.** განვიხილოთ  $\vec{F}$  ძალის ის ზღვრული მინიმალური მნიშვნელობა, რომელზე მეტი მნიშვნელობისათვისაც ჯალამბარი მოძრაობას დაიწყებს. ე. ი. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა  $\vec{F}$  ძალისა და P წონის D ტვირთის მოქმედებით ჯალამბარი წონასწორობაშია.

მივანიჭოთ მექანიზმს რაიმე შესაძლო გადაადგილება. მაგალითად დოლი მოვაბრუნოთ  $O_1$  ღერძის გარშემო საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგოდ შესაძლო  $\delta\varphi_1$  კუთხით. იმავე  $\delta\varphi_1$  კუთხით შემობრუნდება I კბილანაც. დოლზე გადაკიდებული ბაგირი აიწვევს დოლის ფერსოზე მდებარე B წერტილის გადაადგილებას ტოლი  $\delta s_B = BB_1$  მანძილით. ვინაიდან ბაგირი უჭიმადია, D ტვირთიც გადაადგილდება  $\delta s_D = \delta s_B$  მანძილით. I კბილანასთან ჩაბმაში მყოფი II კბილანა შემობრუნდება  $\theta$  ღერძის გარშემო რაღაც  $\delta\varphi$  შესაძლო კუთხით. II კბილანასთან ერთად იმავე  $\delta\varphi$  კუთხით შემობრუნდება OA სახელურიც, რომლის ბოლო A წერტილი მიიღებს შესაძლო  $\delta s_A = AA_1$  გადაადგილებას ( $AA_1 \perp OA$ ).

ბრუნვის  $\theta$  და  $\theta_1$  ღერძების რეაქციის ძალები მოდებულნი არიან უძრავ წერტილებში, ამიტომ შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექნება:

$$-P \delta s_D + F \delta s_A = 0;$$

საიდანაც  $F = P \delta s_D / \delta s_A$ . (\*)

დავამყაროთ დამოკიდებულება  $\delta s_D$  და  $\delta s_A$  შესაძლო გადაადგილებებს შორის.

როგორც ვნახეთ  $\delta s_D = \delta s_B$ . დოლის მობრუნების კუთხე  $\delta\varphi_1 = 1/r \cdot \delta s_B$ , ანუ  $\delta\varphi_1 = 1/r \cdot \delta s_D$ .

დოლთან ერთად I კბილანაც შემობრუნდა იმავე  $\delta\varphi_1$  კუთხით და I კბილანას ფერსოზე მდებარე C წერტილმა მიიღო  $\delta s_C = CC_1$  შესაძლო გადაადგილება:

$$\delta s_C = O_1 C \cdot \delta\varphi_1 = O_1 C / r \cdot \delta s_D.$$

I კბილანასთან ერთად იმავე  $\delta s_C$  მანძილით გადაადგილდება მასთან ჩაბმაში მყოფი II კბილანას ფერსოზე მდებარე წერტილიც  $CC_1' = \delta s_C$  და თუ ამავე დროს II კბილანა შემობრუნდა  $\delta\varphi$  კუთხით, მაშინ ცხადია

$$\delta s_C = OC \delta\varphi, \text{ საიდანაც } \delta\varphi = 1/OC \cdot \delta s_C = 1/r \cdot O_1 C / OC \cdot \delta s_D.$$

II კბილანასთან ერთად სახელურიც შემობრუნდება  $\delta\varphi$  კუთხით და სახელურის ბოლო წერტილი მიიღებს შესაძლო გადაადგილებას

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi = \ell/r \cdot O_1 C / OC \cdot \delta s_D.$$

შევიტანოთ  $\delta s_A$  -ს ეს მნიშვნელობა (\*) გამოსახულებაში. გვექნება:

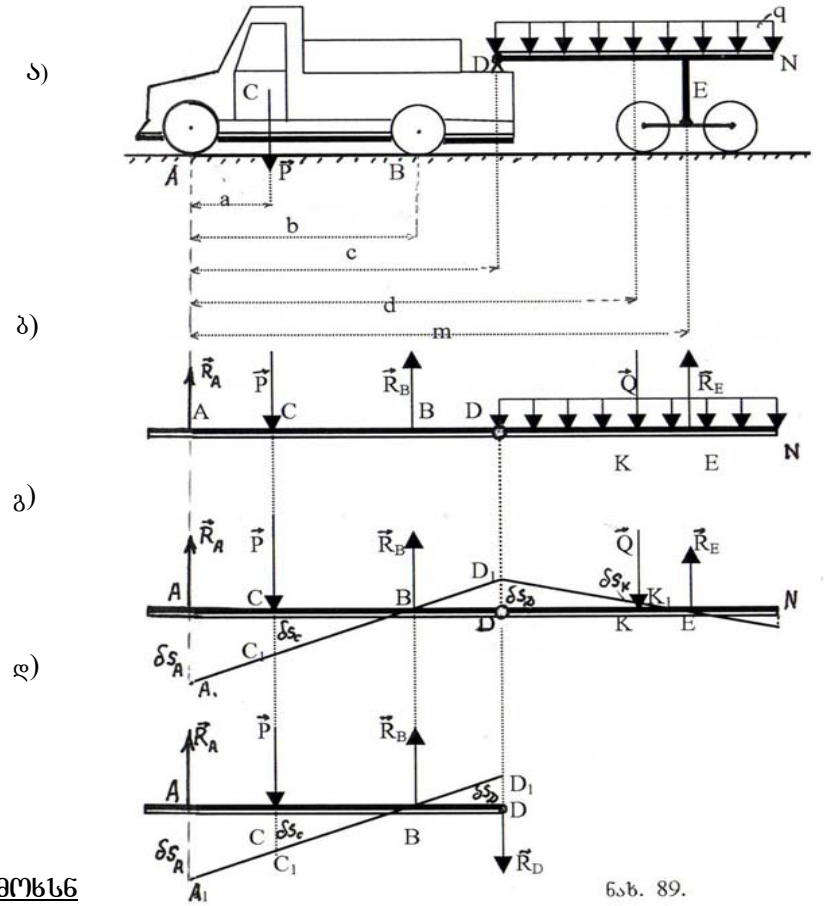
$$F = P \delta s_D / (\ell/r \cdot O_1 C / OC \cdot \delta s_D)$$

თუ აქ მხედველობაში მივიღებთ, რომ ერთმანეთთან ჩაბმაში მყოფი კბილანების რადიუსები მათი კბილანების რიცხვის პირდაპირპროპორციულია,

ე. ი.  $O_1 C / OC = z_1 / z_2$ ,

მაშინ საბოლოოდ გვექნება:  $F = Pr z_2 / \ell z_1$ .

**ამოცანა 10.3.**  $P = 1400$  კნ წონის სატვირთო ავტომანქანას აქვს  $DN = \ell = 5$  მ სიგრძის მისაბმელი, რომელზეც ძევს თანაბრად განაწილებული  $q = 150$  კნ/მ ინტენსივობის ტვირთი. განსაზღვრეთ სატვირთო ავტომანქანის და მისაბმელის ღერძებზე დატვირთვა, აგრეთვე ძაბვა ავტომანქანის და მისაბმელის შეერთების D სახსარში, თუ ცნობილია, რომ  $a = 1$  მ,  $b = 3$  მ,  $c = 4$  მ,  $d = 6$  მ,  $m = 7$  მ.



ამოხსნა

პირველ ოვლისა წარმოვადგინოთ ამოცანის პირობაში მოცემული სატვირთო ავტომანქანისა და მისი მისაბმელის მოდელი, როგორც ორი ღეროსაგან

შედგენილი სისტემა, რომლებიც ერთმანეთთან შეერთებული არიან D სახსრით (ნახ. ა, ბ).

ღეროვან სისტემას აქვს სამი გლუვი საყრდენი A, B და E წერტილებში (ავტომანქანა და მისაბმელი ეყრდნობა სამ ღერძს).

სისტემაზე მოქმედებს ორი აქტიური ძალა  $\vec{P}$  და  $\vec{Q}$ , სადაც  $\vec{Q}$  არის მისაბმელზე თანაბრად განაწილებული q ინტენსივობის დატვირთვის ტოლქმედი ძალა, რომელიც მოქმედებს მისაბმელის შუა K წერტილში და  $Q = \ell q = 5 \cdot 150 = 750$  კნ.

ამოცანის პირობის თანახმად უნდა განისაზღვროს A, B და E ღერძებზე წნევის (რეაქციის) ძალები  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$ ,  $\vec{R}_E$ , აგრეთვე ძაბვა D სახსარში. ყველა აქტიური და რეაქციის ძალის მიმართულება ნაჩვენებია (ბ) ნახაზზე.

გვაქვს პარალელურ ძალთა სისტემა; ამიტომ D სახსარში ღეროთა ურთიერთქმედების რეაქციის ძალები მიმართულნი იქნებიან ასევე მოცემული ძალების პარალელურად.

ძალთა ეს სისტემა (ანუ მანქანა თავისი მისაბმელით) წონასწორობაშია (ეს ნიშნავს, რომ მანქანა ან უძრავია, ან მოძრაობს წრფივად და თანაბრად; აქ განვიხილავთ უძრავ მდგომარეობას).

ღერძებზე დატვირთვის (ანუ რეაქციის) ძალების გამოსათვლელად გამოვიყენოთ სისტემის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი.

მივცთ სისტემას რაიმე შესაძლო გადაადგილება. მანქანა შეიძლება გადაადგილდეს გზის გასწვრივ წინ ან უკან; ვინაიდან სისტემაზე მოქმედი ძალები ამ გადაადგილების მართობულნი არიან, ამიტომ ამ გადაადგილებებზე სისტემაზე მოქმედი ყოველი ძალის მიერ შესრულებული მუშაობა ნულის ტოლია. ამიტომ მივცეთ სისტემას სხვა შესაძლო გადაადგილება; მაგალითად, შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მანქანის წინა საბურავში. ეს ნიშნავს, რომ (ბ) მოდელზე A წერტილი მცირედით გადაადგილდება ვერტიკალურად ქვევით, ხოლო B და E წერტილები დარჩებიან უძრავნი. D წერტილი გადაადგილდება ზევით. ღეროვანი სისტემა სქემატურად მიიღებს (გ) ნახაზის სახეს.

A, C, D, K წერტილები მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:

$$AA_1 = \delta s_A, \quad CC_1 = \delta s_C, \quad KK_1 = \delta s_K, \quad DD_1 = \delta s_D.$$

ამ შემთხვევისათვის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექმება:

$$-R_A \delta s_A + P \delta s_C - Q \delta s_K = 0;$$

აქედან

$$R_A = (P \delta s_C - Q \delta s_K) / \delta s_A. \quad (*)$$

ახლა დავამყაროთ დამოკიდებულება (\*) ტოლობაში შემავალ შესაძლო გადაადგილებებს შორის 66

$$\Delta AA_1 B \sim \Delta CC_1 B \Rightarrow \delta s_A / \delta s_C = AB / BC, \quad \dots \quad c = 3/2; \Rightarrow \delta s_C = 2/3 \cdot \delta s_A.$$

$$\Delta AA_1 B \sim \Delta DD_1 B \Rightarrow \delta s_A / \delta s_D = AB / BD; \quad \delta s_A / \delta s_D = 3/1; \Rightarrow \delta s_D = 1/3 \cdot \delta s_A. \quad (**)$$

$$\Delta DD_1 E \sim \Delta KK_1 E \Rightarrow \delta s_D / \delta s_K = DE / KE;$$

$$\delta s_D / \delta s_K = 3/1; \Rightarrow \delta s_K = 1/3 \cdot \delta s_D = 1/9 \cdot \delta s_A.$$

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობები (\*) ტოლობაში; მივიღებთ:

$$R_A = (P \cdot 2/3 \cdot \delta s_A - Q \cdot 1/9 \cdot \delta s_A) / \delta s_A = 2/3 \cdot P - 1/9 \cdot Q = 850 \text{ კნ.}$$

**დავალება:** ანალოგიური გზით გამოთვალეთ  $\vec{R}_B$  და  $\vec{R}_E$  რეაქციის ძალები.

**პირობა:** 1)  $\vec{R}_B$  რეაქციის ძალის გამოსათვლელად (ბ) ნახაზზე მივცეთ შესაძლო გადაადგილება B საყრდენს (მაგალითისათვის შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მანქანის უკანა საბურავში); A და E საყრდენები უძრავნი დარჩებიან.

2)  $\vec{R}_E$  რეაქციის ძალის გამოსათვლელად მივცეთ შესაძლო გადაადგილება E საყრდენს (შევამციროთ ატმოსფერული წნევა მისაბმელის საბურავებში); A და B საყრდენები უძრავნი დარჩებიან.

ორივე შემთხვევისათვის ცალ-ცალკე აავეთ (გ) – ანალოგიური ნახაზი.

D სახსარში ძაბვის გამოსათვლელად განვიხილოთ ცალკე ავტომანქანის წონასწორობის მდგომარეობა. მისი მოდელი გამოვსახოთ AD ღეროს საშუალებით (ნახ. დ), რომელზეც მოქმედებენ: აქტიური  $\vec{P}$  ძალა, A და B ღერძებზე წნევის რეაქციის  $\vec{R}_A$  და  $\vec{R}_B$  ძალები და D სახსრის რეაქციის  $\vec{R}_D$  ძალა, რომელიც დანარჩენი ძალების პარალელურია.

მივცეთ A სახსარს შესაძლო გადაადგილება  $AA_1 = \delta s_A$ . მაშინ B უძრავია, ხოლო C და D წერტილები მიიღებენ შესაძლო გადაადგილებებს:  $CC_1 = \delta s_C$ ;

$DD_1 = \delta s_D$ . შესაბამის მოდელს აქვს (დ) სახე.

AD ღეროს წონასწორობისათვის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის თანახმად გვექმება:

$$-R_A \delta s_A + P \delta s_C - R_D \delta s_D = 0;$$

აქედან  $R_D = (P \delta s_C - R_A \delta s_A) / \delta s_D$ .

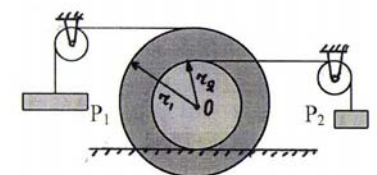
თუ ვისარგებლებთ (\*\*) ტოლობებით, მივიღებთ:

$$R_D = (P \cdot 2/3 \cdot \delta s_A - R_A \cdot \delta s_A) / (1/3 \cdot \delta s_A) = 2P - 3R_A = 250 \text{ კნ.}$$

$$\text{პასუხი: } R_A = 850 \text{ კნ}; \quad R_B = 800 \text{ კნ};$$

$$R_E = 500 \text{ კნ}; \quad R_D = 250 \text{ კნ.}$$

**ამოცანა 10.4.** საგორავი, რომელიც შედგება ერთმანეთთან ხისტად შეერთებული  $r_1$  და  $r_2$  რადიუსების მქონე ცილინდრებისგან, |ჰორიზონ. სიბრტყეზე შეკა



ნახ. 90.

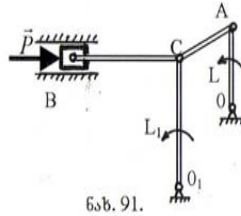
წონასწორობაში ორი  $P_1$  და  $P_2$  ტვირთების საშუალებით. უგულებელყავით საყრდენ სიბრტყეზე საგორავის სრიალი და იპოვეთ დამოკიდებულება ამ ტვირთების შესაძლო  $\delta s_1$  და  $\delta s_2$  გადაადგილებებს შორის.

პასუხი:  $\delta s_1 / \delta s_2 = (r_1 + r_2) / 2r_2$

**ამოცანა 10.5.** რუდმხარა მექანიზმის

ძრავის დგუშზე მოქმედებს  $\vec{P}$  ძალა.  $O_1C$  მხარზე მოდებულია მაბრუნებელი მომენტი  $L_1 = 3/2 \cdot Ph$ . სახსრებში ხახუნის უგულებელყავით და განსაზღვრეთ  $L$  მომენტი, რომელიც უნდა მოვდოთ  $OA$  მრუდმხარას, რათა მექანიზმი დარჩეს წონასწორობაში, თუ  $OA = h$ ,  $O_1C = 3h$  და ორივე მხარი ვერტიკალურია.

პასუხი:  $L = Ph/2$



ნახ. 91.

**ამოცანა 10.6.**

მრუდმხარა - ცოცია მექანიზმი იმყოფება წონასწორობაში ნახაზზე გამოსახულ მდგომარეობაში. განსაზღვრეთ ED ზამბარის დეფორმაცია  $h$ , თუ ზამბარის სიხისტის კოეფიციენტი  $c = 20$  ნ/სმ;  $OE = AE$ ;  $P = 200$  ნ;  $Q = 100$  ნ;  $\alpha = 30^\circ$ ; ზამბარა გაჭიმულია.

პასუხი:  $h = 2,88$  სმ.

**ამოცანა 10.7.**

ნახაზზე გამოსახული მექანიზმი იმყოფება წონასწორობაში. განსაზღვრეთ  $Q$  ტვირთის წონა, თუ მოძრავი  $O$  ბლოკის წონა  $P = 200$  ნ, ხოლო  $c = 50$  ნ/სმ სიხისტის ზამბარა გაჭიმულია  $h = 4$  სმ სიგრძით.

პასუხი:  $Q = 200$  ნ.

**ამოცანა 10.8.**

ნახაზზე მოცემული დიფერენციალური პოლისპასტი იმყოფება წონასწორობაში. განსაზღვრეთ დამოკიდებულება  $Q$  ძალასა და  $D$  ტვირთის წონას შორის, თუ ზედა დიდი ბლოკის რადიუსია  $R$ , ხოლო ზედა მცირე ბლოკის რადიუსია  $r$ .

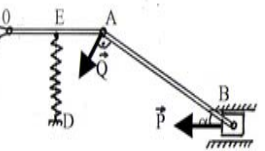
ბლოკების წონები და ღერძებში ხახუნის უგულებელყავით.

პასუხი:

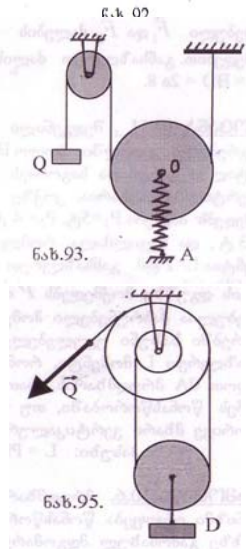
$Q = (R - r) P / 2R$

**ამოცანა 10.9.**

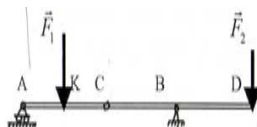
AD კოჭი შედგება AC და CD უწონადი ძელებისაგან, რომლებიც



ნახ. 93.



ნახ. 95.



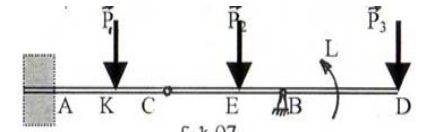
ნახ. 96.

ერთმანეთთან შეერთებულია C სახსრით. კოჭი ძევს A და B საყრდენებზე. კოჭი წონასწორობაშია მასზე მოდებული  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალების მოქმედებით.

განსაზღვრეთ  $\vec{F}_2$  ძალის სიდიდე, თუ  $F_1 = 2$  ტ,  $AK = KC = a$  მ,  $BC = BD = 2a$  მ. პასუხი:  $F_2 = 1$  ტ.

**ამოცანა 10.10.**

შედგენილი უწონადი AD კოჭი A ბოლოთი ხისტადაა ჩამაგრებული კედელში, ხოლო B წერტილში ეყრდნობა საგორავს. C წერტილში სახსარია. კოჭზე მოქმედებს ძალები  $P_1 = 5$  ტ,  $P_2 = 4$  ტ,  $P_3 = 3$  ტ, და წვევილძალა, რომლის მომენტიც  $L = 2$  ტმ. განსაზღვრეთ ჩამაგრების რეაქციები, თუ  $AC = CB = BD = 3$  მ,  $KC = EB = 1$  მ.



ნახ. 97.

პასუხი:  $R_A = 4$  ტ;  $L_A = 7$  ტმ;  $R_B = 8$  ტ.

**§11. დინამიკის ზოგადი განტოლება (დალამბერ - ლაგრანჟის განტოლება)**

დინამიკის ზოგადი განტოლება არის შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპის ანალოგია მოძრავი სისტემისათვის. იგი შემდეგში მდგომარეობს:

გეომეტრიული, იდეალური ბმების მქონე სისტემის მოძრაობისას მისი ყოველი მდებარეობისათვის სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური ძალის და ინერციის ძალის მიერ შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი სისტემის ნებისმიერ შესაძლო გადაადგილებაზე ნულის ტოლია.

დინამიკის ზოგადი განტოლება:  $\sum (\vec{F}_k + \vec{\Phi}_k) \delta \vec{r}_k = 0$ ;

ანუ  $\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \delta \vec{r}_k = 0$ . (11.1)

აქ  $\vec{\Phi}_k = -m_k \vec{w}_k$  - სისტემის k - ურ წერტილზე მოქმედი ინერციის ძალაა.

გეგმილებში:

$\sum [(F_{kx} - m_k \ddot{x}_k) \delta x_k + (F_{ky} - m_k \ddot{y}_k) \delta y_k + (F_{kz} - m_k \ddot{z}_k) \delta z_k] = 0$ . (11.2)

ინერციის ძალების მუშაობათა გამოთვლა მყარი სხეულის წერტილების შესაძლო გადაადგილებისას გამოითვლება ფორმულებით:

1) გადატანითი მოძრაობი  $69 \quad \vec{\Phi} \cdot \delta \vec{r}$ ; (11.3)

$\vec{\Phi} = -M \vec{w}$  - ინერციის ძალების ტოლქმედია.

2) უძრავი  $Oz$  ღერძის გარშემო ბრუნვისას:  $\delta A = -J_z \cdot \varepsilon_z \cdot \delta \varphi$ ; (11.4)

$J_z$  - სხეულის ინარციის მომენტი ბრუნვის  $Oz$  ღერძის მიმართ;  $\varepsilon_z$  - ბრუნვის კუთხური აჩქარება.

3) *ბრტყელი მოძრაობისას*:  $\delta A = M \vec{W}_c \delta \vec{r}_c + J_c \cdot \varepsilon_z \cdot \delta \varphi$ ; (11.5)

$\vec{W}_c$  - სხეულის სიმძიმის ცენტრის აჩქარება;  $\delta \vec{r}_c$  - სხეულის სიმძიმის ცენტრის შესაძლო გადაადგილება;  $\delta \varphi$  - სხეულის შესაძლო მობრუნება.

ხახუნის ძალების არსებობისას, ისინი მიეკუთვნებიან აქტიურ ძალებს.

დინამიკის ზოგადი განტოლების დახმარებით შეიძლება ამოიხსნას სისტემის დინამიკის ამოცანები, რომლებშიც შედიან: ინერციულობის მახასიათებლები (მასები და ინერციის მომენტები), სისტემის წერტილების აჩქარებები, აქტიური ძალები ან მომენტები, სრიალის ან გორვის ხახუნის კოეფიციენტები, ზამბარების დრეკადობის კოეფიციენტები.

ამოცანები დინამიკის ზოგადი განტოლების დახმარებით რეკომენდებულია ამოიხსნას შემდეგი თანამიმდევრობით:

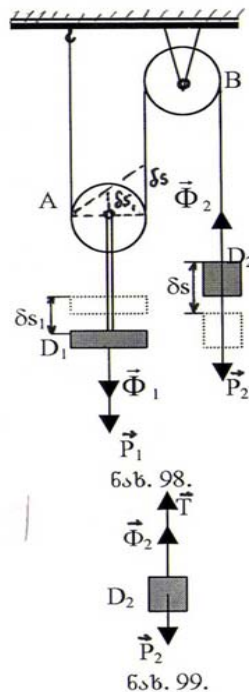
- 1) ნახაზზე გამოვსახოთ სისტემის მდგომარეობა დროის განსახილველ მომენტში;
- 2) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალები;
- 3) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი რეაქციის (არა იდეალური ბმების) ძალები;
- 4) მოვლოთ სისტემის წერტილებს ინერციის ძალები;
- 5) მივცეთ სისტემის ერთ-ერთ წერტილს შესაძლო გადაადგილება და მისი საშუალებით გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის მოდების წერტილის შესაძლო გადაადგილება;
- 6) გამოვთვალოთ ყველა ძალის შესაძლო მუშაობა და შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება;
- 7) ამოვხსნათ ეს განტოლება.

**ამოცანა 11.1.** ნახაზზე ნაჩვენებია

ბლოკების სისტემაზე ჩამოკიდებულია  $D_1$  და  $D_2$  ტვირთი, რომელთა წონებია შესაბამისად  $P_1 = 10$  ნ და  $P_2 = 8$  ნ. განსაზღვრეთ  $D_2$  ტვირთის  $w_2$  აჩქარება და თოკის  $T$  დაჭიმულობა, თუ ბლოკების მასებს უგულებელვყოფთ.  $D_1$  და  $D_2$  ტვირთების აჩქარებების ფარდობა უდრის  $0,5$ -ს ( $w_1/w_2 = 0,5$ ).

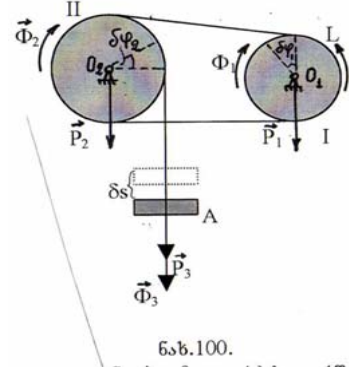
**ამოხსნა.** სისტემა შედგება  $D_1$  და  $D_2$  სხეულისაგან და უწო 70 ა B ბლოკებისაგან.

დაუშვათ  $D_2$  ტვირთი მოძრაობს ქვევით.



ნახ. 98.

ნახ. 99.



ნახ.100.

სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური  $\vec{P}_1$  და  $\vec{P}_2$  ძალები და ინერციისძალები  $\vec{\Phi}_1$  და  $\vec{\Phi}_2$ , სადაც  $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{w}_1$  და  $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{w}_2$ . (\*)

აქტიურ და ინერციის ძალებს ექნებათ ნახაზზე მითითებული მიმართულებანი.

მივცეთ  $D_2$  ტვირთს ქვევით რაიმე შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილება; მაშინ  $D_1$  ტვირთი მიიღებს ზევით  $\delta s_1 = 0,5 \cdot \delta s$  შესაძლო გადაადგილებას. მექანიკის ზოგადი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-P_1 \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 + P_2 \delta s - \Phi_2 \delta s = 0$$

შევიტანოთ აქ  $\delta s_1$ -ის მნიშვნელობა,  $\Phi_1$  და  $\Phi_2$ -ის მნიშვნელობები (\*) - დან, სადაც  $m_1 = P_1/g$ ,  $m_2 = P_2/g$ , ამასთანავე  $w_1 = 0,5 w_2$ ; ტოლობა შევკვეცოთ  $\delta s$ -ზე, მივიღებთ:  $-0,5 P_1 - 0,5 P_1/2g \cdot w_2 + P_2 - P_2/g \cdot w_2 = 0$ , საიდანაც  $w_2 = 2g(2P_2 - P_1)/(P_1 + 4P_2)$ . შევიტანოთ რიცხვითი მნიშვნელობები:

$$w_2 = 2 \cdot 9,8 (2 \cdot 8 - 10) / (10 + 32) = 2,8 \text{ მ/წმ}^2$$

$$w_2 = 2,8 \text{ მ/წმ}^2$$

ახლა განვსაზღვროთ თოკის დაჭიმულობა  $T$ .

წარმოვიდგინოთ, რომ თოკი გადაჭრილია და მისი მოქმედება ტვირთზე შევცვალოთ რეაქციის ძალით. თუ  $D_2$  ტვირთს მოვდებთ აგრეთვე ინერციის  $\Phi_2$  ძალას და ტვირთს მივანიჭებთ შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილებას, შევვიძლია შევადგინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$P_2 \delta s - \Phi_2 \delta s - T \delta s = 0$$

აქედან  $T = P_2 - \Phi_2$ , ანუ  $T = P_2 - P_2/g \cdot w_2$ .

რიცხვითი მნიშვნელობების შეტანით მივიღებთ: **T = 5,712 ნ.**

**ამოცანა 11.2.** ორი მთლიანი ერთგვაროვანი I და II ლილვი, რომელთა მასებია  $m_1$  და  $m_2$ , ხახუნის გარეშე ბრუნავენ პარალელური  $O_1$  და  $O_2$  ღერძების გარშემო უსასრულო ღვედის საშუალებით, ისე, რომ სრიალს ადგილი არა აქვს.  $r_1$  რადიუსის I ლილვზე მოდებულია მამრუნებელი მომენტი  $L$ , ხოლო II ლილვზე ეხვევა ბაგირი, რომლის ბოლოშიც მიბმულია  $m_3$  მასის ტვირთი. განსაზღვრეთ ტვირთის  $w$  აჩქარება, თუ ღვედისა და ბაგირის მასა უგულებელვყოფილია.

**ამოხსნა.** სისტემა შედგება

I და II ლილვებისაგან, A ტვირთისაგან, უწონადი ღვედისა და ბაგირისგან. ამოცანის პირობის თანახმად ლილვები ბრუნავენ საათის ისრის ბრუნვის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ტვირთი მოძრაობს ზევით.

სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური

ძალები: ლილვების წონები  $P_1$  და  $P_2$ , ტვირთის წონა  $P_3$ , მახრუნებელი მომენტი  $L$ . ინერციის ძალებია:  $\Phi_1 = J_1 \epsilon_1$ ,  $\Phi_2 = J_2 \epsilon_2$ ,  $\Phi_3 = m_3 w$ . ყველა ამ ძალის მიმართულება ნაჩვენებია ნახაზზე.

მივცეთ  $A$  ტვირთის რაიმე შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილება ზევით. მაშინ  $II$  ლილვი შემობრუნდება  $O_2$  ღერძის გარშემო შესაძლო  $\delta \varphi_2$  კუთხით, ხოლო  $I$  ლილვი შემობრუნდება  $O_1$  ღერძის გარშემო შესაძლო  $\delta \varphi_1$  კუთხით. დინამიკის ზოგადი განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$-P_3 \delta s - \Phi_3 \delta s - \Phi_2 \delta \varphi_2 - \Phi_1 \delta \varphi_1 + L \delta \varphi_1 = 0;$$

ანუ  $-m_3 g \delta s - m_3 w \delta s - J_2 \epsilon_2 \delta \varphi_2 - J_1 \epsilon_1 \delta \varphi_1 + L \delta \varphi_1 = 0$ . (\*)

აქ  $\epsilon_1$  და  $\epsilon_2$  შესაბამისად  $I$  და  $II$  ლილვის ბრუნვის კუთხური აჩქარებაა.

სისტემის მიერ მიღებულ შესაძლო გადაადგილებებს შორის მყარდება შემდეგი დამოკიდებულებები (შეამოწმეთ!!):

$$\delta s = r_2 \delta \varphi_2; \quad \delta \varphi_2 = 1/r_2 \delta s;$$

$$r_2 \delta \varphi_2 = r_1 \delta \varphi_1; \quad \delta \varphi_1 = r_2/r_1 \delta \varphi_2 = 1/r_1 \delta s;$$

აქ  $r_1$  და  $r_2$  შესაბამისად  $I$  და  $II$  ლილვების რადიუსებია.

გარდა ამ მნიშვნელობებისა, (\*) ტოლობაში საჭიროა შევიტანოთ შემდეგი სიდიდეები:  $J_1 = 1/2 \cdot m_1 r_1^2$ ;  $J_2 = 1/2 \cdot m_2 r_2^2$ ;  $\epsilon_2 = w/r_2$ ;  $\epsilon_1 = w/r_1$ .

ყველა მიღებული მნიშვნელობის შეტანით (\*) ტოლობაში და

მისი  $\delta s$ -ზე შეკვეციტ მივიღებთ:

$$-m_3 g - m_3 w - 1/2 \cdot m_2 r_2^2 \cdot w/r_2 \cdot 1/r_2 - 1/2 \cdot m_1 r_1^2 \cdot w/r_1 \cdot 1/r_1 + L \cdot 1/r_1 = 0;$$

აქედან  $(m_3 + 1/2 \cdot m_2 = 1/2 \cdot m_1) w = 1/r_1 \cdot L - m_3 g$ ;

საიდანაც  $w = 2(L - m_3 r_1 g) / r_1 (m_1 + m_2 + 2m_3)$ .

**დავალება:** გამოთვალეთ ბაგირის დაჭიმულობა! [პასუხი:  $T = m_3(g+w)$ ].

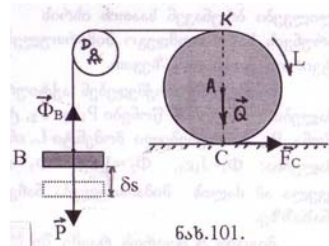
**ამოცანა 11.3.**  $P$  წონის  $B$  ტვირთის მოძრაობაში მოჰყავს  $Q$  წონის

$R$  რადიუსიანი ერთ  $72$

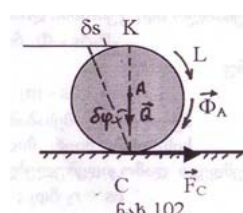
ცილინდრული  $A$  საგორავი დახვეული თოკის საშუალებით. განსაზღვრეთ  $B$  ტვირთის აჩქარება, თუ საგორავი უსრიალოდ გორავს, ხოლო გორვის სახუნის კოეფიციენტია  $f$ . უძრავი  $D$  ბლოკის მასა უგულებელყოფილია.

**ამოცანა.** განსახილველი

სისტემა შედგება  $P$  წონის  $B$  ტვირთისაგან და  $Q$  წონის ერთგვაროვანი  $A$  ცილინდრისაგან.  $D$  ბლოკი და ბაგირი უწონადი სხეულებია და



ნახ.101.



ნახ.102.

მხედველობაში არ მიიღებია. სისტემაზე მოქმედებენ აქტიური ძალები  $P$  და  $Q$ . აგრეთვე სიბრტყესთან ცილინდრის შეხების  $C$  წერტილში შეჭიდების  $F_C$  ძალა, რომელიც ეწინააღმდეგება სრიალს. ცილინდრზე მოქმედებს გორვისადმი წინააღმდეგობის წყვილძალა, რომლის მომენტი  $L = f N = f Q$ .

მოვლოთ სისტემას ინერციის ძალები (იხ.ნახაზი): გადატანითად ქვევით მოძრავი  $B$  ტვირთის ინერციის ძალა

$$\Phi_B = m_B w_B;$$

აგრეთვე ცილინდრის ინერციის ძალა  $\Phi_A$ . ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას; მისი ბრუნვის მყისი ცენტრია  $C$  წერტილი. ამიტომ, ცილინდრის ინერციის ძალა იქნება  $\Phi_A = J_C \epsilon_C$ , სადაც  $J_C$  - ცილინდრის ინერციის მომენტი  $C$  წერტილის მიმართ, ხოლო  $\epsilon_C$  არის ცილინდრის მყისი კუთხური აჩქარება  $C$  - ს მიმართ ბრუნვისას.

მივანიჭოთ  $B$  ტვირთს რაიმე შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილება. მაშინ ცილინდრი შემობრუნდება  $C$  წერტილის გარშემო  $\delta \varphi$  კუთხით. რადგანაც  $K$  წერტილიც მიიღებს შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილებას, ამიტომ  $\delta s = 2R \delta \varphi$ .

შევაღვინოთ დინამიკის ზოგადი განტოლება:

$$P \delta s - \Phi_B \delta s - \Phi_A \delta \varphi - L \delta \varphi = 0; \quad (*)$$

აქ მხედველობაშია მიღებული, რომ სიბრტყესთან ცილინდრის შეჭიდების  $F_C$  ძალის შესაძლო მუშაობა ნულის ტოლია, რადგანაც იგი მოღებულია ბრუნვის მყისი ცენტრში.

ჰიუგენს - შტაინერის თეორემის თანახმად:

$$J_C = J_A + m_A R^2 = 1/2 \cdot Q/g \cdot R^2 + Q/g \cdot R^2 = 3/2 \cdot Q/g \cdot R^2;$$

აღებულ მდებარეობაში  $K$  წერტილი ბრუნავს  $C$ -ს გარშემო  $2R$  რადიუსის წრეწირის რკალზე  $\epsilon_C$  მყისი კუთხური აჩქარებით, ამიტომ:  $w_B = w_K = 2R \epsilon_C$ , საიდანაც  $\epsilon_C = w_B / 2R$ .

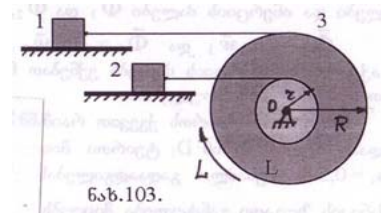
თუ გავითვალისწინებთ ყველა მიღებულ მნიშვნელობას, მაშინ (\*) ტოლობა ჩაიწერება ასე:

$$P \cdot 2R \delta \varphi - P/g \cdot w_B \cdot 2R \delta \varphi - 3/2 \cdot Q/g \cdot R^2 \cdot w_B / 2R \cdot \delta \varphi - f Q \delta \varphi = 0,$$

საიდანაც  $w_B = 4g(2PR - fQ) / R(8P + 3Q)$ .

**დავალება:** გამოთვალეთ ბაგირის დაჭიმულობა.

**ამოცანა 11.4.** განსაზღვრეთ მე-3 ღოლის კუთხური აჩქარება, თუ მისი ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ  $J_3 = 0,1$  კგმ<sup>2</sup>. ღოლზე მოქმედი წყვილძალის მომენტი  $L = 0,6$  ნმ. ტვირთების მასებია  $m_1 = m_2 = 10$  კგ; რადიუსებია  $R = 0,2$  მ,  $r = 0,1$  მ.



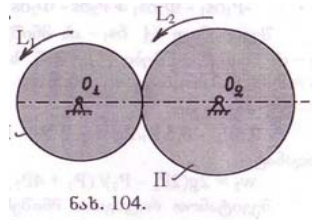
ნახ.103.

პასუხი:  $\varepsilon = 1 \text{ წმ}^{-2}$ .

**ამოცანა 11.5.** ნახაზზე მოცემულია ერთმანეთთან ჩაბმაში მყოფი ორი კბილა თვალი.  $r$  რადიუსის და  $m_1$  მასის I კბილა თვალი მოძრაობაში მოდის მარჯვენა  $L_1$  მომენტის მოქმედებით.

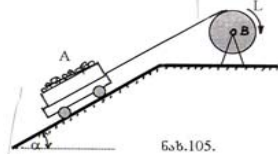
$R$  რადიუსის და  $m_2$  მასის II კბილა თვალზე მოდებულია წინაღობის მომენტი  $L_2$ . კბილა თვლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან დისკოებად და გამოთვალეთ I თვალის ბრუნვის კუთხური აჩქარება.

პასუხი:  $\varepsilon = 2(RL_1 - rL_2) / Rr^2(m_1 + m_2)$ .



ნახ. 104.

**ამოცანა 11.6.** P წონის A ვაგონეტი იწეებს ასვლას ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ სიბრტყეზე B ჯალამბარის საშუალებით. განსაზღვრეთ ვაგონეტის აჩქარება იმ შემთხვევაში, როცა ჯალამბარის B დოღზე მოდებულია მუდმივი მარჯვენა მომენტი  $L$ , თუ ბორბლებიანი წვეილთვალასინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ არის  $J_1$ . ბორბალის რადიუსია  $r$ , ხახუნის კოეფიციენტი  $f$ , დოლის რადიუსი  $R$ , ხოლო დოლის ინერციის მომენტი  $J_2$ .

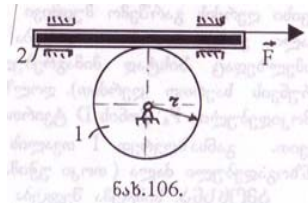


ნახ. 105.

პასუხი:  $w = [L - PR(\sin\alpha + f \cos\alpha)] / R(P/g + 2J_1/r^2 + J_2/R^2)$ .

**ამოცანა 11.7.**  $m=2,5 \text{ კგ}$  მასის ლარტყავზე (2) მოდებულია  $\varepsilon = 74 \text{ წმ}^{-2}$  ალა  $F=9 \text{ წ}$ . განსაზღვრეთ I კბილა დოლის კუთხური აჩქარება  $t=1 \text{ წმ}$  მომენტში, თუ მისი რადიუსი  $r=0,4 \text{ მ}$ , ხოლო ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ  $J_1=2 \text{ კგმ}^2$ .

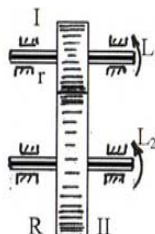
პასუხი:  $\varepsilon = 1,5 \text{ წმ}^{-2}$ .



ნახ. 106.

**ამოცანა 11.8.** კბილანა რედუქტორი შედგება ორი, I და II კბილა თვალისაგან, რომელთა მასებია შესაბამისად  $m_1$  და  $m_2$ , ხოლო რადიუსები  $r$  და  $R$ .

I თვალზე მოქმედებს  $L_1$  მარჯვენა  $L_1$  მომენტი, რომელსაც იგი მოძრაობაში მოჰყავს, ხოლო მეორე



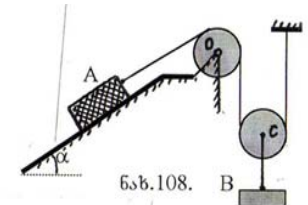
ნახ. 107

თვალზე მოქმედებს დამუხრუჭებელი მომენტი  $L_2=3/4 \cdot L_1$ . განსაზღვრეთ თვლების  $\varepsilon_1$  და  $\varepsilon_2$  კუთხური აჩქარებები, თუ თვლებს ჩათვლით ერთგვაროვან დისკოებად და  $R=12r$ . საკისრებში ხახუნის უგულებელყავით.

პასუხი:  $\varepsilon_1 = 15L_1 / 8r^2(m_1 + m_2)$ ;

$\varepsilon_2 = 5L_1 / 32r^2(m_1 + m_2)$ .

**ამოცანა 11.9** განსაზღვრეთ  $m_1$  მასის A სხეულის  $w$  აჩქარება, რომელიც ეშვება ქვევით ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ არაგლუვ სიბრტყეზე. ხახუნის კოეფიციენტია  $f$ . თითოეული ბლოკი წარმოადგენს  $r$  რადიუსიან  $m_2$  მასის მთლიან წრიულ დისკოს. B ტვირთის მასა არის  $m_3$ .



ნახ. 108.

პასუხი  $w = 4g[2m_1(\sin\alpha - f \cos\alpha) - m_2 - m_3] / (8m_1 + 7m_2 + 2m_3)$ .

## § 12. განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული კალა

მექანიკური სისტემის განზოგადებული კოორდინატები ეწოდება იმ დამოუკიდებელ პარამეტრებს, რომელთა მოცემითაც ცალსახად განისაზღვრება სისტემის ყველა წერტილის მდებარეობა.

იდეალური და ჰოლონომური ბმების მქონე მექანიკური სისტემის დამოუკიდებელ განზოგადებულ კოორდინატთა რიცხვს ეწოდება სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი.

$s$  თავისუფლების ხარისხის მქონე  $n$  ნივთიერი წერტილისაგან შედგენილი არათავისუფალი მექანიკური  $M_k(x_k, y_k, z_k)$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) სისტემის განზოგადებული კოორდინატები აღინიშნება დამოუკიდებელი  $q_1, q_2, \dots, q_s$  პარამეტრებით.

სიდიდეებს  $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$  - ეწოდება განზოგადებული შესაძლო გადაადგილებები (ანუ განზოგადებული კოორდინატების ვარიაციები), ხოლო სიდიდეებს  $\dot{q}_j = dq_j/dt$  ( $j=1, 2, \dots, s$ ) - განზოგადებული სიჩქარეები.

$q_j$  განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა  $Q_j$  ეწოდება სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების მიერ შესაძლო  $\delta q_j$  გადაადგილებაზე შესრულებულ ელემენტარულ მუშაობათა ჯამის კოეფიციენტებს:  $\delta A = Q_j \delta q_j$ . (12.1)

განზოგადებული  $Q_j$  ძალა გამოითვლება ფორმულით:

$Q_j = \partial \vec{r}_k / \partial q_j$ ; (12.2)

$$\text{ანუ } Q_j = \sum_{k=1}^n (X_k \partial x_k / \partial q_j + Y_k \partial y_k / \partial q_j + Z_k \partial z_k / \partial q_j) . \quad (12.3)$$

სადაც  $\vec{F}_k (X_k, Y_k, Z_k)$  - სისტემის  $M_k$  წერტილზე მოქმედი ძალაა.

თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, მაშინ საჭიროა გამოვთვალოთ სისტემის პოტენციური ენერგია  $\Pi$  და გამოვსახოთ ის არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატებში. მაშინ,  $q_j$  განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული  $Q_j$  ძალა განისაზღვრება ტოლობით:

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j \quad (j = 1, 2, \dots, s). \quad (12.4)$$

ნივთიერ წერტილთა სისტემისათვის განზოგადებული ძალის მოძებნა წარმოადგენს ერთ-ერთ მნიშვნელოვან საფეხურს ლაგრანჟის II გვარის განტოლებების დახმარებით ამოცანების ამოხსნის დროს.

განზოგადებული ძალების განსაზღვრის ყველაზე გავრცელებული ხერხს წარმოადგენს სისტემაზე მოქმედი აქტიური ძალების მიერ შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე შესრულებული ელემენტარული მუშაობების ჯამის გამოსახულების კოეფიციენტების განსაზღვრა: განზოგადებული  $Q_j$  ძალა ტოლია  $\delta q_j$  შესაძლო გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობის კოეფიციენტისა (იხ. (12.1) ფორმულა). ამისათვის საჭიროა:

1) დავადგინოთ მოცემული სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი და ავირჩიოთ შესაბამისი განზოგადებული კოორდინატი;

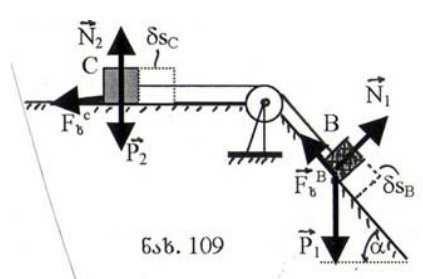
2) გამოვსახოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა აქტიური და არაიდეალური ბმების რეაქციის (მაგალითად, ხახუნის) ძალა;

3) მივცეთ სისტემას დამოუკიდებელი განზოგადებული შესაძლო გადაადგილებები;

4) ვისარგებლოთ (12.1) ტოლობით და  $Q_j$  განზოგადებული ძალის განსაზღვრავად გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალის მუშაობა  $\delta q_j$  შესაძლო გადაადგილებაზე. მასთანავე ყველა დანარჩენი შესაძლო გადაადგილება უნდა ჩავ 76 იულის ტოლი:  $\delta q_i = 0$  ( $i \neq j$ ,  $i=1, 2, \dots, s$ ).

5) თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, ვისარგებლებთ (12.4) ფორმულით.

**აშოცანა 12.1.**  $P_1$  წონის B ტვირთი და  $P_2$  წონის C ტვირთი ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან უძრავ ბლოკზე გადაკიდებული უწონადი და უჭიმადი ბაგირით. B ტვირთი სიმძიმის ძალის გავლენით გადაადგილდება ქვევით ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით



ნახ. 109

დახრილ სიბრტყეზე და მას მოძრაობაში მოჰყავს C ტვირთი, რომელიც გადაადგილდება ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტია f. ბლოკის მასა უგულებელყავით. განსაზღვრეთ განზოგადებული ძალა.

**აშოცანა 12.2.** სისტემა შედგება ორი B და C სხეულისაგან. სისტემას აქვს ერთი თავისუფლების ხარისხი - B სხეულის (ან C სხეულის) გადაადგილება.

მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატად B სხეულის გადაადგილება ქვევით  $q_1 = s_B$ . მივცეთ სისტემის B სხეულს რაიმე შესაძლო  $\delta s_B$  გადაადგილება. მაშინ სისტემის C სხეული მიიღებს შესაძლო  $\delta s_C$  გადაადგილებას. როგორც ნახაზიდან ჩანს  $\delta s_B = \delta s_C$ . (12.1) ტოლობა ასეთ სახეს მიიღებს:

$$\delta A = Q_s \delta s_B . \quad (*)$$

განზოგადებული Q ძალის ინდექსი s მიუთითებს, რომ ეს ძალა შესაბამეა განზოგადებულ s კოორდინატს.

გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა  $\delta A$ . როგორც B, ასევე C სხეულზეც მოქმედებენ სიმძიმის ძალები, ხახუნის ძალები და ზედაპირის რეაქციის ძალები. ჩვენს მიერ არჩეული განზოგადებული კოორდინატის შესაბამის შესაძლო გადაადგილებაზე სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა იქნება:

$$\delta A = (P_1 \text{Sin} \alpha - F_b^B) \delta s_B - F_b^C \cdot \delta s_C .$$

რადგანაც  $F_b^B = f P_1 \text{Cos} \alpha$ ,  $F_b^C = f P_2$ ,  $\delta s_B = \delta s_C$ , ამიტომ

$$\delta A = (P_1 \text{Sin} \alpha - f P_1 \text{Cos} \alpha - f P_2) \delta s_B .$$

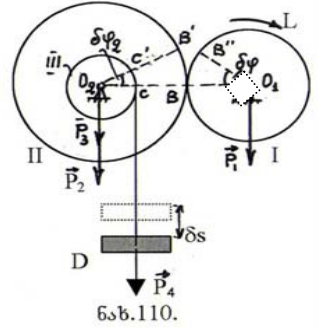
შევიტანოთ  $\delta A$  -ს ეს მნიშვნელობა (\*) ტოლობაში და განვსაზღვროთ განზოგადებული  $Q_s$  ძალა; მივიღებთ:

$$Q_s = P_1 (\text{Sin} \alpha - f \text{Cos} \alpha) - f P_2 .$$

განზოგადებულ ძალას აქვს ძალის განზომილება.

**აშოცანა 12.2.**  $P_1$  წონის და  $r_1$  რადიუსის I კბილა თვალი ბრუნავს თავისი ღერძის გარშემო მუდმივი მახრუნებელი L მომენტის მოქმედებით. I თვალი გარე ჩაბმაში იმყოფება  $P_2$  წონის და  $r_2$  რადიუსის II თვალთან, რომელზედაც ხისტად მიმაგრებულია  $P_3$  წონისა და  $r_3$  რადიუსის დოლი (ბრუნვის საერთო ღერძით). დოლზე დახვეულია ძაფი, რომლის ბოლოზე ჩამოკიდებულია  $P_4$  წონის D ტვირთი. I თვალის ბრუნვისას  $P_4$  ტვირთი ადის ზევით. განსაზღვრეთ I თვალის მობრუნების  $\varphi$  კუთხის შესაბამისი განზოგადებული ძალა (თოკი უჭიმადია).

**აშოცანა 12.3.** სისტემა შედგება ოთხი სხეულისაგან: I, II, III თვლებისა და D ტვირთისაგან. სისტემას აქვს ერთი



ნახ.110.

თავისუფლების ხარისხი - I თვალის მობრუნების  $\varphi$  კუთხე. მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად ( $q_1 = \varphi$ ).

სისტემაზე მოქმედებენ:  $P_1$  და  $P_2$  ძალები - შესაბამისად I და II თვლების წონები,  $P_3$  ძალა - დოლის წონა,  $P_4$  ძალა - D ტვირთის წონა და L მომენტის მქონე წვეილძალა.

მივანიჭოთ სისტემის I თვალს რაიმე შესაძლო  $\delta\varphi$  მობრუნება თვალის ბრუნვის მიმართულებით. მასთან ჩაბმაში მყოფი II თვალი შემობრუნდება გარკვეული  $\delta\varphi_2$  კუთხით და მამასადამე დოლიც შემობრუნდება იგივე  $\delta\varphi_2$  კუთხით. დოლი დაიხვევს დაფს და ტვირთი აიწევეს ზევით; ე.ი. D ტვირთიც მიიღებს რაღაც  $\delta s$  შესაძლო გადაადგილებას.

განზოგადებული  $\varphi$  კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული  $Q_\varphi$  ძალა გამოითვლება ტოლობიდან (იხ. (12.1) ფორმულა):

$$\delta A = Q_\varphi \delta\varphi. \quad (*)$$

გამოვთვალოთ სისტემაზე მოქმედი ყველა მოცემული ძალის მუშაობა შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე. კბილა თვლებისა და დოლის წონის  $P_1, P_2, P_3$  ძალების მოდების წერტილები უძრავნი არიან, ამიტომ ამ ძალების მუშაობები ნულის ტოლია. მამასადამე მუშაობას ასრულებენ L მომენტის წვეილძალა და ტვირთის  $P_4$  წონა; გვექნება:  $\delta A = L \delta\varphi - P_4 \delta s$ . (\*\*)

გამოვსახოთ  $\delta s$  შესაძლო გადაადგილება  $\delta\varphi$  შესაძლო მობრუნების კუთხით. როგორც ნახაზიდან ჩანს  $BB' = r_1 \delta\varphi$ , ხოლო  $BB'' = r_2 \delta\varphi_2$ . ვინაიდან  $BB' = BB''$ , ამიტომ  $r_2 \delta\varphi_2 = r_1 \delta\varphi$ ; საიდანაც  $\delta\varphi_2 = r_1/r_2 \delta\varphi$ . ამასთანავე  $\delta s = CC' = r_3 \delta\varphi_2$ ; თუ აქ შევიტანთ  $\delta\varphi_2$ -ის გამოსახულებას, გვექნება:  $\delta s = r_1 r_3 / r_2 \delta\varphi$ .

შესაძლო მუშაობის გამოსათვლელი (\*\*) ტოლობა მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\delta A = L \delta\varphi - P_4 \cdot r_1 r_3 / r_2 \delta\varphi.$$

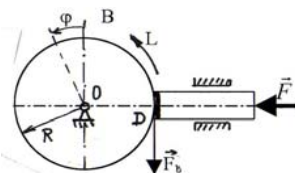
შევიტანოთ  $\delta A$ -ს მიღებული მნიშვნელობა (\*) ტოლობაში, საიდანაც განზოგადებული ძალისა

$$Q_\varphi = L - P_4 \cdot r_1 r_3 / r_2$$

განზოგადებულ ძალას აქვს ძოძხეხტის განზომილება.

**დავალება.** ამოხსენით იგივე ამოცანა, როცა განზოგადებულ კოორდინატად აღებულია D ტვირთის s გადაადგილება.

**ამოცანა 12.3.** ცილინდრი ბრუნავს ღერძის გარშემო  $L=20$  ნმ მომენტის მქონე წვეილძალის მოქმედებით. ცილინდრს აწევა სამუხრუჭე ხუნდი  $F=100$  ნ ძალით. განსაზღვრეთ განზოგადებული კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული ძალა, თუ ხუნდსა და ცილინდრს შორის სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი  $f = 0,4$ . ცილინდრის რადიუსი  $R = 0,4$  მ.



ნახ.111.

**ამოხსნა.** სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: ცილინდრისა და ხუნდისაგან. ცილინდრზე მოქმედებს მამბრუნებელი L მომენტი და დამმუხრუჭებელი ძალა  $\vec{F}_b$ :

$$F_b = f F = 0,4 \cdot 100 = 40 \text{ ნ.}$$

ცილინდრს გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი - ცილინდრის მობრუნების  $\varphi$  კუთხე. მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად  $q_1 = \varphi$ . როდესაც ცილინდრი შემობრუნდება  $\varphi$  კუთხით, მამინ ცილინდრისა და ხუნდის შეხების D წერტილი შემოწერს  $s_D = R\varphi$  რკალს. მივცეთ ცილინდრს რაიმე შესაძლო  $\delta\varphi$  შემობრუნება. მამინ D წერტილი მიიღებს შესაძლო გადაადგილებას:  $\delta s_D = R\delta\varphi$ .

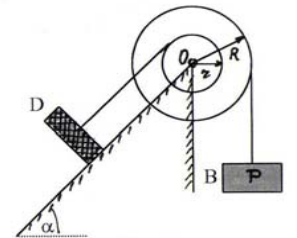
განზოგადებული  $Q_\varphi$  ძალა გამოითვლება ტოლობიდან:  $\delta A = Q_\varphi \delta\varphi$ . (\*)

სისტემის შესაძლო  $\delta A$  მუშაობას ასრულებს წვეილძალა, რომლის მომენტია L და ხახუნის ძალა  $F_b$ . გვექნება:  $\delta A = L\delta\varphi - F_b \delta s_D = L\delta\varphi - f R R \delta\varphi$ .

შევიტანოთ ეს მნიშვნელობა (\*) ტოლობაში; მივიღებთ:

$$Q_\varphi = L - f R R = 20 - 0,4 \cdot 100 \cdot 0,4 = 4 \text{ ნმ}; \quad Q_\varphi = 4 \text{ ნმ.}$$

**ამოცანა 12.4.** P წონის B და G წონის D ტვირთები მიბმულნი არიან უწონადი და უჭიმადი თოკის ბოლოებზე. თოკი გადაკიდებულია საერთო ღერძის მქონე r და R რადიუსებიან შეწვეილებულ დოლებზე. B ტვირთი სიმძიმის ძალით გადაადგილდება ქვევით, ხოლო D ტვირთი ზევით გადაადგილდება



ნახ.112.

ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ სიბრტყეზე. სრიალის ხახუნის კოეფიციენტი f.

განსაზღვრეთ B ტვირთის s გადაადგილების შესაბამისი განზოგადებული ძალა.

$$\text{პასუხი: } Q_s = [P - r/R \cdot G(\sin\alpha + f \cos\alpha)] \text{ ნ.}$$

### §13. ლაბრანჟის II გვარის განტოლებები

ნივთიერ წერტილთა (სხეულთა) სისტემის მოძრაობის შესასწავლად ხშირ შემთხვევაში სარგებლობენ დინამიკის ზოგადი განტოლებიდან გამომდინარე, ეგრეთ წოდებულ ლაბრანჟის II გვარის განტოლებებით.

დაუშვათ  $n$  ნივთიერ წერტილთა სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვია  $s$ . ეს ნიშნავს, რომ არსებობს  $s$  განზოგადებული კოორდინატი  $q_1, q_2, \dots, q_s$ , რომლებიც ცალსახად განსაზღვრავენ სისტემის მდებარეობას სივრცეში. მაშინ დინამიკის ზოგადი განტოლება

$$\sum (\vec{F}_k - m_k \vec{w}_k) \delta \vec{r}_k = 0$$

განზოგადებულ კოორდინატებში მიიღებს ასეთ სახეს:

$$d(\partial T / \partial \dot{q}_j) / dt - \partial T / \partial q_j = Q_j, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (13.1)$$

ამ განტოლებებს ლაგრანჟის მეორე გვარი განტოლებები ეწოდებათ.

აქ  $T$  გამოსახავს სისტემის კინეტიკურ ენერგიას, ხოლო  $Q_j$  - განზოგადებული  $q_j$  კოორდინატის შესაბამის განზოგადებულ ძალას;  $\dot{q}_j$  - განზოგადებული სიჩქარეა ( $\dot{q}_j = dq_j / dt$ ).

თუ სისტემაზე მოქმედი ყველა ძალა პოტენციურია, მაშინ

$$Q_j = - \partial \Pi / \partial q_j, \quad (13.2)$$

სადაც  $\Pi$  - სისტემის პოტენციური ენერგიაა. ლაგრანჟის II გვარის (13.1) განტოლება მიიღებს სახეს:

$$d(\partial L / \partial \dot{q}_j) / dt - \partial L / \partial q_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, s), \quad (13.3)$$

აქ  $L = T - \Pi$  ფუნქციას ეწოდება ლაგრანჟის ფუნქცია (ან კინეტიკური პოტენციალი).

(13.1) ან (13.3) განტოლებები წარმოადგენენ მეორე რიგის ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას  $q_j$ -ს მიმართ. ეს სისტემა იმდენ უცნობს შეიცავს, რისი ტოლიც არის სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. თუ მოვახდენთ ამ განტოლებების ინტეგრებას, მივიღებთ განზოგადებულ კოორდინატებს, როგორც  $t$  დროის ფუნქციებს. ინტეგრების მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობების გათვალისწინებით.

ლაგრანჟის მეორე გვარის 80 ების დახმარებით დინამიკის ამოცანების ამოხსნა სასურველია ჩატარდეს შემდეგი თანამიმდევრობით:

1) პირველ ყოვლისა საჭიროა დადგინდეს განსახილველი სხეულის ან სისტემის თავისუფლების ხარისხის რიცხვი. თავისუფლების ხარისხის წინასწარი დადგენა საშუალებას მოგვცემს განვსაზღვროთ საძიებელ განზოგადებულ კოორდინატთა რაოდენობა, ე.ი. დავადგინოთ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებათა რაოდენობა;

2) ავირჩიოთ სისტემის თავისუფლების ხარისხის ტოლი რაოდენობის განზოგადებული კოორდინატები ( $q_j$ ). ამოცანის ამოხსნის სიმარტივე დამოკიდებულია იმაზე, თუ რამდენად მარჯვედ ავირჩევთ განზოგადებულ კოორდინატებს; ეს კი შესაძლებელია გარკვეული პრაქტიკის შედეგად.

3) დავწეროთ არჩეული განზოგადებული კოორდინატებისათვის ლაგრანჟის მეორე გვარის განტოლებები;

4) გამოვთვალოთ არჩეული განზოგადებული კოორდინატების შესაბამისი სისტემის განზოგადებული ძალები ( $Q_j$ ).

5) გამოვთვალოთ განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია ( $T$ ) და გამოვსახოთ იგი არჩეული განზოგადებული  $q_j$  კოორდინატების და განზოგადებული  $\dot{q}_j$  სიჩქარეების საშუალებით;

6) მოვებნოთ კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T / \partial q_j; \quad \partial T / \partial \dot{q}_j; \quad d(\partial T / \partial \dot{q}_j) / dt.$$

7) მიუთითოთ საწყისი პირობები (განზოგადებული კოორდინატებისა და განზოგადებული სიჩქარეების საწყისი მნიშვნელობები), როცა წერტილთა სისტემა იწყებს მოძრაობას.

8) მიღებული სიდიდეები ჩავსვათ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებებში და ამოვხსნათ ისინი, ისე, რომ დაკმაყოფილდეს საწყისი პირობები.

თუ სისტემაზე მოქმედი ძალები პოტენციურია, მაშინ, სისტემის პოტენციურ ენერგიას ( $\Pi$ ) გამოვსახავთ განზოგადებული კოორდინატებით, შევადგენთ ლაგრანჟის ფუნქციას ( $L$ ) და გამოვიყენებთ (13.3) განტოლებებს.

### ამოცანა 13.1.

$P_2$  წონის და  $r$  რადიუსის მთლიანი წრიული დოლი, რომელსაც შეუძლია ბრუნვა ჰორიზონტალური  $O$  ღერძის გარშემო, მოძრაობაში მოდის მასზე დახვეული უწონადი და უჭიმადი თოკის ბოლოში მიბმული  $P_1$  წონის  $B$  ტვირთის საშუალებით. განსაზღვრეთ ტვირთის აჩქარება, თუ ხახუნს უგულვებელყოფთ.

ამოხსნა. მოცემულია ორი სხეულისაგან შედგენილი სისტემა:  $B$  ტვირთი და  $O$  ცილინდრული დოლი. სისტემას გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი. სისტემის მოძრაობა სავსებით ხასიათდება თოკის  $CB = s$  სიგრძის ცვალებადობით. მივიღოთ განზოგადებულ კოორდინატად  $s$  მანძილი:  $q_1 = s$

ლაგრანჟის II გვარის განტ 81 შემთხვევაში ასე ჩაიწერება:

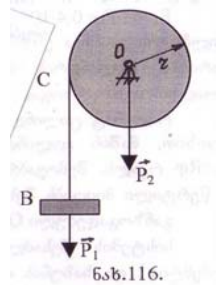
$$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt - \partial T / \partial s = Q_s. \quad (1)$$

განვსაზღვროთ განზოგადებული  $s$  კოორდინატის შესაბამისი განზოგადებული  $Q_s$  ძალა. გამოვიყენოთ ტოლობა:  $\delta A = Q_s \delta s$ , (2)

სადაც  $\delta A$  - სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობაა,

$\delta s$  -  $B$  სხეულის შესაძლო გადაადგილება.

$B$  სხეულის შესაძლო  $\delta s$  გადაადგილებისას დოლი შემობრუნდება შესაძლო  $\delta \varphi$  კუთხით, ხოლო



ნახ.116.

სისტემაზე მოქმედი და ძალების მიერ შესრულებული ელემენტარულ მუშაობათა ჯამი იქნება  $\delta A = P_1 \delta s$ , ( $P_2$  მოდებულია უძრავ 0 წერტილში). მაშასადამე (2) ტოლობიდან გვექნება:  $P_1 \delta s = Q_s \delta s$

საიდანაც  $\frac{Q_s = P_1}{\delta s} = P_1$ . (3)  
განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია შედგება B ტვირთისა და ცილინდრული დოლის კინეტიკური ენერგიებისაგან:  $T = T_1 + T_2$ .

B ტვირთი ასრულებს გადატანით მოძრაობას  $v_B = \dot{s}$  ( $\dot{s} = ds/dt$ ) სიჩქარით, ამიტომ  $T_1 = 1/2 \cdot m_B v_B^2$ , ანუ  $T_1 = P_1/2g \cdot \dot{s}^2$ .  
დოლი ასრულებს ბრუნვით მოძრაობას 0 ღერძის გარშემო, ამიტომ

$$T_2 = 1/2 \cdot J_0 \omega^2,$$

სადაც  $J_0 = P_2/2g \cdot r^2$ , ხოლო  $\omega$  - დოლის ბრუნვის კუთხური სიჩქარეა. ვინაიდან  $v_C = v_B = \dot{s}$ , ხოლო  $v_C = \omega r$ , ამიტომ  $\omega = \dot{s}/r$ ; მაშასადამე გვექნება:  $T_2 = 1/2 \cdot P_2/2g \cdot r^2 \cdot (\dot{s}/r)^2$ , ანუ  $T_2 = P_2/4g \cdot \dot{s}^2$ .

თუ მხედველობაში მივიღებთ  $T_1$  და  $T_2$ -ს მნიშვნელობებს, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = P_1/2g \cdot \dot{s}^2 + P_2/4g \cdot \dot{s}^2, \text{ ანუ } T = (2P_1 + P_2)/4g \cdot \dot{s}^2.$$

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T / \partial s = 0;$$

$$\partial T / \partial \dot{s} = (2P_1 + P_2)/2g \cdot \dot{s}$$

$$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = (2P_1 + P_2)/2g \cdot \ddot{s}.$$

თუ ამ მნიშვნელობებს და  $Q_s$ -ის მნიშვნელობას (3) -დან შევიტანთ ლაგრანჟის II გვარის (1) განტოლებაში, მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას განზოგადებული  $s$  კოორდინატის მიმართ:

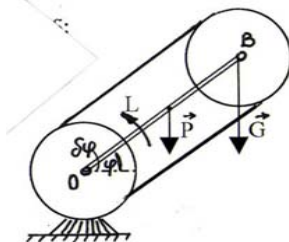
$$(2P_1 + P_2)/2g \cdot \ddot{s} = P_1,$$

საიდანაც განისაზღვრება B ტვირთის აჩქარება:  $w = \ddot{s} = 2P_1 g / (2P_1 + P_2)$ .

**დასაღმბა:** მიიღეთ მხედველობაში, რომ სისტემაზე მოქმედებენ მხოლოდ სიმძიმის ძალები. გამოთვალეთ სისტემის პოტენციური ენერგია II, გამოსახეთ ის არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატში და განზოგადებული  $Q_s$  ძალა განსაზღვრეთ (13.2) ტოლობიდან:  $Q_s = -\partial \Pi / \partial q_1$ .

**ამოცანა 13.2.**

იპოვეთ ვერტიკალურ სიბრტყეში მოთავსებული მექანიზმის  $OB = \ell$  მრუდმხარას კუთხური აჩქარება, თუ იგი B ბოლოთი ატარებს  $r$  რადიუსის მოძრავ ბორბალს და ბრუნავს უძრავი ბორბლის 0 ცენტრის გარშემო მბრუნავი  $L$  მომენტის მოქმედებით. უძრავი და



ნახ.117.

მოძრავი ბორბლები შეერთებულია უსასრულო გაჭიმული ღვედით ისე, რომ სისტემის მოძრაობისას ღვედის სრიალს ბორბლების ფერსოზე ადგილი არა აქვს. მრუდმხარა წარმოადგენს ერთგვაროვან ღეროს და მისი წონა არის P, ხოლო ბორბლის წონა არის G.

**ამოხსნა.**

სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: ღეროსა და მოძრავი B ბორბლისაგან (0 ცენტრის მქონე უძრავი ბორბალი მხედველობაში არ მიიღება).

სისტემას გააჩნია ერთი თავისუფლების ხარისხი - 0 წერტილის გარშემო OB ღეროს შემობრუნების  $\phi$  კუთხე. მივიღოთ იგი განზოგადებულ კოორდინატად:  $q_1 = \phi$ .

სისტემის მოძრაობის შესასწავლად ლაგრანჟის II გვარის განტოლებას ექნება

$$\text{ასეთი სახე: } d(\partial T / \partial \dot{\phi}) / dt - \partial T / \partial \phi = Q_\phi. \quad (1)$$

პირველყოვლისა განვსაზღვროთ სისტემაზე მოქმედი განზოგადებული ძალა  $Q_\phi$ . ამისათვის გამოვიყენოთ ტოლობა:  $\delta A = Q_\phi \delta \phi$ ,

სადაც  $\delta \phi$  არის OB ღეროს შესაძლო მობრუნების კუთხე.  $\delta A$  არის სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობა ჯამი.

სისტემაზე მოქმედებენ: მბრუნებელი  $L$  მომენტი, OB ღეროს P წონა და B ბორბლის G წონა. ამიტომ სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამი  $\delta \phi$ -ს შესაბამის შესაძლო გადაადგილებებზე იქნება

$$\delta A = L \delta \phi - P \cos \alpha \cdot \ell / 2 \cdot \delta \phi - G \cos \alpha \cdot \ell \delta \phi;$$

მაშასადამე მივიღებთ, რომ  $L \delta \phi - P \cos \alpha \cdot \ell / 2 \cdot \delta \phi - G \cos \alpha \cdot \ell \delta \phi = Q_\phi \delta \phi$ ,

საიდანაც  $Q_\phi = L - 1/2 \cdot \ell \cdot (P + 2G) \cos \alpha$ .

ახლა გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია; გვექნება:

$$T = T_1 + T_2.$$

$T_1$  - ღეროს კინეტიკური ენერგიაა. ვინაიდან ღერო ბრუნავს 0 ღერძის გარშემო, ამიტომ  $T = 1/2 \cdot J_0 \omega^2$ ;

აქ  $J_0$  არის ღეროს ინერცია 83 0 წერტილის მიმართ:  $J_0 = P/3g \cdot \ell^2$ . ამასთანავე  $\omega = \dot{\phi}$ ; მაშასადამე  $T_1 = 1/2 \cdot P/3g \cdot \ell^2 \dot{\phi}^2 = P/6g \cdot \ell^2 \dot{\phi}^2$ .

$T_2$  არის B ბორბლის კინეტიკური ენერგია. მოძრაობის ხასიათის მიხედვით B ბორბალი ასრულებს ბრტყელ გადატანით მოძრაობას და ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია მასათა B ცენტრის კინეტიკური ენერგიის ტოლია:

$$T_2 = G/2g \cdot v_B^2 = G/2g \cdot \ell^2 \dot{\phi}^2.$$

საბოლოოდ, მთელი მექანიზმის კინეტიკური ენერგია იქნება:

$$T = \ell^2 / 6g \cdot (P + 3G) \dot{\phi}^2.$$

გამოვთვალოთ კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\begin{aligned} \partial T / \partial \dot{\varphi} &= 0; \\ \partial T / \partial \dot{\varphi} &= \ell^2 / 3g \cdot (P + 3G) \dot{\varphi}; \\ d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt &= \ell^2 / 3g \cdot (P + 3G) \ddot{\varphi}. \end{aligned}$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები ლაგრანჟის II გვარის (1) განტოლებაში; მივიღებთ მექანიზმის მოძრაობის დიფერენციალურ განტოლებას განზოგადებულ  $\varphi$  კოორდინატის მიმართ:

$$\ell^2 / 3g \cdot (P + 3G) \ddot{\varphi} = L - 1/2 \cdot \ell (P + 2G) \cos \varphi,$$

საიდანაც განისაზღვრება მრუდმხარას (ღეროს) კუთხური აჩქარება:

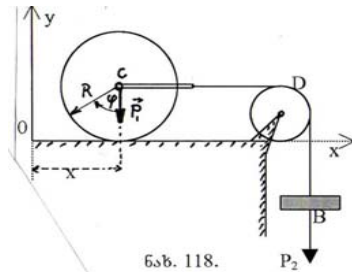
$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 3g/2 \cdot [2L - \ell (P + 2G) \cos \varphi] / \ell^2 (P + 3G).$$

**დავალება:** ამოხსენით იგივე ამოცანა, როცა მექანიზმი მოთავსებულია ჰორიზონტალურ სიბრტყეში.

$$\text{პასუხი: } \varepsilon = 3 L g / \ell^2 (P + 3G).$$

**ამოცანა 13.3.**

იპოვეთ სისტემის მოძრაობის განტოლება, თუ იგი შედგება  $P_1$  წონის და  $R$  რადიუსის ერთგვაროვანი ცილინდრისაგან, რომელიც უსრიალოდ გორავს უძრავ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. და  $P_2$  წონის  $B$  ტვირთისაგან, რომელიც დაკიდებულია უწონად  $D$  ბლოკზე გადაკიდებული უჭიმადი და უწონადი თოკის ბოლოში. თოკის მეორე ბოლო მიმაგრებულია ცილინდრის  $C$  ცენტრზე. საწყის მომენტში სისტემა უძრავია.



ნახ. 118.

**ამოხსნა.**

მოცემულია ერთი თავისუფლების ხარისხის მქონე სისტემა, რომელიც შედგება ორი სხეულისაგან. სისტემის მდებარეობა სავსებით განისაზღვრება ერთი პარამეტრით (მაგალითად: მასების  $C$  ცენტრის კოორდინატით, ან ცილინდრის შემობრუნების  $\varphi$  კუთხით, 84 ივრთის გადაადგილების  $y$  კოორდინატით).

განზოგადებულ კოორდინატად ავირჩიოთ ერთ-ერთი მათგანი, ვთქვათ  $C$  წერტილის კოორდინატი  $q_1 = x$ . ლაგრანჟის II გვარის განტოლებას ექნება შემდეგი სახე:

$$d(\partial T / \partial \dot{x}) / dt - \partial T / \partial x = Q_x. \quad (1)$$

კოორდინატთა სისტემის  $O$  სათავე შეუსაბამოთ ცილინდრის საწყის მდებარეობას. ცილინდრი მიგორავს უსრიალოდ, ამიტომ  $x = R\varphi$ , საიდანაც  $\dot{x} = R\dot{\varphi}$ .

გამოვთვალოთ სისტემის განზოგადებული ძალა  $Q_x$ , რომელიც შეესაბამება განზოგადებულ  $x$  კოორდინატს. ამისათვის გამოვიყენოთ

$$\text{ტოლობა: } \delta A = Q_x \delta x \quad (2)$$

აქ  $\delta x$  არის ცილინდრის  $C$  წერტილის შესაძლო გადაადგილება.  $\delta A$  არის სისტემაზე მოქმედი ძალების შესაძლო მუშაობათა ჯამი. როგორც ნახაზიდან ჩანს, მუშაობას ასრულებს მხოლოდ ტვირთის სიმძიმის  $P_2$  ძალა:  $\delta A = P_2 \delta x$ ; ამიტომ (2)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$P_2 \delta x = Q_x \delta x, \quad \text{საიდანაც } Q_x = P_2.$$

გამოვთვალოთ სისტემის კინეტიკური ენერგია:  $T = T_C + T_B$ .

$C$  სხეული (ცილინდრი) ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას, ამიტომ

კენიგის თეორემის თანახმად:  $T_C = 1/2 \cdot m_C v_C^2 + 1/2 \cdot J_C \omega^2$ ; სადაც  $m_C = P_1/g$  - ცილინდრის მასაა,  $v_C = \dot{x}$  - ცილინდრის მასების ცენტრის სიჩქარე,  $\omega = \dot{\varphi} = \dot{x}/R$  - ცილინდრის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე,  $J_C = 1/2 \cdot m_C R^2 = P_1/2g \cdot R^2$  - ცილინდრის ინერციის მომენტი. მივიღებთ:

$$T_C = P_1/2g \cdot \dot{x}^2 + 1/2 \cdot P_1/2g \cdot R^2 \cdot (\dot{x}/R)^2 = 3P_1/4g \cdot \dot{x}^2$$

$B$  სხეული ასრულებს გადატანით მოძრაობას;  $v_B = v_C = \dot{x}$ .

გვექნება:

$$T_B = 1/2 \cdot m_B v_B^2 = P_2/2g \cdot \dot{x}^2.$$

სისტემის კინეტიკური ენერგია იქნება

$$T = (3P_1 + 2P_2) / 4g \cdot \dot{x}^2. \quad \text{აქედან:}$$

$$\partial T / \partial x = 0; \quad \partial T / \partial \dot{x} = (3P_1 + 2P_2) / 2g \cdot \dot{x}.$$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (1) განტოლებაში, გვექნება:

$$(3P_1 + 2P_2) / 2g \cdot \ddot{x} = P_2;$$

$$\text{აქედან: } \ddot{x} = 2gP_2 / (3P_1 + 2P_2).$$

გავაინტეგრროთ ეს

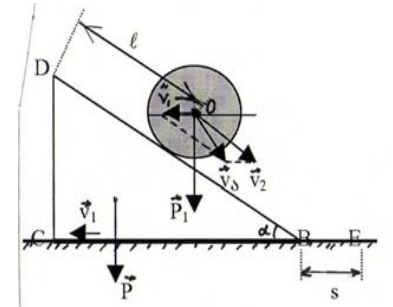
უკანასკნელი გამოსახულება ორჯერ:

$$\dot{x} = 2gP_2 t / (3P_1 + 2P_2) + C_1;$$

$$x = gP_2 t^2 / (3P_1 + 2P_2) + C_1 t + C_2.$$

ინტეგრების  $C_1$  და  $C_2$  მუდმივები განისაზღვრებიან მოძრაობის საწყისი პირობებით: როცა  $t = 0$ , მაშინ  $x = x_0 = 0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$ .

მივიღებთ, რომ  $C_1 = C_2 = 0$ . მოძრაობის განტოლებას საბოლოოდ ექნება ასეთი სახე:  $x = gP_2 / (3P_1 + 2P_2) \cdot t^2$ .



ნახ. 119.

**ამოცანა 13.4.**

$P$  წონის  $ABD$  პრიზმა მოთავსებულია გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე. პრიზმის გვერდით წახნაგზე უსრიალოდ მიგორავს  $P_1$  წონის და  $r$  რადიუსის ერთგვაროვანი წრიული ცილინდრი. პრიზმის ფუძესთან მდებარე მახვილი კუთხეა  $\alpha$ .

განსაზღვრეთ ცილინდრისა და პრიზმის მოძრაობის კანონი.

**ამოხსნა.** მოცემულია სისტემა, რომელიც შედგება ორი სხეულისაგან: პრიზმისა და ცილინდრისაგან. სისტემის თავისუფლების ხარისხი ტოლია ორის: პრიზმის მდებარეობა განისაზღვრება  $s = BE$  მანძილით, ხოლო ცილინდრისა  $l$ -ით. მივიღოთ  $s$  და  $l$  განზოგადებულ კოორდინატებად. ისინი დამოუკიდებელი არიან.

პრიზმის და ცილინდრის მოძრაობის განტოლებების დასადგენად გამოვიყენოთ ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები, რომლებსაც ჩვენს მიერ არჩეულ განზოგადებულ კოორდინატების შესაბამისად ექნებათ ასეთი სახე:

$$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt - \partial T / \partial s = Q_s; \quad (1)$$

$$d(\partial T / \partial \dot{l}) / dt - \partial T / \partial l = Q_l \quad (2)$$

აქ  $T$  არის სისტემის კინეტიკური ენერგია, ხოლო  $Q_s$  და  $Q_l$  არიან განზოგადებული ძალები.

განვსაზღვროთ არჩეული განზოგადებული  $s$  და  $l$  კოორდინატების შესაბამისი განზოგადებული ძალები  $Q_s$  და  $Q_l$ . ამისათვის მივცეთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, როცა  $l$  ინარჩუნებს მუდმივ მნიშვნელობას ( $l = \text{const}$ ), ხოლო  $s$  შეიცვლება  $\delta s$ -ით. ე.ი. პრიზმა და ცილინდრი, როგორც ერთი მთლიანი სხეული, გადაადგილება პორიზონტალური სიბრტყის გასწვრივ. ამ შემთხვევაში  $P$  და  $P_1$  ძალების მიერ შესრულებული მუშაობა  $\delta A$  გადაადგილებაზე იქნება ნულის ტოლი, ე.ი.  $\delta A = Q_s \delta s = 0$ , საიდანაც  $Q_s = 0$ .

ახლა განვსაზღვროთ  $Q_l$ . გამოვიყენოთ ტოლობა

$$\delta A = Q_l \delta l. \quad (3)$$

ამისათვის მივცეთ სისტემას ისეთი შესაძლო გადაადგილება, როცა  $l$  შეიცვლება  $\delta l$ -ით, ხოლო  $s$  უცვლელი დარჩება ( $s = \text{const}$ ); ე.ი. პორიზონტალურ სიბრტყეზე პრიზმა არ გადაადგილდება, ხოლო ცილინდრი გადაადგილება პრიზმაზე. ცილინდრის სიმძიმის  $0$  ცენტრი დაეშვება პრიზმის გასწვრივ  $\delta l$  მანძილით. მაშასადამე იგი მიიღებს ვერტიკალურ გადაადგილებას  $\delta h$ ; ამიტომ, სიმძიმის  $P_1$  ძალის მუშაობა ამ შესაძლო გადაადგილებაზე იქნება  $\delta A = P_1 \text{Sin} \alpha \delta l$ ,

თუ გავითვალისწინებთ (3) ტოლობას, გვექნება

$$Q_l = P_1 \text{Sin} \alpha \quad (4)$$

განვსაზღვროთ განსახილველი სისტემის კინეტიკური ენერგია.

სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან (პრიზმისა და ცილინდრისაგან), ამიტომ  $T = T_1 + T_2$ . (5)

პრიზმი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ამიტომ მისი კინეტიკური ენერგია გამოითვლება ფორმულით:

$$T_1 = 1/2 \cdot m_1 v_1^2; \quad (6)$$

აქ  $m_1 = P/g$  - პრიზმის მასაა, ხოლო  $v_1$  - პრიზმის სიჩქარე:  $v_1 = ds/dt = \dot{s}$ .

ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ-პარალელურ მოძრაობას და მისი კინეტიკური ენერგია კენიგის თეორემის თანახმად გამოითვლება ფორმულით:

$$T_2 = 1/2 \cdot m_2 v_2^2 + 1/2 \cdot J_0 \omega^2, \quad (7)$$

სადაც  $m_2 = P_1/g$  - ცილინდრის მასაა;  $J_0 = 1/2 \cdot m_2 r^2$  - ცილინდრის ინერციის მომენტი მისი  $0$  ღერძის მიმართ;  $v_2$  - ცილინდრის მასათა  $0$  ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარეა ( $v_2 = v_c$ );  $\omega$  - ცილინდრის კუთხური სიჩქარე.

წერტილის რთული მოძრაობისას სიჩქარეთა შეკრების თეორემის თანახმად  $v_c = v_{\text{ფ}} + v_{\text{რ}}$ ,

სადაც  $v_{\text{ფ}} = v_1 = ds/dt = \dot{s}$ ;  $v_{\text{რ}} = v_2 = dl/dt = \dot{l}$

ვინაიდან  $v^2 = v_{\text{ფ}}^2 + v_{\text{რ}}^2 - 2v_{\text{ფ}} v_{\text{რ}} \text{Cos} \alpha$ ,

შევკვილია დავწეროთ  $v^2 = \dot{s}^2 + \dot{l}^2 - 2\dot{s}\dot{l} \text{Cos} \alpha$ .

გარდა ამისა  $v_2 = \omega r$ , ანუ  $\omega r = \dot{l}$ .

ამიტომ  $1/2 \cdot J_0 \omega^2 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot m_2 r^2 \omega^2 = 1/4 \cdot m_2 \dot{l}^2$ ;

შევტანოთ მიღებული მნიშვნელობები (7) ტოლობაში:

$$T_2 = 1/2 \cdot m_2 (\dot{s}^2 + \dot{l}^2 - 2\dot{s}\dot{l} \text{Cos} \alpha) + 1/4 \cdot m_2 \dot{l}^2. \quad (8)$$

თუ მხედველობაში მივიღებთ და -ის მიღებულ (7) და (8) მნიშვნელობებს, მაშინ სისტემის კინეტიკური ენერგიისათვის გვექნება:

$$T = T_1 + T_2 = 1/2 \cdot (m_1 + m_2) \dot{s}^2 + 3/4 \cdot m_2 \dot{l}^2 - m_2 \dot{s}\dot{l} \text{Cos} \alpha.$$

ახლა განვსაზღვროთ (1) და (2) განტოლებებში შემაჯავლი სისტემის კინეტიკური ენერგიის კერძო წარმოებულები:

$$\partial T / \partial s = 0;$$

$$\partial T / \partial \dot{s} = (m_1 + m_2) \dot{s} - m_2 \dot{l} \text{Cos} \alpha;$$

$$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = (m_1 + m_2) \ddot{s} - m_2 \ddot{l} \text{Cos} \alpha;$$

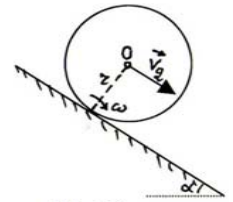
$$\partial T / \partial l = 0;$$

$$\partial T / \partial \dot{l} = 3/2 \cdot m_2 \dot{l} - m_2 \dot{s} \text{Cos} \alpha;$$

$$d(\partial T / \partial \dot{l}) / dt = 3/2 m_2 \ddot{l} - m_2 \ddot{s} \text{Cos} \alpha.$$

აქ მიღებული გამოსახულებების და  $Q_s$  და  $Q_l$  -ის მნიშვნელობების გათვალისწინებით ლაგრანჟის II გვარის (1) და (2) განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:  $(m_1 + m_2) \ddot{s} - m_2 \ddot{l} \text{Cos} \alpha = 0$ ;

$$-m_2 \ddot{s} \text{Cos} \alpha + 3/2 m_2 \ddot{l} = P_1 \text{Sin} \alpha.$$



ნახ.120.

ამოვხსნათ ეს სისტემა  $\ddot{s}$  - ის და  $\ddot{\ell}$  - ის მიმართ, მივიღებთ:

$$\ddot{s} = P_1 \sin 2\alpha / [3(P + P_1) - 2P_1 \cos^2 \alpha];$$

$$\ddot{\ell} = P_1(P + P_1) \sin \alpha / [3(P + P_1) - 2P_1 \cos^2 \alpha].$$

ამ გამოსახულებების მარჯვენა მხარეს მუდმივი სიდიდეები გვაქვს. აქედან ჩანს, რომ პრიზმა და ცილინდრი თანაბრად აჩქარებულად მოძრაობენ.

**ამოცანა 13.5.** I და II ბორბლების წონებია

შესაბამისად  $P_1$  და  $P_2$ , ხოლო ტვირთის წონაა  $P$ .

შვეულად ვარდნისას B ტვირთი შლის ბორბალზე დახვეულ თოკს და უსრიალოდ აბრუნებს ორივე ბორბალს. ბორბლები ჩათვალეთ ერთგვაროვან მთლიან ცილინდრებად. განსაზღვრეთ B ტვირთის აჩქარება.

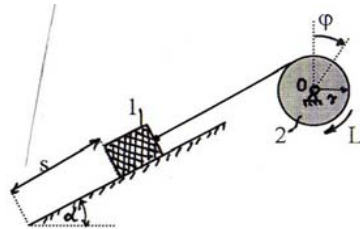
პასუხი:  $w = 2Pg / (P_1 + P_2 + 2P)$ .

**ამოცანა 13.6.** მექანიკური

სისტემა შედგება  $m = 20$  კგ მასის 1 სხეულისაგან და 2 ცილინდრისაგან, რომლის ინერციის მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ  $J_0 = 2$  კგმ<sup>2</sup>. სისტემას აქვს კინეტიკური ენერგია  $T = 35$  ჯ<sup>2</sup>.

განსაზღვრეთ 1 სხეულის აჩქარება, თუ ცილინდრზე მოქმედი წვეილძალის მომენტი  $L = 20$  ნმ, რადიუსი  $r = 0,2$  მ;  $\alpha = 20^\circ$ .

პასუხი:  $w_1 = 0,47$  მ/წმ<sup>2</sup>.

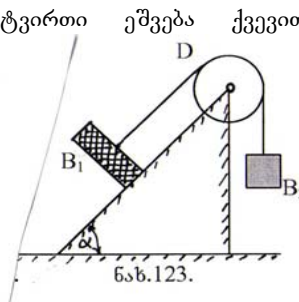


ნახ.122.

**ამოცანა 13.7.**  $m_1$  მასის  $B_1$  ტვირთი ეშვება ქვევით

ჰორიზონტისადმი  $\alpha$  კუთხით დახრილ გლუვ უძრავ სიბრტყეზე. უწონადი და უჭიმადი თოკის საშუალებით მას მოძრაობაში მოჰყავს  $m_3$  მასის და  $r$  რადიუსის A ბლოკი და  $m_2$  მასის  $B_2$  ტვირთი. ბლოკი ჩათვალეთ მთლიან ერთგვაროვან დისკოდ და განსაზღვრეთ მისი კუფხური  $\varepsilon$  აჩქარება.

პასუხი:  $\varepsilon = 2g(m_1 \sin \alpha - m_2) / r(2m_1 + 2m_2 +$

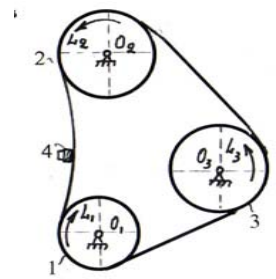


ნახ.123.

$m_3)$ .

**ამოცანა 13.8.** ავტომანქანა "□□□-2107"-ის

განმანაწილებელი მექანიზმის ჯაჭვური გადაცემა შედგება 1-ლი მუხლა ლილვის წამყვანი კბილანასგან, მე-2 განმანაწილებელი ლილვის ამყალი კბილანასგან და მე-3 ზეთის ტუმბოს ამყალი კბილანასგან. ჯაჭვის დაჭიმვა ხდება დამჭიმავი მე-4 ბუნიკით. ძრავის მუხლა



ნახ.124.

ლილვისაგან 1 კბილანაზე გადაეცემა მარბუნებელი მომენტი  $L_1 = 30$  ნმ, ხოლო მე-2 და მე-3 ამყალ კბილანებზე მოდებულია წინაღობის მომენტები, შესაბამისად  $L_2 = 4$  ნმ და  $L_3 = 2$  ნმ.

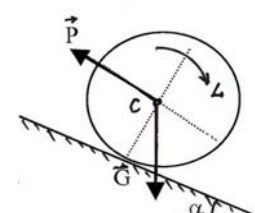
განსაზღვრეთ, როგორი კუთხური აჩქარებით ბრუნავს წამყვანი 1 კბილანა, თუ ყველა კბილანას ჩავთვლით ერთგვაროვან წრიულ დისკებად, რომელთა რადიუსებია  $r_1 = 0,08$  მ,  $r_2 = r_3 = 0,16$  მ, ხოლო მასებია  $m_1 = 6$  კგ,  $m_2 = m_3 = 12$  კგ. ჯაჭვისა და ბუნიკის მასები უგულებელყავით.

პასუხი:  $\varepsilon = 2(L_1 - L_2 r_1 / r_2 - L_3 r_1 / r_3) / (m_1 + m_2 + m_3) r_1^2 = 281,2$  წმ<sup>-2</sup>.

**ამოცანა 13.9** ავტომანქანის  $r = 0,5$  მ

რადიუსის და  $m = 120$  კგ მასის წამყვანი თვალი,

რომლის ინერციის რადიუსია  $\rho = 0,3$  მ, უსრიალოდ მივორავს ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 10^\circ$  კუთხით დახრილ ფერდობზე  $L = 180$  ნმ მარბუნებელი მომენტის მოქმედებით. ამასთანავე, ავტომანქანის ჩარჩოს მხრიდან თვალზე მოქმედებს წინაღობის ძალა  $P = 100$  ნ.



ნახ.125.

უგულებელყავით გორვის ხახუნი და განსაზღვრეთ თვალის კუთხური აჩქარება.

პასუხი:  $\varepsilon = [L + (mg \sin \alpha - P) r] / m(r^2 + \rho^2) = 3,48$  წმ<sup>-1</sup>.

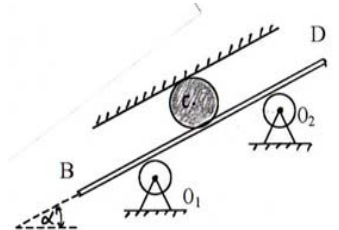
**ამოცანა 13.10.** წინა (13.9) ამოცანაში განსაზღვრეთ თვალის C

ცენტრის აჩქარება ( $w_C$ ) და 89 თ იგი ჰორიზონტალურ გზაზე მგორავ თვალის აჩქარებას.

პასუხი:  $w_C = [L + (mg \sin \alpha - P) r] r / m(r^2 + \rho^2) = 1,74$  მ/წმ<sup>2</sup>;  
 $w_C^3 = (L - P r) r / m(r^2 + \rho^2) = 1,59$  მ/წმ<sup>2</sup>.

**ამოცანა 13.11.**  $P_1$  წონის BD

ღერო მოძრაობს გადატანითად ქვევით,



ნახ.126.

პორიზონტალური  $O_1$  და  $O_2$  ღერძების გარშემო აბრუნებს ორ ერთნაირ,

თითოეული  $P_2$  წონის ლილვას და აიძულებს უსრიალოდ იგორლოს  $P_3$  წონის C დისკომ, რომელიც ჩაჭერილია ღეროსა და უძრავ სიბრტყეს შორის. განსაზღვრეთ დისკოს აჩქარება, თუ BD ღერო და უძრავი სიბრტყე დახრილია არიან პორიზონტალისადმი  $\alpha$  კუთხით.

C ცენტრის

პასუხი:  $w_C = 2g(2P_1 + P_3) \text{Sin}\alpha / (8P_1 + 8P_2 + 3P_3)$ .

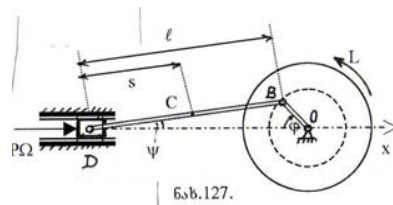
**ამოცანა 13.12.**

მრუდმხარა მექანიზმი შედგება  $m_1$  მასის დგუშის,  $m_2$  მასის AB ბარბაცას, OB მრუდმხარას, ლილვისა და მქნევარა თვალისაგან. ბარბაცას ინერციის მომენტი მისი მასების C ცენტრის მიმართ არის  $J_2$ ; OB მრუდმხარას მქნევარა თვალისა და ლილვის ინერციის მომენტი ღერძის მიმართ არის  $J_3$ ; დგუშის ფართობია  $\Omega$ , ხოლო  $\mathcal{F}$  - დგუშზე მოქმედი წნევა;  $\ell$  - ბარბაცას სიგრძე;  $s$  - მანძილი ბარბაცას სიმძიმის ცენტრსა და A წერტილს შორის.  $r$  - OB მრუდმხარას სიგრძე, L - ლილვზე მოქმედი წინაღობათა მომენტი. შეადგინეთ მექანიზმის მოძრაობის განტოლება,

თუ ბარბაცას მობრუნების  $\psi$  კუთხე იმდენად მცირეა, რომ

$\text{Sin}\psi \approx \psi$  და  $\text{Cos}\psi \approx 1$ .

განზოგადებულ კოორდინატად მიიღეთ მრუდმხარას მობრუნების  $\varphi$  კუთხე. მექანიზმი მოთავსებულია პორიზონტალურ სიბრტყეში.



ნახ.127.

**მითითება.** გამარტივების მიზნით

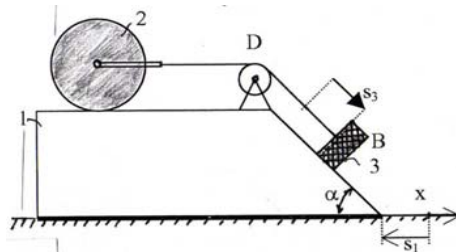
შეიძლება ჩათვალოს, რომ  $\varphi$  კუთხით მობრუნების დროს, რომელსაც  $\varphi$  კმნის მრუდმხარა პორიზონტალურ მიმართულებასთან, დგუშის გადაადგილება არის  $x = r \text{Cos}\varphi$ .

პასუხი:  $[(m_1+m_2)r^2 \text{Sin}^2\varphi + (J_2+m_2s^2) \cdot (r\text{Cos}\varphi)^2/\ell^2 + J_3] \ddot{\varphi} + 1/2 \cdot [(m_1+m_2) - (J_2 + m_2s^2)/\ell^2] r^2 \text{Sin}2\varphi \cdot \dot{\varphi} = P\Omega r \text{Sin}\varphi - L$ .

**ამოცანა 13.13**

$m_1$  მასის 1 პრიზმა მოძრაობს გლუვ პორიზონტალურ სიბრტყეზე. პრიზმის ზედა წახნაგზე, რომელიც საყრდენი სიბრტყის პარალელურია, უსრიალოდ გორავს  $m_2$  მასის ერთგვაროვანი

წრიული C ცილინდრი (2). პრიზმის დახრილ გლუვ წახნაგზე რომელიც პორიზონტთან ადგენს  $\alpha=60^\circ$  კუთხეს, სრიალებს  $m_3$  მასის B ტვირთი (3). ცილინდრის



ნახ.128.

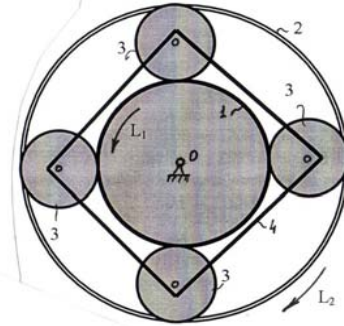
ღერძი და ტვირთი დაკავშირებულია D ბლოკზე გადადებული უჭიმადი და უწონადი თოკის საშუალებით. D ბლოკის მასა უგულებელყავით.

განსაზღვრეთ პრიზმის აჩქარება და ტვირთის აჩქარება პრიზმის მიმართ. მოცემულია  $m_1=10$  კგ;  $m_2=0,6m_1$ ;  $m_3=0,4m_1$ .

პასუხი: პრიზმის

აჩქარება:  $w_1 = \ddot{s}_1 = -0,722 \text{ მ/წმ}^2$ ;

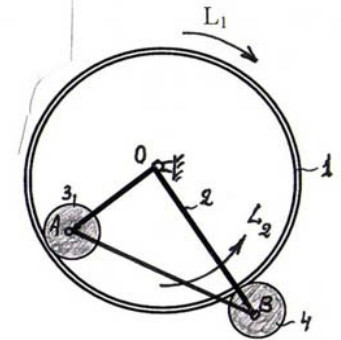
ტვირთის აჩქარება:  $w_3 = \ddot{s}_3 = 2,89 \text{ მ/წმ}^2$ .



ნახ.130.

**ამოცანა 13.14**

პორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებულ მექანიზმში M მასის 1 კბილანას და ხისტ საძკუთხა მე-2 ჩარჩოს შეუძლიათ დამოუკიდებლად ბრუნვა ვერტიკალური 0 ღერძის გარშემო. 1-ლ კბილანაზე მოდებულია  $L_1$  მომენტის წვეილძალა, ხოლო ჩარჩოზე -  $L_2$  მომენტის წვეილძალა. ჩარჩოს A და B წვეროებში სახსრებით დამაგრებულია ორი ერთნაირი მე-3 და მე-4 კბილანების ცენტრები, კბილანები ჩაბმაში იმყოფებიან 1 კბილანასთან. თითოეული A და B კბილანის მასა არის m.



ნახ.129.

სისტემა მოძრაობაში მოდის უძრავი მდგომარეობიდან. იპოვეთ 1 კბილანის კუთხური სიჩქარის დამოკიდებულება t დროზე. მე-3 და მე-4 კბილანები განიხილეთ, როგორც R რადიუსის ერთგვაროვანი მთლიანი დისკოები, 1 კბილანა - როგორც R რადიუსის ერთგვაროვანი რგოლი. გამოთვლისას მიიღეთ, რომ  $M=2m$ ;  $R=3r$ . ჩარჩოს მასა უგულებელყავით.

პასუხი:  $\omega_1 = [(10 L_1 - 3 L_2) / 243 m r^2] t$ .

**ამოცანა 13.15.**

პორიზონტალურ სიბრტყეში მოთავსებულ პლანეტარულ მექანიზმში 1 და 2 კბილანები ბრუნავენ სიმეტრიის საერთო ვერტიკალური 0 ღერძის გარშემო. 1-ლ კბილანაზე მოდებულია  $L_1$  მომენტის წვეილძალა, ხოლო მე-2 კბილანაზე -  $L_2$  მომენტის წვეილძალა. ოთხი ერთნაირი კბილანა (3) ჩაბმაში იმყოფება 1 და 2 კბილანასთან. მათი ცენტრები შეერთებულნი არიან მე-4 კვადრატული ჩარჩოთი ისე, რომ ამ კბილანებს შეუძლიათ ბრუნვა ჩარჩოს წვეროებში გამავალი ვერტიკალური ღერძების გარშემო. 1, 2 და 3 კბილანების მასებია შესაბამისად  $m_1, m_2$  და  $m_3$ . საწყის  $t_0=0$  მომენტში სისტემა იყო უძრავ მდგომარეობაში.

განსაზღვრეთ 1 და 2 კბილანების კუთხური სიჩქარეები, როგორც დროის ფუნქციები, თუ მათი რადიუსები შესაბამისად არის  $r_1$  და  $r_2$ . 1 და 3 კბილანები განიხილეთ, როგორც ერთგვაროვანი მთლიანი დისკები, ხოლო 2 კბილანა – როგორც ერთგვაროვანი რგოლი. გამოთვლისას მიიღეთ, რომ  $m_1 = m_2 = 4m_3$ ; მე-4 ჩარჩოს მასა უგულებელყავით.

$$\omega_1 = [2(L_1 r_2 + 7L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2 r_2] t;$$

$$\omega_2 = [2(11L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2] t.$$

## § 14. დარტყმა

დარტყმა არის სხეულთა ხანმოკლე ურთიერთქმედება, რომლის დროსაც მათი მოძრაობის რაოდენობა იცვლება სასრული სიდიდით. ე.ი. სხეულის წერტილების სიჩქარეები დროის საკმაოდ მცირე შუალედში იცვლებიან სასრული სიდიდით.

1) დარტყმის ძირითადი განტოლება:  $mu - mv = S;$  (14.1)

აქ - მასის ნივთიერი წერტილის სიჩქარე დარტყმამდე - იმავე წერტილის სიჩქარე დარტყმის შემდეგ. - დარტყმის იმპულსი.

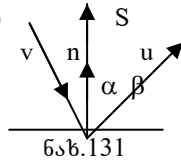
2) ნივთიერი წერტილის დარტყმა უძრავ გლუვ ზედაპირზე:

აღდგენის კოეფიციენტი:  $k = |u_n| / |v_n|;$   $0 \leq k \leq 1;$  (14.2)

$$k = \text{tg} \alpha / \text{tg} \beta$$

$\alpha$  - დარტყმის კუთხე,  $\beta$  - არეკვლის კუთხე.

თუ  $k = 1$  - სავსებით დრეკადი დარტყმა;



თუ  $k = 0$  - სავსებით ადი დარტყმა

თუ  $0 < k < 1$  - დრეკადი დარტყმა

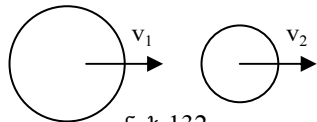
$$u_t = v_t; \quad u = v \text{Sin} \alpha \text{Sin} \beta, \quad \text{ახუ} \quad u = v \text{Sin} \alpha \sqrt{1 + k^2 \text{ctg}^2 \alpha}. \quad (14.3)$$

პირდაპირი დარტყმისას  $\alpha = 0: u = k v; \quad S = m (1+k)v. \quad (14.4)$

დარტყმის ორი ფაზა: I ფაზა – იმპულსი:  $S_1 = mv_n;$

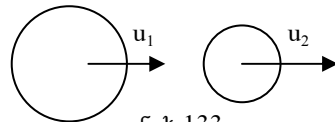
II ფაზა – იმპულსი:  $S_2 = mu_n; \quad S_2 = -k S_1.$

3) ორი ბირთვის პირდაპირი ცენტრალური დარტყმა:



ნახ.132.  
დარტყმამდე

$$v_1 > v_2$$



ნახ.133.  
დარტყმის შემდეგ

$$u_1 \leq u_2$$

$$k = |(u_1 - u_2) / (v_1 - v_2)| = -(u_1 - u_2) / (v_1 - v_2);$$

$$u_1 - u_2 = -k (v_1 - v_2). \quad (14.5)$$

$$S_1 = m_1 (u_1 - v_1); \quad S_2 = -S_1.$$

ა) სავსებით არადრეკადი დარტყმისას ( $k = 0$ ):

$$u_1 = u_2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2); \quad (14.6)$$

$$S_2 = -S_1 = m_1 m_2 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$$

ბ) დრეკადი დარტყმისას ( $k \leq 1$ ):

$$u_1 = v_1 - (1+k) m_2 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2);$$

$$u_2 = v_2 + (1+k) m_1 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2)$$

$$(14.7)$$

$$S_2 = -S_1 = (1+k) m_1 m_2 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2).$$

ორი სხეულის დარტყმის დროს ხდება სხეულების კინეტიკური ენერგიების დაკარგვა (ნარჩენი დეფორმაციისა და სხეულების გათბობის ხარჯზე). ეს დანაკარგი უდიდეს მნიშვნელობას ღებულობს აბსოლუტურად არადრეკადი დარტყმისას. სამართლიანია კარნოს თეორემა, რომლის თანახმადაც კინეტიკური ენერგიის დანაკარგი დარტყმის დროს გამოისახება ფორმულით:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = (1-k) / 2(1+k) \cdot [m_1 (v_1 - u_1)^2 + m_2 (v_2 - u_2)^2];$$

ანუ

$$\Delta T = (1-k^2) m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2 / 2(m_1 + m_2).$$

კერძო შემთხვევა: დარტყმა უძრავ სხეულზე ( $v_2 = 0$ ):

$$T_0 = 1/2 \cdot m_1 v_1^2; \quad u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2);$$

$$T_1 = (m_1 + m_2) u^2 / 2 = m_1^2 v_1^2 / 2(m_1 + m_2);$$

$$T_1 = m_1 T_0 / (m_1 + m_2).$$

### ამოცანა 14.1.

გ 93 ორი ერთნაირი ბურთულას სიჩქარე არადრეკადი დარტყმა ღებ, თუ დარტყმამდე ერთ-ერთი ბურთულა უძრავი იყო, ხოლო მეორე ბურთულა მოძრაობდა  $v = 6$  მ/წმ სიჩქარით.

პასუხი:  $u = 3$  მ/წმ.

### ამოცანა 14.2.

12 ტ წონის ვაგონი, რომელიც მოძრაობს 2 მ/წმ სიჩქარით, ეჯახება 14 ტ წონის უძრავ ვაგონს. განსაზღვრეთ ვაგონების სიჩქარე დაჯახების შემდეგ და დარტყმის იმპულსი, თუ ჩათვლით რომ დარტყმა არადრეკადია.

პასუხი:  $u = 0,92$  მ/წმ;  $S = 12,92$  ტწმ.

### ამოცანა 14.3.

ორი ბურთულა, რომლებიც მოძრაობდნენ ერთმანეთის შესახვედრად  $v_1 = 10$  მ/წმ და  $v_2 = 4$  მ/წმ სიჩქარეებით, არადრეკადი დაჯახების შემდეგ გაჩერდნენ. განსაზღვრეთ პირველი ბურთულას წონა, თუ მეორე ბურთულას წონა არის 10 კგ.

პასუხი:  $P_1 = 4$  კგ.

**ამოცანა 14.4.** რა სიმალიდან ვარდება 200 კგ წონის დამრტყმელი ურნალის კუტი, თუ 100 კგ წონის გრდემლზე დარტყმისას ურნალის კუტი მოძრაობს გრდემლთან ერთად 6 მ/წმ სიჩქარით.  
პასუხი :  $h = 4,1$  მ.

**ამოცანა 14.5.** განსაზღვრეთ ორი ერთნაირი ბურთულას სიჩქარე დრეკადი ცენტრალური დარტყმის შემდეგ, თუ ბურთულები მოძრაობენ ერთი მიმართულებით  $v_1=4$  მ/წმ და  $v_2=2$  მ/წმ სიჩქარეებით. აღდგენის კოეფიციენტი  $k=0,8$ .

პასუხი: ბურთულები მოძრაობენ იმავე მიმართულებით.  
 $u_1=2,2$  მ/წმ ;  $u_2=3,8$  მ/წმ.

**ამოცანა 14.6.** ამოხსენით წინა (14.5) ამოცანა, როცა ბურთულები მოძრაობენ ერთმანეთის შესახვევრად.

პასუხი: ბურთულები მოძრაობენ ერთმანეთის საწინააღმდეგოდ

$$u_1 = 1,4 \text{ მ/წმ}; \quad u_2 = 3,4 \text{ მ/წმ}.$$

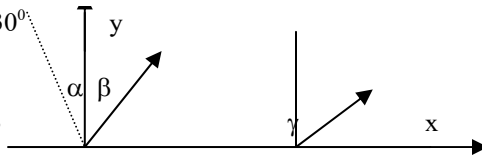
**ამოცანა 14.7.** ჰორიზონტისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით დახრილ გლუვ სიბრტყეზე,  $h = 3,6$  მ სიმალიდან უსაწყისო სიჩქარით ვარდება  $P = 20$  ნ წონის ბურთულა. განსაზღვრეთ ბურთულას სიჩქარის სიდიდე და მიმართულება დარტყმის შემდეგ, აგრეთვე დარტყმის იმპულსის სიდიდე, თუ აღდგენის კოეფიციენტი  $k = 1/3$ .

პასუხი:  $u = 4,85$  მ/წმ და მიმართულია ჰორიზონტალურად.  
 $S = 19,795$  ნწმ.

**ამოცანა 14.8.** უძრავი მდგომარეობაში 94 ნ ბურთულა ეცემა გლუვ ჰორიზონტალურ სიბრტყეზე ვერტიკალისადმი  $\alpha = 30^\circ$  კუთხით. ბურთულა აისხლიტება  $\beta = 45^\circ$  კუთხით და პარაბოლზე მოძრაობის შემდეგ კიდევ ერთხელ აისხლიტება იმავე სიბრტყიდან.

განსაზღვრეთ ასხლეტის  $\gamma$  კუთხე და აღდგენის  $k$  კოეფიციენტი.

პასუხი:  $k = 0,577$ ;  $\gamma = 60^\circ$ .



ნახ.134.

**ამოცანა 14.9.** ჰორიზონტალურ იატაკზე  $h$  სიმალიდან ვერტიკალურად ისროლეს ხის ბურთულა, რომელიც აისხლიტება  $2h$  სიმაღლეზე. განსაზღვრეთ, როგორი საწყისი სიჩქარით ისროლეს ბურთულა, თუ აღდგენის კოეფიციენტი  $k = 0,5$ .

პასუხი:  $v_0 = \sqrt{14 gh}$ .

**ამოცანა 14.10.** დამრტყმელი ურნალის კუტის წონა ორჯერ მეტია ხიმინჯის წონაზე და უდრის 2 კნ. კუტი ვარდება 1,225 მ სიმალიდან. როგორი სიჩქარით დაიწყებს მოძრაობას ხიმინჯი კუტთან ერთად არადრეკადი დარტყმის შემდეგ და რამდენ სანტიმეტრზე ჩაერჭობა ხიმინჯი, თუ გრუნტის წინაღობა 23 კნ ტოლია და იგი შეიძლება ჩავთვალოთ მუდმივად.

პასუხი:  $u = 3,27$  მ/წმ.  $h = 7,1$  სმ.

**ამოცანა 14.11.** წინა (14.10) ამოცანის პირობების მიხედვით განსაზღვრეთ ურნალის კუტის მიერ დაკარგული კინეტიკური ენერგია.

პასუხი:  $T_1 - T_2 = 816,7$  მძ.

## ამოხსნები, მიმართულებით 95

### § 1. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა

1.4.  $\ddot{x}=16$ ;  $\ddot{y}=0$ ;  $X = m\ddot{x} = 3,2$ ;  $Y = m\ddot{y} = 0$ .

1.5.  $\vec{r} = \vec{i} e^{2t} + \vec{j} \cos^2 t - \vec{k} t^2$ ;

მოძრაობის განტოლებებია:  $x = e^{2t}$ ;  $y = \cos^2 t$ ;  $z = -t^2$ .

ძალის გვეკმელებია:  $X = m\ddot{x} = 4e^{2t}$ ;  $Y = m\ddot{y} = -2\cos 2t$ ;  $Z = m\ddot{z} = -2$ .

$t_0 = 0$  მომენტში:  $X = 4$ ;  $Y = -2$ ;  $Z = -2$ .  $F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = 2\sqrt{6}$ .

1.6.  $F_1/1 = F_2/2 = F_3/3$ ;  $(F_1 + F_2 + F_3)/(1+2+3) = F_1/1$ ;

ვთქვათ სამივე ძალის ტოლქმედი ძალაა  $F$ ; მაშინ:

$$F/6 = F_1/1 = F_2/2 = F_3/3; \quad F_1 = 1,5F; \quad F_2 = 3F; \quad F_3 = 4,5F.$$

1.7.  $\vec{F}_1$  და  $\vec{F}_2$  ძალების ტოლქმედი ძალაა  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , ანუ  $\vec{F} = 4\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$ ;  $F = 4\sqrt{3}$ .  $Mw = F$ ;  $w = F/m = 4\sqrt{3}$ .

1.8. ტოლქმედი ძალა:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 6\vec{i} + 0\vec{j} + 8\vec{k}$ ;  
 $X=6$ ;  $Y=0$ ;  $Z=8$ ;  $F=10$

$\text{Cos}(\vec{W}, \hat{y}) = \text{Cos}(\vec{F}, \hat{y}) = Y/F = 0; \quad \alpha = (\vec{W}, \hat{y}) = \pi/2.$

- 1.9.  $s = 8t^3; \quad v = \dot{s} = 24t^2; \quad w = \dot{v} = 48t;$   
 $t = 1$  წმ მომენტისათვის  $v = 24$  სმ/წმ;  $w = w_t = 48$  სმ/წმ<sup>2</sup>.  
 ავირჩიოთ კოორდინატთა ბუნებრივი სისტემა: გვექმნება:  
 $F_t = mw_t = 2,4; \quad F_n = mv^2/R = 3,2. \quad F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = 4.$

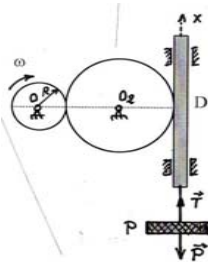
თუ  $\alpha$  არის კუთხე  $\vec{F}$  ძალასა და შესაბამის რადიუსს შორის, მაშინ  
ტე  $\alpha = F_t/F_n = 3/4.$

- 1.10.  $s = t^2 - t + 1. \quad v = \dot{s} = 2t - 1; \quad w = \dot{v} = 2. \quad t = 0,5$  წმ,  $v = 0, \quad w = \dot{v} = 2.$   
 $F_t = mw_t = m \dot{v} = 2; \quad F_n = mw_n = mv^2/R = 0.$

$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = 2. \quad \vec{F} = 2 \vec{e}_x.$

- 1.11. ლილვის ფერსოზე მდებარე B წერტილისა და მასსადამე ტვირთის სიჩქარე:  
 $v = \omega R = 300 t; \quad$  აჩქარება:  $w = \dot{v} = 300.$

- 1.12.  $O_1$  და  $O_2$  დისკოს ფერსოებზე მდებარე წერტილებს აქვთ ერთი და იგივე ხაზოვანი სიჩქარე:  
 $v = \omega R = Rkt. \quad$  იგივე სიჩქარე აქვს ლარტყას D წერტილსაც და მასსადამე მოლიან ლარტყასაც.  
 P ტვირთიც მოძრაობს იმავე v სიჩქარით,

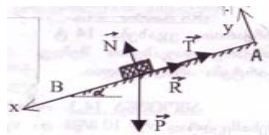


ამიტომ მისი აჩქარება  $w = \dot{v} = Rk.$   
 P ტვირთის მოძრაობის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:  $mw = T - P.$  აქედან:  
 $T = P + mw = P + PRk/g; \quad T = P(1 + Rk/g).$

- 1.13.  $m \vec{W} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{R} + \vec{T}; \quad \vec{R} -$  წინაღობის ძალა,  $\vec{T} -$  ბაგირის დაჭმულია.  
 საკოორდინატო დერძებზე დაგვემეღებთ მივიღებთ.

(x)  $mw = mg \sin \alpha - R - T; \quad (1)$   
 (y)  $0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (2)$

- (2)-დან:  $N = mg \cos \alpha; \quad R = fN = f mg \cos \alpha.$   
 (1)-დან:  $mw = mg \sin \alpha - f mg \cos \alpha - T;$   
 აქედან:  $T = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - mw. \quad (3)$   
ვაცონის თანაბარი დაშვებისას  $w=0.$



- (3)-დან:  $T = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) = 29086,4 \text{ ნ.}$   
დამუხრუჭებისას ვაცონი მოძრაობს თანაბრად შენელებულად, სადაც:  $v_0 = 1,6$  მ/წმ,  $v = 0, \quad t = 4$  წმ.

ცნობილია, რომ  $v = v_0 + wt;$  აქედან  $w = (v - v_0)/t = -0,4$  მ/წმ<sup>2</sup>.

- (3)-დან:  $T = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha) - mw = 32286,4 \text{ ნ.}$

- 1.19.  $m \ddot{x} = F; \quad \dot{x} = 1/m \cdot F t + c_1; \quad x = 1/2m \cdot F t^2 + c_1 t + c_2.$

$t = 0, \quad c_2 = x_0 = 3; \quad v_0 = \dot{x}_0 = c_1; \quad c_1 = 4.$   
 $x = 1/2m \cdot F t^2 + 4t + 3; \quad x = (5t^2 + 4t + 3) \text{ მ.}$

- 1.20.  $F_x = am \sin \omega t; \quad m \ddot{x} = am \sin \omega t; \quad \dot{x} = -a/\omega \cdot \cos \omega t + c_1; \quad (1)$

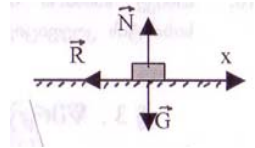
$F_y = 0; \quad m \ddot{y} = 0; \quad \dot{y} = c_2; \quad y = -a/\omega \cdot \sin \omega t + c_1 t + c_3; \quad (2)$   
 $y = c_2 t + c_4.$

- $t = 0$  მომენტში (1) - დან:  $c_1 = 0; \quad c_2 = 0.$   
 (2) - დან:  $c_3 = 0; \quad c_4 = 0.$

შევიტანოთ (2) - ში:  $x = -a/\omega^2 \cdot \sin \omega t; \quad y = 0.$

- 1.21. ავტომანქანის წონა  $G = mg;$  წინაღობის ძალა  $R = 0,2 mg$  საწვების სიჩქარე

$v_0 = 90 \text{ კმ/სთ} = 25 \text{ მ/წმ}; \quad$  საბოლოო სიჩქარე  $v = 0$



$m \vec{W} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{R};$

დავაგვემეღოთ x დერძზე:  $m \ddot{x} = -R;$   
 $m \ddot{x} = -0,2 mg; \quad \ddot{x} = -0,2g.$  გავაინტეგრირებთ 2-ჯერ:  
 $\dot{x} = -0,2gt + c_1; \quad (1) \quad x = -0,1gt^2 + c_1 t + c_2. \quad (2)$

საწვების  $t=0$  მომენტში:  $\dot{x} = v_0; \quad x_0 = 0; \quad (1)$  - დან:  $c_1 = v_0; \quad (2)$  - დან:  $c_2 = 0.$

ავტომანქანის გაჩერების მომენტისათვის  $t = t_1$  წმ-ს:  $\dot{x} = v = 0; \quad x = s.$

(1) - დან:  $0 = -0,2gt_1 + v_0.$  აქედან  $t_1 = 12,7$  წმ.  
 (2) - დან:  $s = -0,1gt_1^2 + v_0 t_1 = 159 \text{ მ.} \quad s = 159 \text{ მ.}$

- 1.22. (იხ. ამოცანა 1.21.).  $R = 0,05 mg; \quad v_0 = 72 \text{ კმ/სთ} = 20 \text{ მ/წმ}; \quad v = 0.$

$m \ddot{x} = -0,05 mg; \quad \ddot{x} = -0,05g.$

გავაინტეგრირებთ 2-ჯერ:  $\dot{x} = -0,05gt + c_1; \quad (1) \quad x = -0,025gt^2 + c_1 t + c_2. \quad (2)$

საწვების  $t=0$  მომენტში:  $\dot{x} = v_0; \quad x_0 = 0; \quad (1)$  - დან:  $c_1 = v_0; \quad (2)$  - დან:  $c_2 = 0$

მატარებლის გაჩერების მომენტისათვის  $t = t_1$  წმ-ს:  $\dot{x} = v = 0; \quad x = s.$

(1) - დან:  $0 = -0,05gt_1 + v_0.$  აქედან  $t_1 = 40,8$  წმ.  
 (2) - დან:  $s = -0,025gt_1^2 + v_0 t_1 = 408 \text{ მ.} \quad s = 408 \text{ მ.}$

დამუხრუჭების დაწყების მომენტში მატარებელსა და ტრაქტორს შორის მანძილი  $\ell = s + 5 = 413 \text{ მ.}$

- 1.23. მოძრაობის დიფერენციალური  $97 \quad \dot{x} = -kx.$  ასე ჩავწეროთ:

$m \dot{v} = -kv,$  ანუ  $dv/dt = -kv/m;$  გავვაცალოთ ცვლადები:

$dv/v = -k/m \cdot dt; \quad$  გავაინტეგრირებთ:  $\ln v = -k/m \cdot t + c_1; \quad (1)$

საწვების პირობა:  $t_0 = 0, \quad v = v_0; \quad$  მასსადამე  $c_1 = \ln v_0.$  შევიტანოთ (1) ტოლობაში:  $\ln(v/v_0) = -k/m \cdot t; \quad$  აქედან  $v = v_0 e^{-k/m t},$  ანუ  $dx/dt = v_0 e^{-k/m t};$  გავაინტეგრირებთ:  $x = -v_0 m/k \cdot e^{-k/m t} + c_2; \quad (2)$  როცა  $t_0 = 0, \quad$  მაშინ  $x_0 = 0. \quad (2)$  - დან  $c_2 = v_0 m/k = 1/2.$

(2) - ში შეტანოთ მივიღებთ:  $x = 1/2 \cdot (1 - e^{-kt}).$

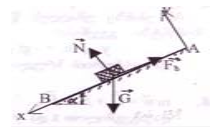
- 1.24. ვთქვათ კატარლის წინაღობის ძალა  $R = kmv$  (km - პროპორციულობის კოეფიციენტი). მაშინ, მოძრაობის განტოლება იქნება:  $mw = -kmv,$  ანუ  $dv/dt = -kv;$  აქედან  $dv/v = -kdt;$  გავაინტეგრირებთ:  $\ln v = -kt + c_1; \quad (1)$

საწვების პირობებია:  $t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad v = v_0 = 36 \text{ კმ/სთ} = 600 \text{ მ/წმ.} \quad (1)$ -დან  $c_1 = \ln v_0;$  გვექნება  $\ln v = -kt + \ln v_0. \quad (2)$  ანუ  $kt = \ln(v/v_0) \quad (3)$ . პირობის თანახმად, როცა  $t_1 = 1$  წმ, მაშინ  $v = 0,1 v_0;$  ამიტომ (3)-დან  $k = \ln(v_0/0,1v_0) = \ln 10.$

ჩავსვათ k-ს მნიშვნელობა (2) ტოლობაში:  $\ln v = -t \ln 10 + \ln v_0,$  საიდანაც  $v = v_0 \cdot 10^{-t}. \quad t = 2$  წმ-ის ბოლოს  $v = v_0 \cdot 10^{-2} = 6 \text{ მ/წმ} = 0,36 \text{ კმ/სთ.} \quad v = 0,36 \text{ კმ/სთ.}$

- 1.25.  $m \vec{W} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}$  აგვემეღებოთ:

(x)  $mw = mg \sin \alpha - F_b; \quad (1) \quad (y) \quad 0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (2)$

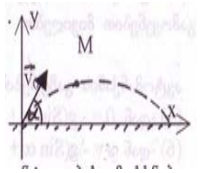


როცა  $\alpha=30^\circ$  - მოძრაობა თანაბარია:  $w=0$  (2) - დან:  
 $N=mg \cos \alpha$  . ხახუნის ძალა  $F_b = fN = fmg \cos \alpha$  ;  
 $f$  -ხახუნის კოეფიციენტი. (1)-დან:  $0 = mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha$   
 აქედან:  $f = \tan \alpha = \sqrt{3}/3$ .

$\beta=45^\circ$  კუთხით დაშვების შემთხვევაში (1)-ის ანალოგიურად:  
 $mw = mg \sin \beta - fmg \cos \beta$  ;  $w = g (\sin \beta - f \cos \beta) = 2,93 \text{ მწმ}^2$ .  
 სამიზნე M წერტილის კოორდინატებია:  $x=1 \text{ კმ}=1000 \text{ მ}$ ;  $y=0,5 \text{ კმ}=500 \text{ მ}$ .  
 ჭურვი მოძრაობს კანონით (იხ. ამოცანა 1.18, ფორმულა

1.26.  
(ე):

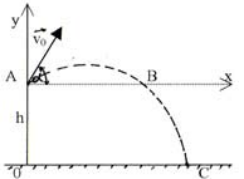
$x = v_0 t \cos \alpha$ ,  $y = -gt^2/2 + v_0 t \sin \alpha$ .  
 სამიზნეში მოხვედრის  $t_1$  მომენტში:  $1000=1000 t_1 \cos \alpha$ ;  
 აქედან  $t_1 = 1/\cos \alpha$ ;  $500 = -9,8 t_1^2/2 + 1000 t_1 \sin \alpha$  ;  
 $500 = -4,9/\cos^2 \alpha + 1000 \tan \alpha$  ;  
 ანუ  $4,9 \tan^2 \alpha - 1000 \tan \alpha + 504,9 = 0$  ; ამ განტოლების  
 ამოხსნებია:  $\tan \alpha_1 = 203,57$ ,  $\alpha_1=89^\circ 45'$  ;  $\tan \alpha_2 = 0,5102$  ,  
 $\alpha_2=26^\circ 50'$  .M სამიზნეს მდებარეობის მიხედვით  $\alpha_1$   
 კუთხით გასროლა მიზანშეუწონელია.



პასუხი:  $\alpha=26^\circ 50'$ .

1.27.

$OA = h = 20 \text{ კმ}$ ;  $v_0 = 1700 \text{ მ}=1,7 \text{ კმ}$ . ABC ტრაექტორიაზე  
 მოძრაობის განტოლებებია  $x = v_0 t \cos \alpha$ , (1)  
 $y = -gt^2/2 + v_0 t \sin \alpha$  ;  
 რაკეტის C წერტილში დაცემისას  $x=OC = s$ კმ;  $y=h$ კმ



$t = T$  წმ. (1) სისტემიდან მივიღებთ  $s = v_0 T \cos \alpha$ ,  
 $-h = -gT^2/2 + v_0 T \sin \alpha$  ;  
 ამოხსნათ ეს სისტემა T და s -ის მიმართ, მივიღებთ:  
 $T = 280,3 \text{ წმ}$ ;  $s = 306,3 \text{ კმ}$ . (აქ  $g = 9,8 \text{ მწმ}^2 = 0,0098 \text{ კმწმ}^2$ ).  
 განვიხილოთ მოძრაობა AB უბანზე. B წერტილში  $y=0$ . ვთქვათ ეს

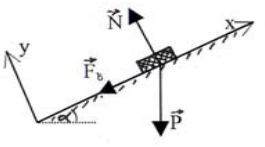
მონაკვეთი

რაკეტამ გაიარა  $t_1$  წამში. 98 გვექნება:  $0 = -gt_1^2/2 + v_0 t_1 \sin \alpha$  ;  
 საიდანაც  $t_1 = 265,75 \text{ წმ}$ .

AB უბანზე უმაღლეს წერტილს ( $y=h_1$ ) რაკეტა მიაღწევს  $t_2 = t_1/2 = 132,88 \text{ წმ}$  მომენტში.  
 გვექნება:  $y_{\max} = h_1 = -gt_2^2/2 + v_0 t_2 \sin \alpha = 86,5 \text{ კმ}$ .  
 ტრაექტორიის სრული სიმაღლე  $H = h + h_1 = 106,5 \text{ კმ}$ .

1.28.

$m \vec{w} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_b$  , დავაგვიმყოფოთ ლერძებზე  
 (x)  $mw = mg \sin \alpha - F_b$  ; (1)  
 (y)  $0 = -mg \cos \alpha + N$  . (2)  
 (2) - დან:  $N = mg \cos \alpha$  .



ხახუნის ძალა  $F_b = fN = fmg \cos \alpha$  ;  
 შევიტანოთ (1)-ში, მივიღებთ:  $w = g (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . (3)  
 მოძრაობის საწყისი პირობები:  $t=0$ :  $x=x_0=0$ ;  $v=v_0$ . (4)  
 (3) ტოლობის ორჯერ ინტეგრებით და (4) საწყისი პირობების გამოყენებით  
 მივიღებთ:  $v = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) t + v_0$  ; (5)  $x = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) t^2/2 + v_0 t$  ; (6)

ავტომაქსიმალური გაჩერების მომენტში:  $t=T$ :  $v=0$ ;  $x=s$ .  
 (5) -დან  $0 = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) T + v_0$  . აქედან  $T = 3,61 \text{ წმ}$ .  
 (6) -დან  $s = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha) T^2/2 + v_0 T = 28,9 \text{ მ}$ .  $s = 28,9 \text{ მ}$ .

**§ 2. წერტილის კარმონიული რხევა**

- 2.5.  $T = \pi/5$  ;  $P = mg = 9,8 \text{ ნ}$ .  $T = 2\pi/k$  ;  $k = 2\pi/T = 50$ .  $c = mk^2 = Pk^2/g = 25 \text{ ნ/მ}$
- 2.6.  $T = \pi/4$  ;  $P = mg = 4,96$ .  $k = 2\pi/T = 8$  .  $c = mk^2 = Pk^2/g = 4,9 \cdot 8^2 / 980 = 0,32 \text{ ნ/მ}$ .  
 $F = cx$  ; როცა  $x=1 \text{ სმ}$ ,  $F = cx = 0,32 \text{ ნ}$ .
- 2.7.  $x = 10 \sin 7t$  ; ამპლიტუდა  $a = 10 \text{ სმ}$  ;  $k = 7$  ;  $c = mk^2$ .  $mg = c \delta_{\text{ნტ}}$ .  
 $mg = mk^2 \delta_{\text{ნტ}}$  ;  $\delta_{\text{ნტ}} = g/k^2 = 980/49 = 20$  .  $\delta_{\text{ნტ}} = 20 \text{ სმ}$ .
- 2.8. იხ. ნახ. 8.  $c = 4 \text{ ნ/მ}$ ;  $x_0 = 8 \text{ სმ}$  ;  $a = 10 \text{ სმ}$ ;  $m = 16 \text{ კგ}$ .  $k = \sqrt{c/m} = 1/2$ .  
 (2.5) ფორმულის თანახმად:  $v_0 = k \sqrt{a^2 - x_0^2} = 3$ ;  $v_0 = 3 \text{ სმ/წმ}$ .  
 $x = 2 \sin(kt+1) \text{ სმ}$  ;  $v = dx/dt = 2k \cos(kt+1)$ ;  $v_{\max} = 2k$  ;  $4 = 2k$ ;  $k=2$ .  $c = mk^2 = 4 \text{ ნ/მ}$ .

სამივე ზამბარა შეიძლება შეიცვალოს ერთი ზამბარით, რომლის სიხისტის კოეფიციენტი  $c = c_1 + 2c_2$  ;  $T = 2\pi \sqrt{m/c} = 2\pi \sqrt{m/(c_1 + 2c_2)}$ .

**§ 3. წერტილის მილივადი რხევა**

- 3.4.  $R = 2mbv$  ;  $m = P/g = 9,8/980 = 0,016$ .  $bT_1/2 = 1/2$ ;  $b=4$ ;  $v=1$ ;  $R=0,086$ .
- 3.5. რხევის დიფერენციალური განტოლება:  $\ddot{\varphi} + 2b\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$  ;  $k^2 = g/l = 9,8/0,49 = 20$ .

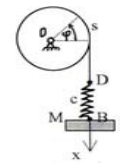
- 3.6.  $T_1 = 2\pi/k_1$  ;  $\pi/2 = 2\pi/k_1$ ;  $k_1 = 4$ . (3.6) ფორმულის თანახმად  $k_1^2 = k^2 - b^2$ .  $b = 2$ .  
 წინაღობის ძალა  $R = 2mbv$ ; პროპორციულობის კოეფიციენტი  $\mu = 2mb = 8$ .  
 წინაღობის ძალა  $R = 2mbv$ . როცა  $v=1 \text{ სმ/წმ}$ , მაშინ  $R = 0,02 \text{ ნ}$ ; გვექნება  
 $b = R/2mv = Rg/2Pv = 9,81$ . დროის რაღაც  $t$  მომენტისათვის რხევის ამპლიტუდა იყოს  
 $A = ae^{-bt}$ . ორი სრული რხევისათვის საჭიროა  $2T_1$ წმ. ამიტომ დროის  $t_1 = t + 2T_1$  წმ  
 მომენტისათვის რხევის ამპლიტუდა იქნება:  $A_1 = a e^{-bt_1} = a e^{-b(t+2T_1)}$  ; ( $bT_1 = 1$ ).  
 განვიხილოთ შეფარდება:  $A/A_1 = e^{2bT_1} = e^2$  ; ამპლიტუდა შემცირდა  $e^2$ -ჯერ.  
 იხილეთ წინა ამოცანა;  $t$  მომენტს შეესაბამება ამპლიტუდა  $A = ae^{-bt}$  ;  
 $t_1 = t + 3T_1$  მომენტს  $A_1 = ae^{-b(t+3T_1)}$  ; პირობის თანახმად:  $A = 10 A_1$  ;  
 $10 e^{-bt} = 10 e^{-b(t+3T_1)}$  ;  $3bT_1 = \ln 10$ ;  $b = \ln 10 / 6 = 0,3838$ .
- 3.8.  $R = 2mbv$ ;  $v = 1 \text{ სმ/წმ}$  ,  $R = 0,56$  .  $b = 5$ . მოძრაობის საწყისი პირობები:  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ .

- 99.  $v_0 = 6 \text{ სმ/წმ}$  ;  $k^2 = c/m = 25$ ;  $k_1^2 = k^2 - b^2 = 0$ .  $k_1 = 0$ .  
 რხევის დიფერენციალური განტ 10  $\ddot{x} + 25 = 0$ . მის შესაბამის  
 მანსაითებელ  $s^2 + 10s + 25 = 0$  განტ. ის ჯერადი ფესვებია:  
 $s_1 = s_2 = -5$ ; ამიტომ ზოგად ამონახსი აქვს ასეთი სახე:  $x = e^{-5t}(C_1 + C_2 t)$ .  
 საწყისი პირობების გამოყენებით:  $C_1 = 3$ ;  $C_2 = 21$  .  
 ამოხსნის საბოლოო სახეა:  $x = e^{-5t}(3 + 21t)$ .

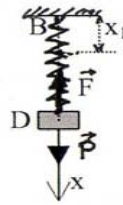
- 3.9.  $\delta = 5\pi/12$ ;  $bT_1/2 = 5\pi/12$ ;  $bT_1 = 5\pi/6$ .  $T_1 = 2\pi/k_1$  ;  $T = 2\pi/k$ .  
 $k^2 - k_1^2 = b^2$ ;  $(k^2 - k_1^2) T_1^2 = (bT_1)^2$ ;  $[(2\pi/T)^2 - (2\pi/T_1)^2] T_1^2 = (5\pi/6)^2$ .  
 $4\pi^2(T_1/T)^2 - 4\pi^2 = 25\pi^2/36$ .  $(T_1/T)^2 = (13/12)^2$ ;  $T_1 = 13/12 T$ .

**§ 4. წერტილის იძულებითი რხევა**

- 4.4. ზამბარაზე დაკიდებული ტვირთი უძრავია. F ძალის მოძვრებით იწყებს იძულებით  
 რხევას. რხევის საწყისი პირობები:  $t_0=0$ ;  $x_0=0$ ;  $v_0=0$ . რხევის განტოლებას ექნება  
 ასეთი სახე (იხ. (4.8) ფორმულა):  $x = h / (k^2 - p^2) \sin pt$ . მოცემულია:  $H=1,8$ ;  $p=16$ ;  
 გვექნება  $h = H/m = 720$ ,  $k^2 = c/m = cg/p = 400$ .  $A = h / (k^2 - p^2) = 5$ .  
 რხევის განტოლება:  $x = 5 \sin 16t \text{ სმ}$ .
- 4.5. ზამბარის D ბოლო ირხევა კანონით:  $x_D = s = r \varphi = r_0 \sin pt$ . M ტვირთზე  
 მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა:  $F = c x_D = c r \varphi \sin pt$ .  $H = c r \varphi_0$  ;  
 (4.2) ფორმულის თანახმად:  $h = H/m = c r \varphi_0 / m$ .  $k^2 = c/m$ .  
 1)  $p \neq \sqrt{c/m}$  ; ამპლიტუდა  $A = h / (k^2 - p^2) = c r \varphi_0 / (c - mp^2)$ .  
 (4.8) ფორმულის თანახმად:  $x = c r \varphi_0 / (c - mp^2) \sin pt$  . .  
 2)  $p = k = \sqrt{c/m}$  ;  $A = h/2k \cdot t$  ;  
 (4.10) ფორმულის თანახმად:  $x = c r \varphi_0 / 2mp \cdot t \cos pt$  .



- 4.6. ზამბარის D ბოლოს პარმონიული რხევის პერიოდი  $T = 0,8$  წმ.  $T = 2\pi / k$ ;  $k = 5\pi/2$ . ზამბარის B ბოლოზე მოქმედებს შემაშფოთებელი  $Q = H \sin pt$  ძალა, რომლის რხევის პერიოდი  $T_1 = 1,2$  წმ.  $T_1 = 2\pi / p$ ;  $p = 5\pi / 3$ . B ბოლოს რხევის ამპლიტუდა  $H = 3$ . მაშასადამე  $x_1 = 3 \sin(5\pi t/3)$ .



D ტვირთზე მოქმედებს სიმძიმის P ძალა და ზამბარის დაჭიმულობის ძალა  $F = c(x_1 + \delta_{\text{სტ}} + x)$ . ზამბარის სტატიკური წონასწორობისას  $P = c \delta_{\text{სტ}}$ . ტვირთის რხევის დიფერენციალური განტოლება ასეთია:  $m \ddot{x} = P - F$ , ანუ  $m \ddot{x} = c \delta_{\text{სტ}} - c(x_1 + \delta_{\text{სტ}} + x)$ .

აქედან  $\ddot{x} + k^2 x = h \sin(5\pi t/3)$ , სადაც  $k^2 = c/m$ ;  $h = 3c/m = 3k^2 = 75\pi^2/4$ .

D ტვირთის იძულებითი რხევის განტოლება:  $x = h/(k^2 - p^2) \cdot \sin(5\pi t/3)$ . იძულებითი რხევის ამპლიტუდა:  $A = h/(k^2 - p^2) = 5,4$ .  $A = 5,4$  სმ.

- 4.7.  $\varphi = \omega t = 2t$ .  $OE = x = 0A \sin \varphi = 10 \sin 2t$ .  $k^2 = c/m = 12,25$ . კულისა ასრულებს გადატანით მოძრაობას, ამიტომ ზამბარის B ბოლოც მოძრაობს კანონით  $x = 10 \sin 2t$ ; M ტვირთზე იმოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა  $F = cx = 50 \sin 2t$ ;  $p = \omega = 2$ ;  $H = 50$ ;  $m = Q/g$ ;

$h = H/m = HQ/g = 50 \cdot 980/400 = 122,5$ ; ამპლიტუდა:

$A = h/(k^2 - p^2) = 14,848$ ; რხევის განტოლება:  $x = 14,848 \sin 2t$  სმ.

- 4.8. იხ. წინა 4.7 ამოცანის ამოხსნა:  $\varphi = \omega t$ ; B წერტილი და მაშასადამე E წერტილი მოძრაობს კანონით:  $x = 10 \sin \omega t$ ;  $\omega = p$ ;  $k_2 = 12,25$ .

- 4.9. რეზონანსის შემთხვევაში:  $p = k = \sqrt{12,25} = 3,5$ ;  $\varphi = 3,5 t$ .  $\varphi = \omega t = 6t$  რად. პარალელური ზამბარები შევცვალოთ მათი ტოლფასი  $c_1$  სისხისტის ზამბარით:  $c_1 = 2c = 13,6$ . BD კულისა მოძრაობს გადატანითად.  $X_E = OE = 0A \cdot \sin \varphi = 7,5 \sin 6t$ . M ტვირთზე მოქმედებს შემაშფოთებელი ძალა  $F = c_1 x = 102 \sin 6t$ ;  $H = 102$ ;  $p = 6$ ;  $k^2 = c_1/m = c_1 g / Q = 136$ .  $k = 11,66$ .  $h = H/m = 1020$ .

წინალობის კოეფიციენტი  $b = k = 11,66$ . რხევის საწყისი ფაზა  $\beta$ ; (4.4) ფორმულის თანახმად:  $\tan \beta = -2bp/(k^2 - p^2) = -1,3992$ ;  $\beta = -54^\circ 25'$ ; რადიანებში  $\beta = -0,95$ . (4.6) ფორმულის თანახმად, იძულებითი რხევის ამპლიტუდა  $A = h/\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} = 5,93$ .

(4.5) ტოლობის თანახმად, იძულებითი რხევის განტოლება იქნება:  $x = 5,93 \sin(6t - 0,95)$  სმ.

- 4.10.  $R = 2mbv$ .  $2mb = 1,2$ ;  $b = 6$ . იძულებითი რხევის კუთხური სისხირე  $p = \omega_0 A = \omega$ . წინა, 4.9 ამოცანის პირობის თანახმად, შემაშფოთებელი ძალა  $F = c_1 x = 102 \sin 6t$ ;  $H = 102$ ;  $p = 6$ ;  $k^2 = c_1/m = c_1 g / Q = 136$ .  $k = 11,66$ .  $h = H/m = 1020$ . ამპლიტუდა:  $A = h/\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} = 1020/\sqrt{(136 - 36)^2 + 144 \cdot 36}$  იძულებითი რხევის ამპლიტუდა მაქსიმალურ მნიშვნელობას ღებულობს ( $A = A_{\text{max}}$ ), როცა გამოსახულება  $f(\omega) = (136 - \omega^2)^2 + 144 \omega^2$  იღებს უმცირეს მნიშვნელობას (min-ს). ვიპოვოთ  $f(\omega)$ -ს min - ი:  $f'(\omega) = 0$  განტოლებიდან  $\omega = 8$  წმ<sup>-1</sup>. ე.ი.  $p = \omega = 8$ ;

$f(8) = 14400$ ; ვგექნება  $A_{\text{max}} = 1020/\sqrt{14400} = 8,5$  სმ.  $A_{\text{max}} = 8,5$  სმ.  $\tan \beta = -2bp/(k^2 - p^2) = -4/3$ ;  $\beta = -\arctg(4/3)$ ; რხევის განტოლება:  $x = 8,5 \sin[8t - \arctg(4/3)]$ ; რეზონანსის შემთხვევაში:  $k = p = 11,66$ . ამპლიტუდა:  $A = h/2bk = 7,289$ ;

რხევის განტოლება:  $x = -7,289 \cos 11,66t$  სმ.

- 4.11.  $h = H/m$ ;  $p = \sqrt{c/m}$ ;  $k^2 = c/m$ . წინალობის ძალა  $R = 2mbv$ ;  $2mb = \mu$ ;  $b = \mu/2m$ ; იძულებითი რხევის ამპლიტუდა წინალობის მქონე გარემოში გამოისახება (4.6) ფორმულით:  $A = h/\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4b^2 p^2} = (H/m)/\sqrt{(c/m - c/m)^2 + 4(\mu^2/4m^2) \cdot c/m}$ ;

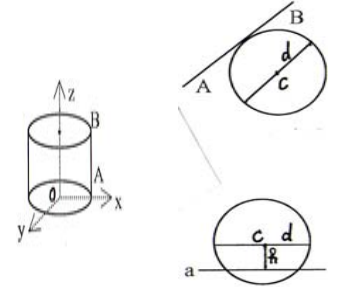
$$A = H/\mu \cdot \sqrt{m/c}$$

## § 5. მასების ცენტრი. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი

5.7.  $J_{AB} = J_d + MR^2 = 1/4 MR^2 + MR^2 = 5/4 MR^2$ .  
 $J_{AB} = 5/4 MR^2$ .

5.8.  $J_{AB} = J_{Oz} + MR^2 = 1/2 MR^2 + MR^2 = 3/2 MR^2$ .  
 $J_{AB} = 3/2 MR^2$ .

5.9.  $J_a = J_d + Mh^2 = 1/4 MR^2 + M(R/4)^2 = 5/16 MR^2$ .  
 $J_d = 5/16 MR^2$ .



5.10.  $J_z = J_z^{\text{წ}} + J_z^{\text{მ}}; J_z^{\text{წ}} = 1/2 \cdot M_1 r^2 = P_1/2g$ ;

$J_z^{\text{მ}} = 1/2 \cdot M_2 R^2 = P_2/2g$ ;  $J_z = (P_1 r^2 + P_2 R^2)/2g$ .

- 5.11. აღნიშნოთ: M - რგოლის მასა; m - ამოჭრილი ნაწილის მასა. (M+m) - მთლიანი დისკოს მასა.  $\rho$  - დისკოს სიმკვრივე. მაშინ  $M = \pi(R^2 - r^2)\rho$ , საიდანაც  $\rho = M/\pi(R^2 - r^2)$ ;  $M = P/g$ .  $m = \pi r^2 \rho = Mr^2/(R^2 - r^2)$ ;  
 $J_c = J_{Ic} - J_{2c} = (M+m)R^2/2 - mr^2/2 = MR^4/2(R^2 - r^2) - Mr^4/2(R^2 - r^2) = M(R^2 + r^2)/2$ .  
 $J_c = P(R^2 + r^2)/2g$ .

- 5.12. იხილეთ 5.5 ამოცანის ამოხსნა

5.13.  $d$  - დიამეტრია;  $J_x = J_d = Mr^2/4$  101 ი დიამეტრის პარალელურია:  
 $J_y = J_d + Ma^2 = Mr^2/4 + Ma^2 = M(r^2/4 + a^2) = M(r^2/2 + Ma^2) = M(r^2 + 2a^2)/2$ .  
დისკო სიმეტრიულია x და z დეოთეის თითარ, ამიტომ  $J_{xy} = J_{xz} = J_{yz} = 0$ .

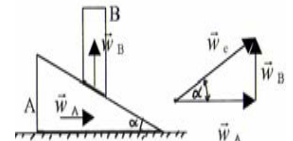
5.14.  $v_1 = \pi r_1^2 h_1$ ;  $v_2 = \pi r_2^2 h_2$ ;  $v_3 = \pi r_3^2 h_3$ ;  $m_1 = v_1 \rho$ ;  $m_2 = v_2 \rho$ ;  $m_3 = v_3 \rho$ .  
 $J_z = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2)/2 = \pi \rho (r_1^4 h_1 + r_2^4 h_2 + r_3^4 h_3)/2 = 96,86 \text{ კგმ}^2$ .

5.15. ინერციის რადიუსი:  $\rho = \sqrt{J/m}$ ;  
დისკოსათვის:  $J_1 = mr^2/2$ ;  $\rho_1 = \sqrt{J_1/m} = r/\sqrt{2}$ ;  
რგოლისათვის:  $J_2 = mr^2$ ;  $\rho_2 = \sqrt{J_2/m} = r$ ;  
ღრუ ცილინდრისათვის:  $J_3 = m(r^2 + r^2/4)/2 = 5mr^2/8$ ;  $\rho_3 = \sqrt{J_3/m} = r\sqrt{5/8}$ ;  
კონუსისათვის:  $J_4 = 3mr^2/10$ ;  $\rho_4 = \sqrt{J_4/m} = r\sqrt{3/10}$ ;  
 $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 : \rho_4 = 1/\sqrt{2} : 1 : \sqrt{5/8} : \sqrt{3/10}$ .

## § 6. მასების ცენტრის მოძრაობა

- 6.5. A ტვირთის აჩქარებატოლია დოლის ფეროს წერტილის მხები აჩქარების:  $w_A = w_B = \varepsilon R = 2$ . ტვირთი მოძრაობს კანონით:  $mw_A = F^{(a)}$ ; ამიტომ  $F^{(a)} = 100$  ნ.

6.6.  $w_A = w$ ;  $M \vec{w}_c = \sum m_k \vec{w}_k$ ;  
 $M \vec{w}_c = m_A \vec{w}_A + m_B \vec{w}_B$



$$w_B = w_A \operatorname{tg} \alpha = w \operatorname{tg} \alpha$$

$$|M \vec{W}_c| = \sqrt{(m_A w_A)^2 + (m_B w_B)^2} = \sqrt{(P_1 w / g)^2 + (P_2 w \operatorname{tg} \alpha / g)^2}$$

$$M w_c = w / g \cdot \sqrt{P_1^2 + P_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad M = (P_1 + P_2) / g;$$

$$w_c = w / (P_1 + P_2) \cdot \sqrt{P_1^2 + P_2^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

- 6.7.  $F_x^{(6)} = 0; \quad x_c^0 = x_c^1; \quad P_1 = 70 \text{ ნ}; \quad P_2 = 30 \text{ ნ}.$   
 საწყის  $t_0 = 0$  მომენტში:  $Mx_c = m_1 x_1 + m_2 x_2$ . (1)  
 $t$  მომენტისათვის ტვირთი გადაადგილდა  $\ell = 40$

სმ

მანძილზე დახრილი წიბოს გასწვრივ, ხოლო სოლი გადაადგილდა მარცხნივ  $s$  მანძილზე. მასის სოლის სმძიმის ცენტრის აბსცისა  $(x_1 + s)$ , ხოლო ტვირთისა  $(x_2 + s - \ell \operatorname{Cos} \alpha)$ ; გვექნება:

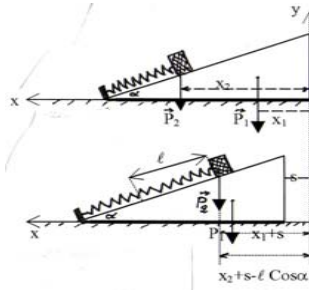
$$Mx_c^1 = m_1(x_1 + s) + m_2(x_2 + s - \ell \operatorname{Cos} \alpha); \quad (2)$$

(1) და (2) ტოლობებიდან მივიღებთ:

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = m_1(x_1 + s) + m_2(x_2 + s - \ell \operatorname{Cos} \alpha);$$

$$\text{აქედან: } s = m_2 \ell \operatorname{Cos} \alpha / (m_1 + m_2) =$$

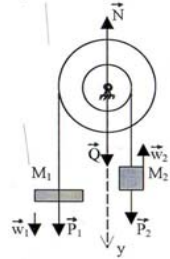
$$= P_2 \ell \operatorname{Cos} \alpha / (P_1 + P_2) = \underline{10,39 \text{ სმ}}.$$



- 6.8. გამოვიყენოთ სისტემის მასების ცენტრის მოძრაობის  $N$  თეორემა  $y$  ღერძზე გვეკმობა  $Mw_{cy} = \sum F_{ky}^{(6)}$ ,  
 ანუ  $Mw_{cy} = P_1 + P_2 + Q - N$ . (\*)

$$\text{ამასთანავე: } Mw_{cy} = \sum m_k w_{ky}; \quad \text{ვინაიდან } w_{1y} = w_1; \quad w_{2y} = -w_2,$$

$$\text{გვექნება: } Mw_{cy} = m_1 w_1 - m_2 w_2.$$



ვთქვათ ბლოკი ბრუნავს კუთხური აჩქარებით,

$$\text{მაშინ } w_1 = \varepsilon r_1, \quad w_2 = \varepsilon r_2; \quad w_1 / w_2 = r_1 / r_2; \quad w_2 = r_2 / r_1 \cdot w_1;$$

$$\text{მივიღებთ: } Mw_{cy} = (P_1 w_1 - P_2 w_2) = (P_1 w_1 - P_2 r_2 / r_1 \cdot w_1) \quad (**)$$

(\*) და (\*\*)-ის გატოლებით მივიღებთ:

$$P_1 + P_2 + Q - N = (P_1 r_1 - P_2 r_2) w_1 / g r_1. \quad \text{აქედან: } N = P_1 + P_2 + Q - (P_1 r_1 - P_2 r_2) w_1 / g r_1.$$

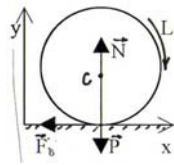
- 6.9. ავტომანქანის თვალზე მოქმედებს: სმძიმის  $P$  ძალა;  $L$  მომენტის მპარუნებელი წვევილძალა და ხახუნის ძალა  $F_b$ .

წვევილძალის შემადგენელი ძალების გვეკმობა საკოორდინატო ღერძებზე ნულის ტოლია. ამიტომ თვალის მოძრაობის დიფერენციალური განტოლებები

$$\text{იქნება: } M \ddot{x}_c = -F_b; \quad \text{ანუ } \ddot{x}_c = -fg;$$

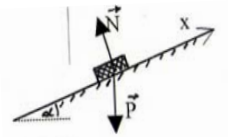
$$0 = P - N. \quad N = P = mg.$$

ამოხსნის გავრძელება იხილეთ 6.3 ამოცანის ამოხსნაში.

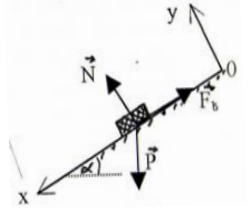


- 7.6.  $mv - mv_0 = Ft. \quad m(v - v_0) = Ft; \quad \Delta v = v - v_0 = Ft / m = 30 \text{ მ/წმ}.$

- 7.7.  $m \vec{V} - m \vec{V}_0 = (P + N) t.$  საბოლოო სიჩქარე  $v = 0$ ;  
 $P = mg.$  დაგვეგვიძობოთ ღერძზე:  
 $mv - mv_0 = -P \operatorname{Sin} \alpha \cdot t$ ;  
 $t = v_0 / g \operatorname{Sin} \alpha = 0,82; \quad t = 0,82 \text{ წმ}.$

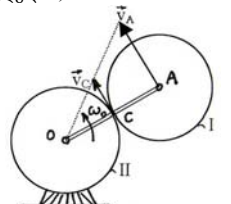


- 7.8.  $m \vec{V} - m \vec{V}_0 = (P + N + F_b) t,$   
 (x):  $mv - mv_0 = (P \operatorname{Sin} \alpha - F_b) t \quad (*);$   
 (y):  $0 = -P \operatorname{Cos} \alpha + N.$   
 $N = P \operatorname{Cos} \alpha = mg \operatorname{Cos} \alpha.$   
 $F_b = f N = f mg \operatorname{Cos} \alpha; \quad v_0 = 0;$   
 (\*)-დან:  $mv - mv_0 = (mg \operatorname{Sin} \alpha - f mg \operatorname{Cos} \alpha) t.$   
 $v = g(\operatorname{Sin} \alpha - f \operatorname{Cos} \alpha) t = 15,2 \text{ მ/წმ}.$



- 7.9.  $v_0 = 72 \text{ კმ/სთ} = 20 \text{ მ/წმ}. \quad m_1 = 1300 \text{ კგ}, \quad m_2 = 20 \text{ კგ}, \quad Q = m_1 v_0 + 4 m_2 v;$   
 $v - \text{ბორბლების მასების ცენტრის სიჩქარე. მოძრაობა თანაბარია } v = v_0 = \text{const}$   
 ; ამიტომ:  $Q = m_1 v_0 + 4 m_2 v_0 = 27600 \text{ კგმ/წმ}.$   
 სრული იმპულსი  $S = mv - mv_0 = 0$  (დროის ნებისმიერ შუალედში).

- 7.10.  $Q = Q_{0A} + Q_1.$   
 $I$  კბილანას მასების ცენტრია  $A$ ; ამიტომ:  $Q_1 = m_1 v_A.$   
 $v_A = \omega_0 \cdot OA = 2 \omega_0 r; \quad Q_1 = 2 m_1 \omega_0 r.$   
 $OA$  ღეროს მასების ცენტრია  $C$  წერტილი:  
 $Q_{0A} = m_2 v_C = m_2 v_A / 2 = m_2 \omega_0 r.$   
 $Q_{0A} \perp OA; \quad Q_1 \perp OA; \Rightarrow Q \perp OA;$   
 $Q = Q_{0A} + Q_1 = \omega_0 r (2 m_1 + m_2).$



- 7.11. 1)  $OA \perp OB; \quad Q = Q_{0A} + Q_{AB} \quad 103$

$$v_A = OA \cdot \omega_0 = a \omega_0$$

$$v_{c1} = v_A / 2 = a \omega_0 / 2;$$

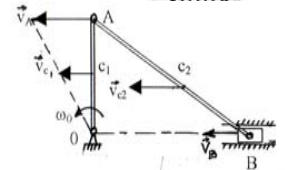
$$v_{c2} = v_B = v_A = a \omega_0.$$

$$Q_{0A} = m_1 v_{c1} = P_1 a \omega_0 / 2 g;$$

$$Q_{AB} = m_2 v_{c2} = P_2 a \omega_0 / g;$$

$$Q_B = m_3 v_B = P_3 a \omega_0 / g; \quad Q = a \omega_0 (P_1 + 2P_2 + P_3) / 2g.$$

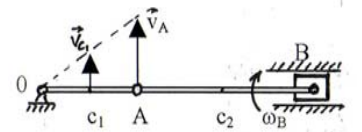
2)  $OA$  მიმართულია  $OB$ -ის გასწვრივ:  $v_A = a \omega_0; \quad v_{c1} = a \omega_0 / 2;$



$AB$  ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას. ბრუნვის მყისი ცენტრია  $B$  წერტილი, ამიტომ  $v_B = 0 \quad v_A = AB \cdot \omega_B;$   
 $v_{c2} = AB \cdot \omega_B / 2;$   
 $v_{c2} = v_A / 2 = a \omega_0 / 2.$   
 $Q = Q_{0A} + Q_{AB} + Q_B =$   
 $= m_1 v_{c1} + m_2 v_{c2} + m_3 v_{c2} + P_1 a \omega_0 / 2g + P_2 a \omega_0 /$

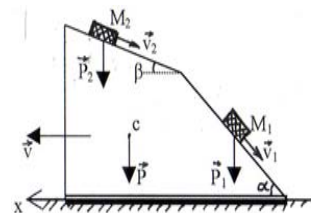
2g=

$$= a \omega_0 (P_1 + P_2) / 2g.$$



## § 7. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების

### თეორემა



7.12. ვთქვათ M მასის პრიზმა იწყებს მოძრაობას მარცხნივ v სიჩქარით. მასში M<sub>1</sub> მასის სხეულის აბსოლუტური სიჩქარის გეგმილი x ღერძზე არის u<sub>1</sub>=(v-v<sub>1</sub>cosα), ხოლო M<sub>2</sub> მასის სხეულის სიჩქარეა u<sub>2</sub>=(v-v<sub>2</sub>cosβ),

$$Q_{0x} = Q_x;$$

საწყის მომენტში სისტემა უძრავია, Q<sub>0x</sub>=0.

$$Q_x = mv + m_1 u_1 + m_2 u_2;$$

$$Pv/g + P_1(v-v_1 \cos \alpha)/g + P_2(v-v_2 \cos \beta)/g = 0.$$

$$\text{აქედან: } v = (P_1 v_1 \cos \alpha + P_2 v_2 \cos \beta) / (P + P_1 + P_2).$$

### § 8. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა

8.5.  $\ell_z = J_z \omega$ .  
 $J_z = J_0 + mR^2 = mR^2/2 + mR^2 = 3PR^2/2g$ .  
 $\ell_z = 3PR^2\omega/2g$ .

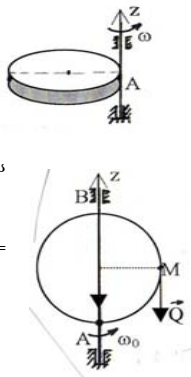
8.6. საწყის მომენტში M წერტილს უკავია A მდებარეობა; გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის z ღერძის მიმართ ნულის ტოლია. მასშტაბადე, ადგილი აქვს z ღერძის მიმართ

კინეტიკური მომენტის შენახვის კანონი:  $\ell_z^0 = \ell_z^t$ . (\*)

საწყის მომენტში:  $\ell_z^0 = \ell_z^{\text{სხვ}} + \ell_z^M = J_z \omega_0 = Pr^2 \omega_0 / 4g$ . ( $\ell_z^M =$

0).

წერტილი უდიდესი მანძილით დაშორებულია პორიზონტალურ დამეტრზე მდებარეობისას. ამ მომენტისათვის ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იყოს ω მაშინ  $\ell_z = (Jz^{\text{სხვ}} + Jz^M) \omega = (Pr^2/4g + QR^2/g) \omega = (P+4Q)r^2 \omega / 4g$ . (\*)-ის თანახმად:  $Pr^2 \omega_0 / 4g = (P+4Q)r^2 \omega / 4g$ . აქედან  $\omega = P\omega_0 / (P+4Q)$ .



8.7.  $\ell_z^0 = \ell_z^a$ . (\*) საწყის მომენტში M წერტილს უკავია A მდებარეობა ფერსოზე, ამიტომ:  $\ell_z^0 = (J_z^{\text{სხვ}} + J_z^A) \omega_0 = (Pr^2/2g + QR^2/g) \omega_0 = (P+2Q)r^2 \omega_0 / 2g$ .

დისკოსთან ერთად AB ქორდის გასწვრივ M წერტილი ასრულებს რთულ მოძრაობას; მისი აბსოლუტური სიჩქარე იქნება:  $v_M = v_{\text{ფ}} + v_{\text{ფ}}$ . ე.ი.  $v_M = u + a$ , სადაც u არის ადებულ მომენტში დისკოს ბრუნვის კუთხური სიჩქარე.

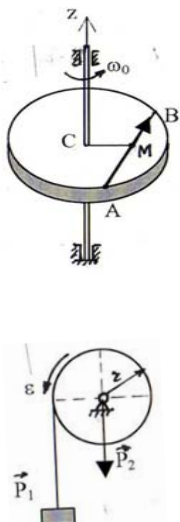
M წერტილის z ღერძის გარშემო ბრუნვის კუთხური სიჩქარე იქნება:  $\omega_M = v_M / a = (u + a) / a$  ამ

მომენტისათვის:  $\ell_z^a = J_z^{\text{სხვ}} \omega + J_z^M \omega_M = Pr^2 \omega / 2g + Qa^2/g \cdot (u+a) \omega / a = Pr^2 \omega / 2g + Qa(u+a) \omega / g$ .

(\*) ტოლობის თანახმად  $(P+2Q)r^2 \omega_0 / 2g = Pr^2 \omega / 2g + Qa(u+a) \omega / g$ ;

აქედან:  $\omega = [(P+2Q)r^2 \omega_0 - 2Qau] / (Pr^2 + 2Qa^2)$ .

8.8. ცილინდრული დოლის ბრუნვის განტოლება:  $J_0 \varepsilon = L_0^{(a)}$ . სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან: დოლი და

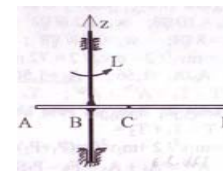


ტვირთი:

$$J_0 = P_2 r^2 / 2g + P_1 r^2 / g = r^2 (P_2 + 2P_1) / 2g.$$

გარე ძალების ნაკრები მომენტი ბრუნვის ღერძის მიმართ:  $L_0^{(a)} = P_1 r$ .

$$\varepsilon = L_0^{(a)} / J_0 = 2P_1 g / (2P_1 + P_2) r.$$



8.9.  $J_z \varepsilon = L_z$ .  $BC = l/6$ .  $L_z = L$ .  
 AD ღერძისათვის:  $J_z = J_B = J_c + m \cdot BC^2 = m l^2 / 12 + m l^2 / 36 = m l^2 / 9$ .  
 $\varepsilon = L_z / J_z = 9L / m l^2 = 9$ .

8.10. სისტემა შედგება ორი ერთნაირი დისკოსაგან. ერთ-ერთი დისკოსათვის Oz ღერძის პარალელური ვერტიკალური დამეტრი იყოს AB. ამ დისკოს ინერციის მომენტი Oz ღერძის მიმართ იქნება:  $J_z^{01} = J_{AB} + ma^2 = PR^2/4g + Pa^2/g = P(R^2 + 4a^2)/4g$ .

ორივე დისკოსათვის:  $J_z = 2 J_z^{01} = P(R^2 + 4a^2)/4g$ .

$$J_z \varepsilon = L; \quad \varepsilon = L / J_z = 2gL / P(R^2 + 4a^2).$$

8.11. ფიზიკური ქანქარა:  $T = 2\pi \sqrt{J_0 / mgh}$ ;  $h = OC = r$ .  
 რგოლისათვის:  $J_c = P(R^2 + r^2)/2g$

$$J_0 = J_c + m \cdot OC^2 = P(R^2 + r^2) / 2g + Pr^2 / 2g = P(R^2 + 3r^2) / 2g.$$

რხევის პერიოდი:  $T = 2\pi \sqrt{(R^2 + 3r^2) / 2gr}$ .

8.12.  $\omega_0 = \pi / 30 = 20 \pi$ . დამუხრუჭებისას ხახუნის ძალა:

$$F_{\text{ხ}} = fQ = 0,4Q; \quad J_0 \varepsilon = L_0; \quad J_0 = mr^2 = 0,9;$$

ბრუნვისადმი წინააღმდეგობის მომენტი:

$$L_0 = -FR = -0,04Q. \quad \varepsilon = L_0 / J_0; \quad d\omega / dt = -2Q / 45;$$

გავინტეგრირებთ:  $\omega = \omega_0 - 2Q t / 45$ ;

$$t = 10 \text{ წმ-ის შემდეგ ლილვი გაჩერდა: } \omega = 0;$$

$$\omega_0 - 2Q t / 45 = 0; \quad Q = 45 \omega_0 / 2t = 45 \pi. \quad Q = 45\pi \text{ ნ.}$$

ლილვი ბრუნავს თანაბრად შენელებულად:

$$\varepsilon = L_0 / J_0 = -2Q / 45 = -2\pi. \quad \varphi = \omega_0 t + \varepsilon t^2 / 2 = 100 \pi; \quad \varphi = 2\pi N.$$

ბრუნვათა რიცხვი:  $N = \varphi / 2\pi = 50$  ბრუნა.

### § 9. კინეტიკური ენერჯი 105 უილუბის თეორემა

9.7.  $\vec{r}_0(2; 2; 2), \vec{r}_1(3; 3; 3); \Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}; \Delta \vec{r}(1; 1; 1).$

$\vec{F}(1; 1; 1); \vec{F}$  და  $\Delta \vec{r}$  ვექტორები ურთიერთპარალელურია.

$$\Delta \vec{r} \text{ გადაადგილებაზე შესრულებული მუშაობა } A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = 3 \text{ ჯ.}$$

9.8. კინეტიკური ენერჯიის ცვლილება:  $\Delta T = T - T_0 = A = 3 \text{ ჯ.}$

$$v_0 = 72 \text{ კმ/სთ} = 20 \text{ მ/წმ. წინააღმდეგობის ძალა: } R = 0,1P = 0,1 \text{ მგ};$$

$$mv^2/2 - mv_0^2/2 = -R s; \quad v = 0; \quad -mv_0^2/2 = -0,1 \text{ მგ s};$$

$$s = v_0^2 / 0,2 g = 204 \text{ მ.}$$

9.9.  $mv^2/2 - mv_0^2/2 = -F_b s$ ;

$$v = 0. \quad F_b = fN = fP = fmg.$$

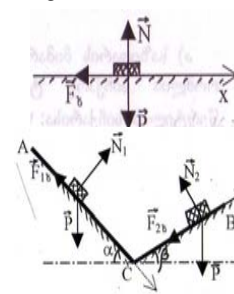
$$-mv_0^2/2 = -fmg; \quad f = v_0^2 / 2gs.$$

9.10. გზის AC მონაკვეთზე:

$$v_0 = v_A = 0; \quad v = v_C; \quad AC = s_1. \quad f_1 = tg\varphi_1;$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = mg(\text{Sin} \alpha - f_1 \text{Cos} \alpha) s_1.$$

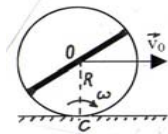
$$v_C^2 = 2g(\text{Sin} \alpha - f_1 \text{Cos} \alpha) s_1 = 2g(\text{Sin} \alpha - tg\varphi_1 \cdot \text{Cos} \alpha) s_1;$$



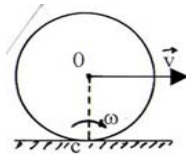
$v_c^2 = 2gs_1 \sin(\alpha - \varphi_1) / \cos\varphi_1$  . (\*)  
 გზის CB მონაკვეთზე:  $v_0 = v_c = v$  ;  $v_B = 0$  ;  $CB = s_2$  ;  
 $f_2 = \mu g \cos\varphi_2$  ;  $mv_B^2/2 - mv_c^2/2 = -mg(\sin\beta + f_2 \cos\beta) s_2$  .  
 $s_2 = v_c^2 / 2g(\sin\beta + f_2 \cos\beta) = v_c^2 / 2g(\sin\beta + \mu g \cos\varphi_2 \cdot \cos\beta) = v_c^2 \cos\varphi_2 / 2g \sin(\beta + \varphi_2)$

თუ მხედველობაში მივიღებთ (\*) ტოლობას, გვქვია:  $s_2 = s_1 \sin(\alpha - \varphi_1) \cdot \cos\varphi_2 / \sin(\beta + \varphi_2) \cdot \cos\varphi_1$  .

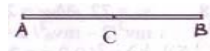
**9.11.** დისკო და ღერო ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას .  
 ბრუნვის მყის ცენტრია O წერტილი .  $\omega = v_0 / R$  .  
 $T = T_{\text{გ}} + T_{\text{ც}} . T_{\text{გ}} = m_1 v_0^2 + J_c \omega^2 / 2 =$   
 $= P v_0^2 / 2g + P R^2 / 4g \cdot v_0^2 / R^2 = 3P v_0^2 / 4g .$   
 $T_{\text{ც}} = m_2 v_0^2 + J_c \omega^2 / 2 = Q v_0^2 / 2g + Q R^2 / 6g \cdot v_0^2 / R^2 = 2Q v_0^2 / 3g .$   
 $T = T_{\text{გ}} + T_{\text{ც}} = 3P v_0^2 / 4g + 2Q v_0^2 / 3g = v_0^2 (9P + 8Q) / 12g .$   
 $T = v_0^2 (9P + 8Q) / 12g .$



**9.12.** 001 ღერო ასრულებს გადატანით მოძრაობას ( $m_1 = 3m$ ):  
 $T_1 = m_1 v^2 / 2 = 3mv^2 / 2$  .  
 თითოეული თვალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:  
 $T_2 = T_3 = m_2 v_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2 ;$   
 $v = \omega r ; \omega = v / R ; J_c = m_2 r^2 / 2 ;$  ამიტომ:  
 $T_2 = mv^2 / 2 + mr^2 / 4 \cdot (v/r)^2 = 3mv^2 / 4 ;$   
 $T = T_1 + T_2 + T_3 = T_1 + 2T_2 = 3mv^2 . T = 3mv^2 .$



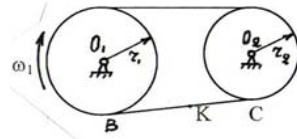
**9.13.** ღერო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:  $T = mv_c^2 / 2 + J_c \omega^2 / 2 ; (*)$   
 $v_c^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 4t^2 + 4 ;$  როცა  $t = 1$  წმ,  $v_c^2 = 8 ;$   
 $\omega = \dot{\varphi} = 12t^2 ;$  როცა  $t = 1$  წმ,  $\omega = 12 ;$



$J_c = ml^2 ; (*)$  ტოლობაში შეტანილი მივიღებთ:  $T = 10$  ჯ .

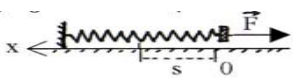
**9.14.** ა) საზიდარის მიმართ ტვირთი ასრულებს გადატანით მოძრაობას, რომლის სიჩქარე ტოლია ჯალაპპარის ფერსოზე მდებარე K წერტილის სიჩქარისა:  $v_k = v_B = \omega r = 1 ;$  ამიტომ:  $T_1 = mv_B^2 / 2 = m/2$  .

ბ) გზის მიმართ ტვირთი ასრულებს რეულ მოძრაობას:  $\vec{V}_B = \vec{V}_c + \vec{V}_k ; (\vec{V}_c = \vec{V})$  . ვინაიდან  $\vec{V}_c \perp \vec{V}_k$  , ამიტომ:  $v_B^2 = v_c^2 + v_k^2 = 5 ;$   
 მაშასადამე:  $T_2 = mv_B^2 / 2 = 5m/2 . T_2 : T_1 = 5$



**9.15.**  $T = T_1 + T_2 + T_3 ; T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2 ; T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2 ;$   
 $v_B = \omega_1 r_1 ; v_c = \omega_2 r_2 ; v_B = v_c .$   
 $\omega_2 = \omega_1 r_1 / r_2 ; T_2 = J_2 (r_1 / r_2)^2 \omega_1^2 / 2 ;$   
 ღვედი წარმოადგენს ნივთიერ წერტილთა სისტემას, რომლის ყოველი წერტილის სიჩქარე ტოლია:  $v_k = v_B = \omega_1 r_1 ;$   
 ამიტომ:  $T_3 = (\sum m_k v_k^2) / 2 = (\sum m_k \omega_1^2 r_1^2) / 2 = \omega_1^2 r_1^2 m / 2 .$   
 $T = J_1 \omega_1^2 / 2 + J_2 (r_1 / r_2)^2 \omega_1^2 / 2 + m \omega_1^2 r_1^2 / 2 ; T = [J_1 + J_2 (r_1 / r_2)^2 + m r_1^2] \omega_1^2 / 2 .$

**9.16.** ზამბარის დეფორმაციის საწყისი სიჩქარე  $v_0$  , საბოლოო -  $v = 0$  , ზამბარის უდიდესი დეფორმაცია -  $s$  . ზამბარაზე მოქმედებს დრეკადი აღმდგენი (ცვალებადი) ძალა  $F = cx$  .

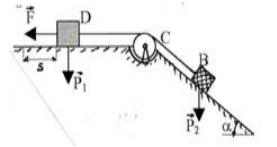


$mv^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = - \int_0^s F dx ; - mv_0^2 / 2 = - \int_0^s c x dx ; mv_0^2 / 2 = cs^2 / 2 ;$

$s = v_0 \sqrt{m / c} .$   
**9.17.** გზის ორივე უბანზე მოძრაობა თანაბრად ცვლილია:  
 $t_1 = 10$  წმ;  $w_1 = 1,2$  მ/წმ<sup>2</sup>;  $v_1 = v_0 + w_1 t_1 = 12$  მ/წმ .  
 $t_2 = 8$  წმ;  $w_2 = 0,9$  მ/წმ<sup>2</sup>;  $v_2 = v_1 + w_2 t_2 = 19,2$  მ/წმ .  
 $A_1 = mv_1^2 / 2 - mv_0^2 / 2 = 72$  მ;  $A_2 = mv_2^2 / 2 - mv_1^2 / 2 = 112,32$  მ;  
 $A_2 / A_1 = 1,56 ; A_2 = 1,56 A_1 .$

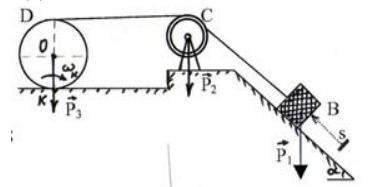


**9.18.**  $T - T_0 = A^{(3)} + A^{(6)} ; T_0 = 0 ; A^{(3)} = 0 ; T = A^{(6)} . (*)$   
 სისტემა შედგება ორი სხეულისაგან:  
 $T = T_1 + T_2 = m_1 v^2 / 2 + m_2 v^2 / 2 = (P_1 + P_2) v^2 / 2g .$   
 $A^{(6)} = A_1 + A_2 = F s - P_2 \sin\alpha \cdot s ;$   
 $A^{(6)} = (F - P_2 \sin\alpha) \cdot s ;$



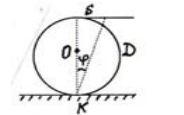
(\*) ტოლობის თანახმად:  $(P_1 + P_2) v^2 / 2g = (F - P_2 \sin\alpha) \cdot s$   
 აქედან  $v^2 = 2gs(F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2) .$   
 თუ უკანასკნელ ტოლობას გაავსარმოებთ, მივიღებთ:  
 $2v \cdot w = 2g(F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2) \cdot \delta ; (\delta' = v) ;$   
 აქედან:  $w = g(F - P_2 \sin\alpha) / (P_1 + P_2) .$

**9.19.**  $T - T_0 = A^{(3)} + A^{(6)} ; T_0 = 0 ; A^{(3)} = 0 ; T = A^{(6)} . (*)$   
 $T = T_B + T_C + T_D . T_B = m_1 v^2 / 2 ;$   
 $v = v_B = v_C = \omega c r ;$   
 $T_C = J_c \omega_c^2 / 2 = m_2 r^2 \omega_c^2 / 4 = m_2 v^2 / 4 ;$   
 D საგორავი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:  $T_D = m_3 v_0^2 / 2 + J_0 \omega_k^2 ;$   
 $v_0 = v_D / 2 = v / 2 ; \omega_k = v_D / 2R = v / 2R ;$   
 $T_D = m_3 v^2 / 8 + m_3 R^2 / 4 \cdot (v / 2R)^2 = m_3 v^2 / 2 + 3m_3 v^2 / 16 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) v^2 / 16 .$   
 $T = T_B + T_C + T_D = m_1 v^2 / 2 + 3m_3 v^2 / 16 = (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) v^2 / 16 .$

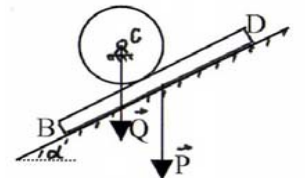


სისტემაზე მოქმედი გარე ძალების მუშაობა:  $A = A_B + A_C + A_D = A_B = m_1 g \sin\alpha$  .  
 (\*) ტოლობის თანახმად  $T = A$  ; შევიტანოთ მნიშვნელობები:  
 $(8m_1 + 4m_2 + 3m_3) v^2 / 16 = m_1 g \sin\alpha \cdot s ;$   
 აქედან  $v = 4 \sqrt{m_1 g s \sin\alpha} / (8m_1 + 4m_2 + 3m_3) = 2,3$  .  
 $v = 2,3$  მ/წმ .

**9.20.** იხილეთ წინა 9.18 ამოცანის ამოხსნა. დამატება D საგორავის გორვის ხახუნის მუშაობა:  $A_D = -\delta N \varphi$  ; აქ  $N = P_3 = m_3 g ;$   
 $\varphi = s / 2R ; A_D = -\delta m_3 g s / 2R .$  სრული მუშაობა:  
 $A = A_B + A_C + A_D = (m_1 R \sin\alpha - 0,5 \delta m_3) g s / R .$   
**9.21.**  $T - T_0 = A . T_0 = 0 ; T = T_B + T_C + T_D = (J_B + J_C + J_D) \omega^2 / 2 = 3P r^2 \omega^2 / 4g ;$   
 $A = L \cdot \varphi = L \varphi ; 3P r^2 \omega^2 / 4g = L \varphi ;$  აქედან:  $\omega = 2 / r \cdot \sqrt{L g \varphi / 3P} ;$   
 კუთხური აჩქარება:  $\varepsilon = d\omega / dt = 2Lg / 3P r^2 . \varepsilon = 2Lg / 3P r^2 .$



**9.22.**  $T - T_0 = A . T_0 = 0 ; T = A . vD = \omega r .$   
 $T = T_C + T_{BD} = J_c \omega^2 / 2 + P v_D^2 / 2g =$   
 $= Q r^2 \omega^2 / 4g + P v_D^2 / 2g = (2P + Q) v_D^2 / 4g .$



$$A = A_C + A_{BD} = A_{BD} = P \sin \alpha \cdot \ell;$$

$$(2P + Q) v_D^2 / 4g = P \ell \sin \alpha;$$

$$v_D^2 = 4 P g \ell \sin \alpha / (2P + Q).$$

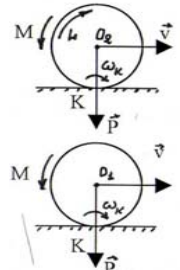
9.23.  $T = A$ .  $T = 2T_1 + 2T_2 + T_3$ ;  $v = v_{01} = v_{02}$ ;  
 ძარისათვის:  $T_3 = Gv^2/2g$ ;  
წამყვანი ბორბლისათვის:  $T_2 = J_2 \omega_k^2/2 = J_2 v^2/2R^2$ . მუშაობას ასრულებს

მაბრუნებელი  $L$  მომენტი და გორვისადმი ხაზუნის წინაღობის მომენტი  
 $M = -\delta N$ ; ე.ი.  $A_2 = (L - \delta N) \varphi$ .  
ამოლი ბორბლისათვის:  $T_1 = J_1 \omega_k^2/2 = J_1 v^2/2R^2$ ; მუშაობას ასრულებს

მხოლოდ გორვისადმი ხაზუნის წინაღობის მომენტი  $M = -\delta N$ ; ე.ი.  $A_1 = -\delta N \varphi$ .  
 თითოეულ ბორბალზე მოღის დატვირთვა  $P = G/4$ ;  
 რეაქციის ძალა:  $N = P = G/4$ .

ავტომანქანს მიერ  $s$  მანძილის გავლის შედეგად თითოეული ბორბალი შემობრუნდება  $\varphi = s/R$  კუთხით.  
 სისტემის კინეტიკური ენერგია:  
 $T = 2T_1 + 2T_2 + T_3 = J_1 v^2/R^2 + J_2 v^2/R^2 + Gv^2/2g$ ;  
 $T = v^2 [GR^2 + 2(J_1 + J_2)g] / 2gR^2$ .

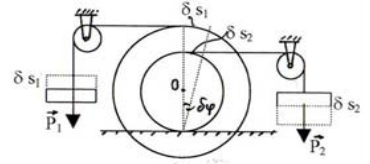
სისტემაზე მოქმედი ძალების მუშაობა:  
 $A = A_1 + A_2 = (L - 2\delta N) \varphi = (L - 2\delta G/4) s/R$ ;  
 $A = s(2L - \delta G) / 2R$ .  $T = A$ .  
 $v^2 [GR^2 + 2(J_1 + J_2)g] / 2gR^2 = s(2L - \delta G) / 2R$ .  
 აქედან:  $v^2 = 2gsR(2L - \delta G) / [GR^2 + 2(J_1 + J_2)g]$ .



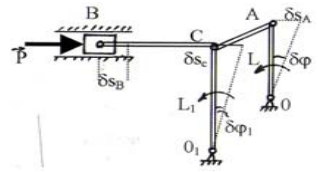
9.24. იხილეთ წინა 9.22 ამოცანის ამოხსნა

### §10. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი

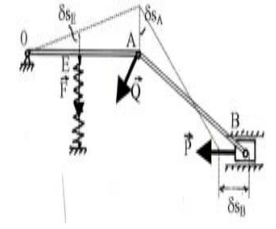
10.4.  $-P_1 \delta s_1 + P_2 \delta s_2 = 0$ .  
 $\delta s_1 = (r_1 + r_2) \delta \varphi$ ;  
 $\delta s_2 = 2r_2 \delta \varphi$ ;  
 $\delta s_1 / \delta s_2 = (r_1 + r_2) / 2r_2$ .



10.5.  $P \delta s_B - M_1 \delta \varphi_1 - M \delta \varphi = 0$ ;  
 $M = (P \delta s_B - M_1 \delta \varphi_1) / \delta \varphi$ .  
 $\delta s_B = \delta s_C = O_1 C \cdot \delta \varphi_1 = 3r \delta \varphi_1$ ;  
 $\delta s_B = r \delta \varphi$ .  $\delta s_C = \delta s_B = 0A \cdot \delta \varphi = r \delta \varphi$ ;  
 $3r \delta \varphi_1 = r \delta \varphi$ ;  $\delta \varphi_1 = \delta \varphi / 3$ ;  
 $M = P r - M_1 / 3 = Pr / 2$ .  $M = Pr / 2$ .

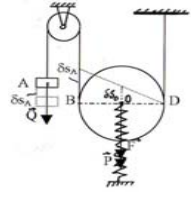


10.6.  $P \delta s_B - Q \cos \alpha \cdot \delta s_A - F \delta s_E = 0$ . ზამბარის ღრეკალობის ძალა  $F = ch$  ( $h$  – ზამბარის ღეფორმაცია).  
 $გეგმა_{AB} \delta s_A = გეგმა_{AB} \delta s_B$ ;  $\delta s_A \sin \alpha = \delta s_B \cos \alpha$ ;  
 $\delta s_B = \tan \alpha \delta s_A$ ;  $\delta s_E = \delta s_A / 2$ .  
 $P \tan \alpha \delta s_A - Q \cos \alpha \delta s_A - ch \delta s_A / 2 = 0$ ;

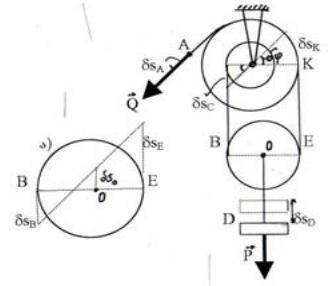


აქედან:  $h = 2(P \tan \alpha - Q \cos \alpha) / c$ .

10.7.  $Q \delta s_A - P \delta s_0 - F \delta s_0 = 0$ .  
 $\delta s_0 = \delta s_A / 2$ ;  
 $Q \delta s_A - P \delta s_A / 2 - ch \delta s_A / 2 = 0$ ;  
 $2Q - P - ch = 0$ ;  
 $Q = (P + ch) / 2$ .  
 $Q = 200$ .



10.8.  $Q \delta s_A - P \delta s_D = 0$ ;  $Q = P \cdot \delta s_D / \delta s_A$ .  
 $\delta s_A = \delta s_K = \delta s_E = r \delta \varphi$ ;  
 ნახ. ა) – ს თანხმად:  
 $\delta s_0 = (\delta s_E - \delta s_B) / 2 = (R - r) \delta \varphi / 2$ .  
 $\delta s_D = \delta s_0$ ;  
 $Q = P (R - r) \delta \varphi / 2R \delta \varphi$ .  
 $Q = P (R - r) / 2R$ .



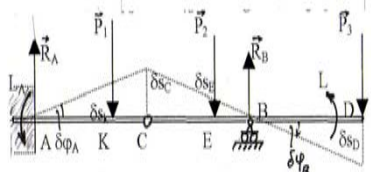
10.9. ამოცანა ამოხსნება იხევე, როგორც 10.10 ამოცანა.

10.10. AD კოჭზე მოქმედებენ პარალელური ძალები, ამიტომ ჩამაგრების A წერტილში რეაქცია შედგება მათი პარალელური  $R_A$  ძალისა და წვეილძალისაგან, მომენტით  $L_A$ .

ა) B სახსარი დავტოვოთ უძრავად და შემოვპარუნოთ კოჭი A წერტილის გარშემო შესაძლო  $\delta \varphi_A$  კუთხით.  
 შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი ასე ჩაიწერება:

$$L_A \delta \varphi_A - P_1 \delta s_K - P_2 \delta s_E - L \delta s_B + P_3 \delta s_D = 0;$$

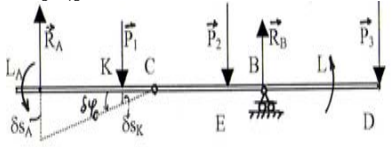
$$\delta s_K = AK \delta \varphi_A = 2\delta \varphi_A$$
;  
 $\delta s_C = AC \delta \varphi_A = 3\delta \varphi_A$ ;  
 $\delta s_E = EB \delta \varphi_B = \delta \varphi_B = \delta \varphi_A$ ;  
 $\delta s_D = 3 \delta \varphi_B = 3\delta \varphi_A$ ;



$$L_A \delta \varphi_A - P_1 2\delta \varphi_A - P_2 \delta \varphi_A - L \delta \varphi_A + P_3 3\delta \varphi_A = 0$$
;  $L_A = 2P_1 + P_2 + L - 3P_3$ .  $L_A = 7$  ტმ.

ბ) B სახსარი დავტოვოთ უძრავად და შემოვპარუნოთ კოჭის AC ნაწილი C სახსრის გარშემო შესაძლო  $\delta \varphi_C$  კუთხით. მივიღებთ:

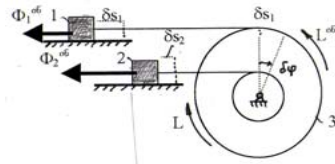
$$L_A \delta \varphi_C - R_A \delta s_A + P_1 \delta s_K = 0$$
.  
 $\delta s_A = 3 \delta \varphi_C$ ;  $\delta s_K = \delta \varphi_C$ ;  
 $L_A \delta \varphi_C - R_A 3 \delta \varphi_C + P_1 \delta \varphi_C = 0$ .  
 $R_A = 4$  ტ.



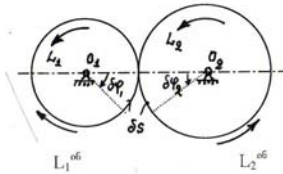
ვ) სისტემაზე მოქმედი პარალელური ძალები წონასწორობაშია:  
 $R_A - P_1 - P_2 + R_B - P_3 = 0$ ;  $R_B = 8$  ტ.

### §11. ღინამიკის ზოგადი განტოლება

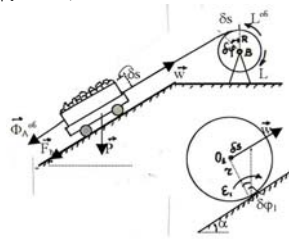
11.4.  $L\delta\varphi - L^{06}\delta\varphi - \Phi_1^{06}\delta s_1 - \Phi_2^{06}\delta s_2 = 0$ .  
 $\delta s_1 = R\delta\varphi$ ;  $\delta s_2 = \delta\varphi$ .  $\Phi_1^{06} = 1$   
 $\Phi_1^{06} = m_1 w_1 = m_1 R \varepsilon$ ;  
 $\Phi_2^{06} = m_2 w_2 = m_2 r \varepsilon$ ;  
 $L^{06} = J_3 \varepsilon$ ;  
 $L\delta\varphi - J_3 \varepsilon \delta\varphi - m_1 R \varepsilon \delta\varphi R - m_2 r \varepsilon r \delta\varphi = 0$ ;  
 $\varepsilon = L / (J_3 + m_1 R^2 + m_2 r^2) = 1 \text{ წმ}^{-1}$ .



11.5.  $-L_1\delta\varphi_1 + L_1^{06}\delta\varphi_1 + L_2\delta\varphi_2 - L_2^{06}\delta\varphi_2 = 0$ .  
 $r\delta\varphi_1 = -R\delta\varphi_2$ ;  $\delta\varphi_2 = r\delta\varphi_1/R$ ;  
 $w_1^K = w_2^K$ ;  $r\varepsilon_1 = R\varepsilon_2$ ;  
 $L_1^{06} = J_1\varepsilon_1 = m_1 r^2\varepsilon_1/2$ ;  
 $L_2^{06} = J_2\varepsilon_2 = m_2 R^2\varepsilon_2/2 = -m_2 R r \varepsilon_1/2$ ;  
 $-L_1\delta\varphi_1 + m_1 r^2\varepsilon_1/2\delta\varphi_1 + m_2 R r \varepsilon_1/2 \cdot r\delta\varphi_1/R + L_2 r\delta\varphi_1/R = 0$ ;  
 $\varepsilon_1 = (2L_1R - rL_2)/Rr^2(m_1 + m_2)$ .

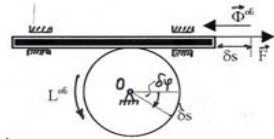


11.6.  $L\delta\varphi - L^{06}\delta\varphi - P \text{Sin} \alpha \delta s - F_b \delta s - \Phi_A^{06}\delta s - 2J_1\varepsilon_1\delta\varphi_1 = 0$ .  
 დოლზე  $\delta s = R\delta\varphi$ ; წვეთლოვალზე  $\delta s = r\delta\varphi_1 = R\delta\varphi$ ;  
 $F_b = P f \text{Cos} \alpha$ ;  $\Phi_A^{06} = mw = Pw/g$ ;  $\varepsilon_1 = w/r$ ;  
 $L^{06} = J_2\varepsilon_B = J_2w/R$ ;  
 $L\delta\varphi - J_2w\delta\varphi/R - P \text{Sin} \alpha R\delta\varphi - P f \text{Cos} \alpha R\delta\varphi - PwR\delta\varphi/g - 2J_1wR\delta\varphi/r^2 = 0$ ;  
 $L - PR(\text{Sin} \alpha + f \text{Cos} \alpha) = (J_2/R + PR/g + 2J_1R/r^2)w$ ;  
 $w = L - PR(\text{Sin} \alpha + f \text{Cos} \alpha) / R(\dots)$

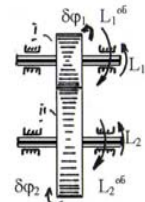


110

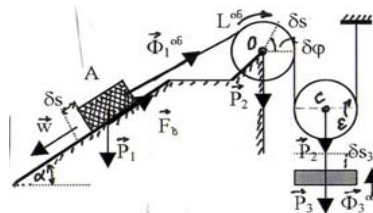
11.7.  $F\delta s - \Phi^{06}\delta s - L^{06}\delta\varphi = 0$ ;  $w$   
 $\Phi^{06} = mw = w \varepsilon r$ ;  $L^{06} = J_1\varepsilon$ ;  $\delta s = r\delta\varphi$ ;  
 $F r \delta\varphi - m \varepsilon r \cdot r\delta\varphi - J_1\varepsilon\delta\varphi = 0$ ;  
 $\varepsilon = F r / (mr^2 + J_1)$ .  
 $t = 1 \text{ წმ მოძებნეჭმო } \varepsilon = 9t^2/r / (mr^2 + J_1) = 1.5 \text{ წმ}^{-2}$ .



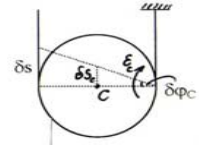
11.8.  $L_1\delta\varphi_1 - L_1^{06}\delta\varphi_1 - L_2\delta\varphi_2 - L_2^{06}\delta\varphi_2 = 0$ .  $r\delta\varphi_1 = R\delta\varphi_2$ ;  
 $L_1^{06} = J_1\varepsilon_1 = m_1 r^2\varepsilon_1/2$ ;  $L_2^{06} = J_2\varepsilon_2 = m_2 R^2\varepsilon_2/2$ ;  
 $\varepsilon_1 r = \varepsilon_2 R$ ;  
 $L_1\delta\varphi_1 - m_1 r^2\varepsilon_1\delta\varphi_1/2 - L_2 r\delta\varphi_1/R - m_2 r^2\varepsilon_1\delta\varphi_1/2 = 0$ .  
 $2L_1\delta\varphi_1 - m_1 r^2\varepsilon_1 - 2L_2 r / R - m_2 r^2\varepsilon_1 = 0$ ;  
 $\varepsilon_1 = (2L_1R - 2L_2 r) / (m_1 + m_2)Rr^2$ ;  
 $\varepsilon_1 = 15L_1/8r^2(m_1 + m_2)$ .



11.9.  $P_1 \text{Sin} \alpha \delta s - F_b \delta s - \Phi_1^{06}\delta s - L^{06}\delta\varphi - P_2\delta s_C - m_2 w_C \delta s_C - J_C \varepsilon_C \delta\varphi_C - P_3\delta s_3 + \Phi_3^{06}\delta s_3 = 0$ .  
 $P_1 = m_1 g$ ;  $\Phi_1^{06} = m_1 w$ ;  
 $F_b = P_1 \text{Cos} \alpha \cdot f = m_1 f g \text{Cos} \alpha$ ;  
 $L^{06} = m_2 r^2 \varepsilon_0 / 2$ ;  
 $P_2 = m_2 g$ ;  $J_C = m_2 r^2$ ;  $P_3 = m_3 g$ ;

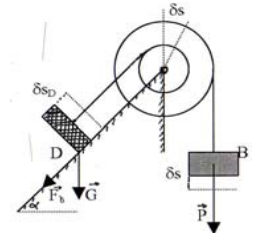


$\Phi_3^{06} = m_3 w$ ;  $w = r \varepsilon_0$ ;  $\varepsilon_0 = w/r$ ;  
 $\delta s = r \delta\varphi$ ;  $\delta s_C = \delta s / 2$ ;  $\delta s_3 = \delta s_C$ ;  
 $w_3 = w_C = w/2$ ;  $\varepsilon_C = w_C/r = w/2r$ ;  
 $\delta s_C = r \delta\varphi_C$ ;  $\delta\varphi_C = \delta s_C/r = \delta s/2r$ ;  
 $m_1 g \text{Sin} \alpha \delta s - m_1 f g \text{Cos} \alpha \delta s - m_1 w \delta s - m_2 w \delta s/2 - m_2 g \delta s/2 - m_2 w \delta s/4 - m_2 w \delta s/8 - m_3 g \delta s/2 + m_3 w \delta s/4 = 0$ .  
 $(m_1 + m_2/2 + m_3/4 + m_2/8 + m_3/4)w = m_1 g (\text{Sin} \alpha - f \text{Cos} \alpha) - m_2 g/2 - m_3 g/2$ .  
 $w = 4g[m_1(\text{Sin} \alpha - f \text{Cos} \alpha) - m_2 - m_3] / (8m_1 + 7m_2 + 2m_3)$ .



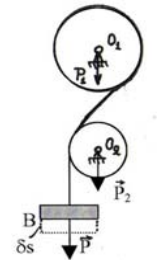
### §12. განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული კალა

12.4. განზოგადებული კოორდინატი:  $q_1 = s$ ;  
 განზოგადებული ძალა - Q.  $\delta A = Q_s \delta s$ ; (\*)  
 $\delta A = P \delta s - G \text{Sin} \alpha \delta s_D - F_b \delta s_D$ ;  
 $F_b = f G \text{Cos} \alpha$ ;  $\delta s = R \delta\varphi$ ;  $\delta s_D = r \delta\varphi/R$ ;  
 $\delta A = P \delta s - G (\text{Sin} \alpha + f \text{Cos} \alpha) r \delta s / R$ ;  
 (\*) ტოლობის თანხმად:  
 $P \delta s - G (\text{Sin} \alpha + f \text{Cos} \alpha) r \delta s / R = Q_s \delta s$ ;  
 $Q = P - G r (\text{Sin} \alpha + f \text{Cos} \alpha) / R \cdot 6$ .

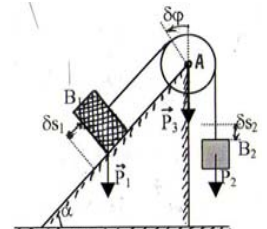
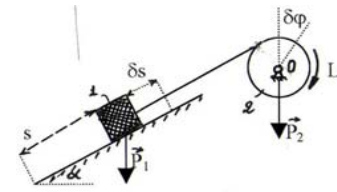


### §13. ლაგრანჟის II გეოლოგები

13.5.  $q_1 = s$  (B ტვირთის გაადაგილება);  $\delta A = Q_s \delta s$ ;  $\delta A = P \delta s$ ;  
 $Q_s = P \cdot d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt - \partial T / \partial s = Q_s$ . (1)  $T = T_1 + T_2 + T_3$ ;  
 $T_1 = m_1 \dot{s}^2 / 4$ ;  $T_2 = m_2 \dot{s}^2 / 4$ ;  $T_3 = m_3 \dot{s}^2 / 2$ ;  
 $T = (m_1 + m_2 + 2m) \dot{s}^2 / 4 = (P_1 + P_2 + 2P) \dot{s}^2 / 4g$ ;  
 $\partial T / \partial s = 0$ ;  $\partial T / \partial \dot{s} = (P_1 + P_2 + 2P) / 2g \cdot \dot{s}$   
 $d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = (P_1 + P_2 + 2P) / 2g \cdot \ddot{s}$ .  $(P_1 + P_2 + 2P) / 2g \cdot \ddot{s} = P$ ;  
 $w = \ddot{s} = 2Pg / (P_1 + P_2 + 2P)$ .



13.6.  $q_1 = s$ ;  $d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt - \partial T / \partial s = Q_s$ . (1)  
 $\delta A = Q_s \delta s$ ;  $\delta A = -P_1 \text{Sin} \alpha \delta s + L$   
 $\delta\varphi = \delta s / r$ ;  $Q_s = -P_1 \text{Sin} \alpha + L/r$ ;  
 $T = 35 \dot{s}^2$ ;  $\partial T / \partial s = 0$ ;  
 $\partial T / \partial \dot{s} = 70 \dot{s}$ ;  
 $d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = 70 \ddot{s}$ ;  
 $w_1 = \ddot{s} = (L/r - mg \text{Sin} \alpha) / 70$ ;  
 $w_1 = 0.47$ .



13.7.  $q_1 = \varphi; \quad d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt - \partial T / \partial \varphi = Q_\varphi.$

$\delta A = Q_\varphi \delta \varphi; \quad \delta s_1 = \delta s_2 = r \delta \varphi.$   
 $\delta A = P_1 \text{Sin} \alpha \delta s_1 - P_2 \delta s_2 = P_1 r \text{Sin} \alpha \delta \varphi - P_2 r \delta \varphi;$

$Q_\varphi = -r g (m_1 \text{Sin} \alpha - m_2).$   
 $T = T_1 + T_2 + T_3; \quad T_1 = m_1 v_1^2 / 2$

$T_2 = m_2 v_2^2 / 2; \quad T_3 = J_0 \omega^2 / 2 = m_3 r^2 \dot{\varphi}^2 / 2;$

$v_1 = v_2 = r \omega = r \dot{\varphi}; \quad T = (2m_1 + 2m_2 + m_3) r^2 \dot{\varphi}^2 / 4;$

$\partial T / \partial \varphi = 0; \quad \partial T / \partial \dot{\varphi} = (2m_1 + 2m_2 + m_3) r^2 \dot{\varphi} / 2;$

$d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt = (2m_1 + 2m_2 + m_3) r^2 \ddot{\varphi} / 2; \quad (2m_1 + 2m_2 + m_3) r^2 \ddot{\varphi} / 2 = r g (m_1 \text{Sin} \alpha - m_2)$

$\varepsilon = \ddot{\varphi} = 2g (m_1 \text{Sin} \alpha - m_2) / r (2m_1 + 2m_2 + m_3).$

13.8.  $q_1 = \varphi_1; \quad d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_1) / dt - \partial T / \partial \varphi_1 = Q_{\varphi_1}.$

$\delta A = Q_{\varphi_1} \delta \varphi_1; \quad \delta A = L_1 \delta \varphi_1 - L_2 \delta \varphi_2 - L_3 \delta \varphi_3;$

$\delta s_1 = r_1 \delta \varphi_1; \quad \delta s_2 = r_2 \delta \varphi_2; \quad \delta s_3 = r_3 \delta \varphi_3;$   
 $\delta s_1 = \delta s_2 = \delta s_3; \quad \delta \varphi_2 = r_1 \delta \varphi_1 / r_2; \quad \delta \varphi_3 = r_1 \delta \varphi_1 / r_3;$

$\delta A = (L_1 - L_2 r_1 / r_2 - L_3 r_1 / r_3) \delta \varphi_1;$

$Q_{\varphi_1} = L_1 - L_2 r_1 / r_2 - L_3 r_1 / r_3; \quad \dot{\varphi}_2 = r_1 / r_2 \dot{\varphi}_1;$

$T = T_1 + T_2 + T_3; \quad T_1 = J_1 \omega^2 / 2 = m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 / 4;$

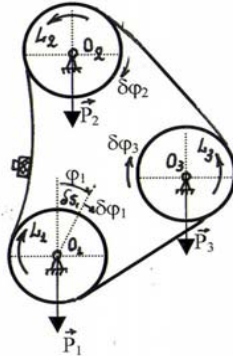
$T_2 = T_3 = m_2 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 / 4; \quad T = (m_1 + 2m_2) r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 / 4;$

$\partial T / \partial \varphi_1 = 0; \quad \partial T / \partial \dot{\varphi}_1 = (m_1 + 2m_2) r_1^2 \dot{\varphi}_1 / 2;$

$d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_1) / dt = (m_1 + 2m_2) r_1^2 \ddot{\varphi}_1 / 2;$

$(m_1 + 2m_2) r_1^2 \ddot{\varphi}_1 / 2 = L_1 - L_2 r_1 / r_2 - L_3 r_1 / r_3$

$\varepsilon = \ddot{\varphi}_1 = 2(L_1 - L_2 r_1 / r_2 - L_3 r_1 / r_3) / (m_1 + 2m_2) r_1^2 = 281.2 \text{ წმ}^2.$



13.9.  $q_1 = \varphi; \quad d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt - \partial T / \partial \varphi = Q_\varphi.$

$\delta A = Q_\varphi \delta \varphi; \quad \delta A = G \text{Sin} \alpha \delta s = P \delta s + L \delta \varphi.$

$\delta s = r \delta \varphi; \quad \delta A = G \text{Sin} \alpha r \delta \varphi = P r \delta \varphi + L \delta \varphi.$

$Q_\varphi = L + r (G \text{Sin} \alpha - P).$

თავალი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

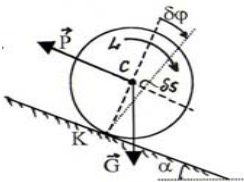
$T = m v_c^2 / 2 + J_c \omega_c^2 / 2; \quad v_c = r \omega_c = r \dot{\varphi}; \quad J_c = m \rho^2;$

$T = m r^2 \dot{\varphi}^2 / 2 + m \rho^2 \dot{\varphi}^2 / 2 = m(r^2 + \rho^2) \dot{\varphi}^2 / 2;$

$\partial T / \partial \varphi = 0; \quad \partial T / \partial \dot{\varphi} = m(r^2 + \rho^2) \dot{\varphi}; \quad d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt = m(r^2 + \rho^2) \ddot{\varphi};$

$m(r^2 + \rho^2) \ddot{\varphi} = L + r (G \text{Sin} \alpha - P);$

$\varepsilon = \ddot{\varphi} = [L + r (G \text{Sin} \alpha - P)] / m(r^2 + \rho^2) = 3.48 \text{ წმ}^2.$

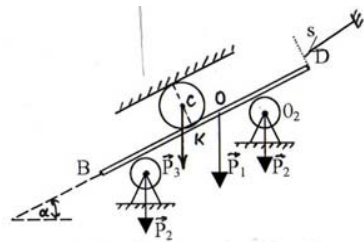


13.10. C ცენტრის აჩქარება  $w_c = \varepsilon r;$

პორიზონტალურ გზაზე მოძრაობისას  $\alpha = 0.$

13.11.  $q_1 = s; \quad d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt - \partial T / \partial s = Q_s. (*)$

$\delta A = Q_s \delta s; \quad \delta A = P_1 \text{Sin} \alpha \delta s + P_3 \text{Sin} \alpha \delta s_c;$



$\delta s_c = \delta s_k / 2 = \delta s / 2; \quad Q_s = (2P_1 + P_3) \text{Sin} \alpha / 2;$   
 $T = T_1 + 2T_2 + T_3;$

$T_1 = P_1 \dot{s}^2 / 2g; \quad T_2 = J_0 \omega_2^2 / 2; \quad \dot{s} = \omega_2 r_2;$

$J_0 = P_2 r_2^2 / 2g; \quad T_2 = P_2 \dot{s}^2 / 4g.$

C დისკო ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:

$T_3 = m_3 v_c^2 / 2 + J_c \omega_c^2 = P_3 (\dot{s} / 2)^2 / 2g + P_3 r_3^2 / 4g \cdot (\dot{s} / 2r_3)^2; \quad T_3 = 3P_3 \dot{s}^2 / 16g.$

$T = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3) \dot{s}^2 / 16g. \quad \partial T / \partial s = 0; \quad \partial T / \partial \dot{s} = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3) \dot{s} / 8g;$

$d(\partial T / \partial \dot{s}) / dt = (8P_1 + 8P_2 + 3P_3) \ddot{s} / 8g;$

(\*)-დან:  $(8P_1 + 8P_2 + 3P_3) \ddot{s} / 8g = (2P_1 + P_3) \text{Sin} \alpha / 2;$

$w_K = \ddot{s} = 4g (2P_1 + P_3) \text{Sin} \alpha / (8P_1 + 8P_2 + 3P_3);$

$w_C = w_K / 2; \quad (w_D = w_B = w_K = 2w_C).$

13.12.  $q_1 = \varphi; \quad d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt - \partial T / \partial \varphi = Q_\varphi. (*)$

$\delta A = Q_\varphi \delta \varphi; \quad \delta A = P \Omega \delta x - L \delta \varphi;$

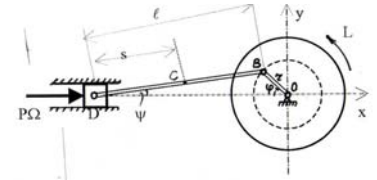
$x = x_B = -r \text{Cos} \varphi; \quad \delta x = r \text{Sin} \varphi \delta \varphi;$

$\delta A = (P \Omega r \text{Sin} \varphi - L) \delta \varphi.$

$Q_\varphi = P \Omega r \text{Sin} \varphi - L.$

$v_A = \dot{x} = r \text{Sin} \varphi \dot{\varphi};$

$T = T_A + T_{AB} + T_{OB}. \quad T_A = m_A v_A^2 / 2 = m_1 r^2 \text{Sin}^2 \varphi \dot{\varphi}^2 / 2; \quad T_{OB} = J_3 \omega_0^2 / 2 = J_3 \dot{\varphi}^2 / 2$



AB ბარბაცა ასრულებს 113 პრაობას. მივიღოთ პოლუსად ღეროს A ბოლო. პოლუსის გარშემო ასრულებს კუთხეა  $\psi.$  ამიტომ:  $T_{AB} = m_2 v_A^2 / 2 + J_A \dot{\psi}^2 / 2.$  აქ  $J_A = J_C + m_2 AC^2 = J_2 + m_2 s^2. \Delta AOB$ -ში  $\ell / \text{Sin} \varphi = r / \text{Sin} \psi;$

პირობის თანახმად:  $\text{Sin} \psi \sim \psi; \quad \text{ამიტომ } \psi = r / \ell \cdot \text{Sin} \varphi; \quad \dot{\psi} = r / \ell \cdot \text{Cos} \varphi \dot{\varphi};$

გვეყვება:  $T_{AB} = m_2 r^2 \text{Sin}^2 \varphi \dot{\varphi}^2 / 2 + (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Cos}^2 \varphi / \ell^2 \dot{\varphi}^2;$

მთლიანი სისტემისათვის  $T = [(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin}^2 \varphi + (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Cos}^2 \varphi / \ell^2 + J_3] \dot{\varphi}^2 / 2.$

$\partial T / \partial \varphi = [(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin} 2\varphi - (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Sin} 2\varphi / \ell^2] \dot{\varphi}^2 / 2;$

$\partial T / \partial \dot{\varphi} = [(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin}^2 \varphi + (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Cos}^2 \varphi / \ell^2 + J_3] \dot{\varphi};$

$d(\partial T / \partial \dot{\varphi}) / dt = [(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin}^2 \varphi + (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Cos}^2 \varphi / \ell^2 + J_3] \ddot{\varphi} +$

$+ [(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin} 2\varphi - (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Sin} 2\varphi / \ell^2] \dot{\varphi}^2.$

შევიტანოთ მიღებული მნიშვნელობანი ლაგრანჟის II გვარის (\*) განტოლებაში:

$[(m_1 + m_2) r^2 \text{Sin}^2 \varphi + (J_2 + m_2 s^2) r^2 \text{Cos}^2 \varphi / \ell^2 + J_3] \ddot{\varphi} +$

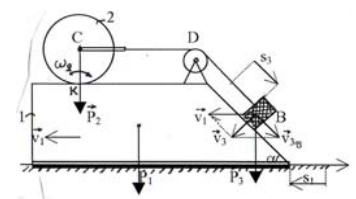
$+ [(m_1 + m_2) - (J_2 + m_2 s^2) / \ell^2] r^2 \text{Sin} 2\varphi \dot{\varphi}^2 / 2 = P \Omega r \text{Sin} \varphi - L.$

ეს არის მოცემული მექანიზმის მოძრაობის განტოლება.

13.13. სისტემას აქვს ორი თავისუფლების ხარისხი:  $q_1 = s_1; \quad q_2 = s_3.$

ლაგრანჟის განტოლებები იქნება:

$d(\partial T / \partial \dot{s}_j) / dt - \partial T / \partial s_j = Q_{s_j}. \quad (j = 1; 3) \quad (*)$



ა)  $q_1 = s_1; q_2 = s_3 = \text{const};$   
 $\delta A_1 = Q_{s1} \delta s_1; \delta A_1 = 0; Q_{s1} = 0.$   
 ბ)  $q_1 = s_1 = \text{const}; q_2 = s_3; \delta A_3 = Q_{s3} \delta s_3;$   
 $\delta A_3 = P_3 \text{Sin} \alpha \delta s_3;$   
 $Q_{s3} = P_3 \text{Sin} \alpha = m_3 g \text{Sin} \alpha = 2\sqrt{3} g.$

$T = T_1 + T_2 + T_3. v_1 = \dot{S}; T_1 = m_1 \dot{S}^2 / 2;$   
 ცილინდრი ასრულებს ბრტყელ მოძრაობას:  $T_2 = m_2 v_C^2 / 2 + J_C \omega^2 / 2.$

$\vec{V}_C$  - ცილინდრის C ცენტრის აბსოლუტური სიჩქარეა.

C წერტილის ფარდობითი სიჩქარე:  $v_{C\varphi} = v_{3\varphi} = \dot{S}_3.$

$\vec{V}_C \parallel \vec{V}_1$ , ამიტომ,  $\vec{V}_C = \vec{V}_1 + \vec{v}_{C\varphi}$ , ანუ  $\vec{V}_C = \dot{S}_1 + \dot{S}_3$ ; ამასთანავე:

$v_{C\varphi} = \omega_2 r; \omega_2 = \dot{S}_3 / r_2 (r_2 = KC). გვეყენება: T_2 = m_2 (\dot{S}_1 + \dot{S}_3)^2 / 2 + m_2 r_2^2 (\dot{S}_3 / r_2)^2 / 4 =$   
 $= m_2 (\dot{S}_1^2 + 2 \dot{S}_1 \dot{S}_3 \text{Cos} \alpha + \dot{S}_3^2) / 2 + m_2 \dot{S}_3^2 / 4 = 0,15 m_1 (2 \dot{S}_1^2 + 4 \dot{S}_1 \dot{S}_3 + 3 \dot{S}_3^2).$

მე-3 სხეული ასრულებს როტულ გადატანით მოძრაობას:

$\vec{V}_3 = \vec{V}_1 + \vec{v}_{3\varphi} = \dot{S}_1 + \dot{S}_3;$

ამიტომ:  $T_3 = m_3 v_3^2 / 2$ , ანუ  $T_3 = 0,2 m_1 (\dot{S}_1^2 + 2 \dot{S}_1 \dot{S}_3 \text{Cos} \alpha + \dot{S}_3^2).$  მთელი

სისტემისათვის:  $T = m_1 (\dot{S}_1^2 + 0,5 \dot{S}_1 \dot{S}_3 + 0,65 \dot{S}_3^2).$

ვინაიდან:  $\partial T / \partial s_1 = 0; \partial T / \partial \dot{S}_1 = 2 m_1 (\dot{S}_1 + 0,25 \dot{S}_3); d(\partial T / \partial \dot{S}_1) / dt = 2 m_1 (\ddot{S}_1 + 0,25 \ddot{S}_3);$

$\partial T / \partial s_3 = 0; \partial T / \partial \dot{S}_3 = m_1 (0,5 \dot{S}_1 + 1,3 \dot{S}_3); d(\partial T / \partial \dot{S}_3) / dt = m_1 (0,5 \ddot{S}_1 + 1,3 \ddot{S}_3);$

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$2 m_1 (\ddot{S}_1 + 0,25 \ddot{S}_3) = 0; \text{ ანუ } \ddot{S}_1 + 0,25 \ddot{S}_3 = 0;$

$m_1 (0,5 \ddot{S}_1 + 1,3 \ddot{S}_3) = 2\sqrt{3} g; \ddot{S}_1 + 2,6 \ddot{S}_3 = 6,79.$

აქედან:  $\underline{w_1} = \ddot{S}_1 = -0,722 \text{ მ/წმ}^2; \underline{w_3} = \ddot{S}_3 = 2,89 \text{ მ/წმ}^2.$

13.14. სისტემას გააჩნია ორი თავისუფლების ხარისხი:  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2;$   
 $\varphi_1$  - I კბილანას, ხოლო  $\varphi_2$  - II ჩარჩოს შემობრუნების კუთხეები.

$d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_j) / dt - \partial T / \partial \varphi_j = Q_j. (j=1,2) (*)$

$\delta A_1 = Q_1 \delta \varphi_1; \delta A_1 = L_1 \delta \varphi_1; Q_1 = L_1;$

$\delta A_2 = Q_2 \delta \varphi_2; \delta A_2 = L_2 \delta \varphi_2; Q_2 = L_2.$

$T = T_1 + T_3 + T_4.$

A და B კბილანები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას.

$v_A = 0A \cdot \omega_2 = (R - r) \dot{\varphi}_2 = 2r \dot{\varphi}_2;$

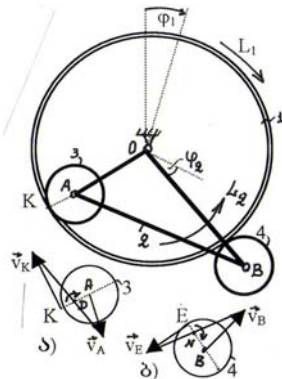
$v_K = v_E = 0K \cdot \omega_1 = R \dot{\varphi}_1 = 3r \dot{\varphi}_1;$

$v_B = 0B \cdot \omega_2 = (R + r) \dot{\varphi}_2 = 4r \dot{\varphi}_2;$

ა)  $\omega_3 = \omega_D = v_A / AD = v_K / KD;$

$\omega_3 = (v_A + v_K) / (AD + KD) =$

$= (2r \dot{\varphi}_2 + 3r \dot{\varphi}_1) / r = 3 \dot{\varphi}_1 + 2 \dot{\varphi}_2;$



ბ)  $\omega_4 = \omega_n = v_B / BN = v_E / EN;$   
 $\omega_4 = (v_B + v_E) / (BN + EN) =$

$= (4r \dot{\varphi}_2 + 3r \dot{\varphi}_1) / r = 3 \dot{\varphi}_1 + 4 \dot{\varphi}_2. T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2 = m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2 / 2 = 9 m r^2 \dot{\varphi}_1^2;$

$T_3 = m_3 v_A^2 / 2 + J_A \omega_3^2 / 2 = m (2r \dot{\varphi}_1)^2 / 2 + m r^2 (3 \dot{\varphi}_1 + 2 \dot{\varphi}_2)^2 / 4 =$   
 $= (9 \dot{\varphi}_1^2 / 4 + 3 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 3 \dot{\varphi}_2^2) m r^2.$

$T_4 = m_4 v_B^2 / 2 + J_B \omega_4^2 / 2 = m (4r \dot{\varphi}_2)^2 / 2 + m r^2 (3 \dot{\varphi}_1 + 4 \dot{\varphi}_2)^2 / 4 =$   
 $= (9 \dot{\varphi}_1^2 / 4 + 6 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 12 \dot{\varphi}_2^2) m r^2.$

მთელი სისტემისათვის:  $T = (27 \dot{\varphi}_1^2 / 2 + 9 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + 15 \dot{\varphi}_2^2) m r^2.$

$\partial T / \partial \varphi_1 = 0; \partial T / \partial \dot{\varphi}_1 = m r^2 (27 \dot{\varphi}_1 + 9 \dot{\varphi}_2); d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_1) / dt = m r^2 (27 \ddot{\varphi}_1 + 9 \ddot{\varphi}_2);$

$\partial T / \partial \varphi_2 = 0; \partial T / \partial \dot{\varphi}_2 = m r^2 (9 \dot{\varphi}_1 + 30 \dot{\varphi}_2); d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_2) / dt = m r^2 (9 \ddot{\varphi}_1 + 30 \ddot{\varphi}_2);$

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$m r^2 (27 \ddot{\varphi}_1 + 9 \ddot{\varphi}_2) = L_1; \text{ ანუ } 27 \ddot{\varphi}_1 + 9 \ddot{\varphi}_2 = L_1 / m r^2;$

$m r^2 (9 \ddot{\varphi}_1 + 30 \ddot{\varphi}_2) = L_2; 9 \ddot{\varphi}_1 + 30 \ddot{\varphi}_2 = L_2 / m r^2.$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:  $\ddot{\varphi}_1 = (10 L_1 - 3 L_2) / 243 m r^2;$

ვინტეგრირებთ ეს ტოლობა; მივიღებთ:  $\underline{w_1} = \dot{\varphi}_1 = [(10 L_1 - 3 L_2) / 243 m r^2] t. (C_1 = 0).$

13.15. სისტემას გააჩნია ორი თავისუფლების ხარისხი:  $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2;$   
 $\varphi_1$  - I კბილანას, ხოლო  $\varphi_2$  - II კბილანის შემობრუნების კუთხეები.

$d(\partial T / \partial \dot{\varphi}_j) / dt - \partial T / \partial \varphi_j = Q_j. (j=1,2) (*)$

$\delta A_1 = Q_1 \delta \varphi_1; \delta A_1 = L_1 \delta \varphi_1; Q_1 = L_1; \delta A_2 = Q_2 \delta \varphi_2; \delta A_2 = L_2 \delta \varphi_2; Q_2 = L_2.$

მე-3 კბილანები ასრულებენ ბრტყელ მოძრაობას.

$v_B = \omega_1 r_1 = r_1 \dot{\varphi}_1;$

$v_D = \omega_2 r_2 = r_2 \dot{\varphi}_2.$

ა) ნახაზიდან:

$\omega_K = v_B / BK = v_D / KD;$

$\omega_K = (v_B + v_D) / (BK + KD) =$   
 $= (r_1 \dot{\varphi}_1 + r_2 \dot{\varphi}_2) / 2 r_3.$

$v_3 = (v_D - v_B) / 2 =$

$= (r_2 \dot{\varphi}_2 - r_1 \dot{\varphi}_1) / 2;$

სისტემისათვის:

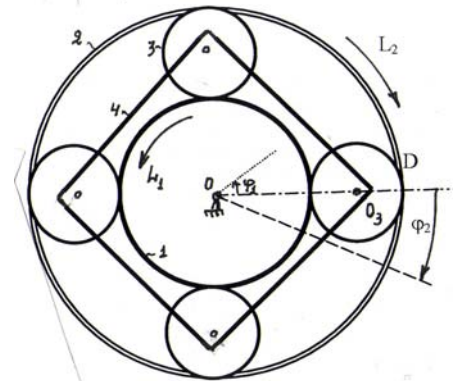
$T = T_1 + T_2 + 4 T_3.$

$T_1 = J_1 \omega_1^2 / 2 = m_1 r_1^2 \dot{\varphi}_1^2 / 4;$

$T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2 = m_2 r_2^2 \dot{\varphi}_2^2 / 4$

$T_3 = m_3 v_3^2 / 2 + J_3 \omega_K^2 = m_3 (r_2 \dot{\varphi}_2 - r_1 \dot{\varphi}_1)^2 / 8 + m_3 (r_2 \dot{\varphi}_2 + r_1 \dot{\varphi}_1)^2 / 16;$

მთელი სისტემისათვის:



$$T = (7r_1^2 \dot{\phi}_1^2 / 16 - r_1 r_2 \dot{\phi}_1 + \dot{\phi}_2^2 / 8 + 11r_2^2 \dot{\phi}_2^2) m_1;$$

$$\partial T / \partial \phi_1 = 0; \quad d(\partial T / \partial \dot{\phi}_1) / dt = m_1 r_1 (7r_1 \ddot{\phi}_1 - r_2 \ddot{\phi}_2) / 8;$$

$$\partial T / \partial \phi_2 = 0; \quad d(\partial T / \partial \dot{\phi}_2) / dt = m_1 r_2 (11r_2 \ddot{\phi}_2 - r_1 \ddot{\phi}_1) / 8;$$

ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები მიიღებენ შემდეგ სახეს:

$$m_1 r_1 (7r_1 \ddot{\phi}_1 - r_2 \ddot{\phi}_2) = 8 L_1; \quad m_1 r_2 (-r_1 \ddot{\phi}_1 + 11 r_2 \ddot{\phi}_2) = 8 L_2.$$

ამ სისტემის ამოხსნა გვაძლევს:  $\ddot{\phi}_1 \equiv 2 (11 L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2$

$r_2$ ;

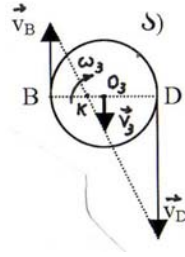
$$\ddot{\phi}_2 \equiv 2 (L_1 r_2 + 7 L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2;$$

ვინტეგრირით ეს ტოლობები; საწყისი პირობების გათვალისწინებით ( $t_0 = 0, \phi_1 = 0,$

$\phi_2 = 0, \dot{\phi}_1 = 0, \dot{\phi}_2 = 0$ ) მივიღებთ:

$$\omega_1 = \dot{\phi}_1 = [2 (11 L_1 r_2 + L_2 r_1) / 19 m_1 r_1^2 r_2] t;$$

$$\omega_2 = \dot{\phi}_2 = [2 (L_1 r_2 + 7 L_2 r_1) / 19 m_2 r_1 r_2^2] t.$$



## 14. ღარი 116

14.1.  $k = 0; m_1 = m_2; v = 6\delta / \sqrt{\delta}; v_1 = 0; u_1 = u_2 = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2) = 3\delta / \sqrt{\delta}.$

14.2.  $k = 0; P_1 = 12; v_1 = 2; P_2 = 14; v_2 = 0;$   
 $u = m_1 v_1 / (m_1 + m_2) = 0,92 \delta / \sqrt{\delta}; s = m_1 m_2 (v_1 - v_2) / (m_1 + m_2) = 12,92.$

14.3.  $k = 0; v_1 = 10; v_2 = -4; P_2 = 10; u = 0; (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2) = 0;$   
 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0; P_1 v_1 + P_2 v_2 = 0; P_1 = P_2 v_2 / v_1 = 4.$

14.4.  $P_1 = 200; P_2 = 100; v_2 = 0; u = 6;$   
 $u = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2);$   
 $v_1 = (m_1 + m_2) u / m_1 = (P_1 + P_2) u / P_1 = 9.$

კუტი ვარდება h სიმაღლიდან  $v_0 = 0$  საწყისი სიჩქარით. მაშინ  $v^2 = 2gh; h = v^2 / 2g = 4,128 \text{ მ}.$

14.5.  $v_1 = 4; v_2 = 2; k = 0,8; m_1 = m_2 = m.$

**მითითება:** ვთქვათ ბურთულების ცენტრებზე გამავალი ღერძი არის n. მაშინ, დარტყმის ბოლოს ბურთულების სიჩქარეების გვემძლეები ამ ღერძზე შესაბამისად იქნებიან:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}),$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}),$$

სადაც  $u_n = (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}) / (m_1 + m_2)$  არის არადრეკადი დარტყმის დროს სხეულების საერთო სიჩქარე.

ჩვენ შემთხვევაში:

$$u_n = (m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}) / (m_1 + m_2) = (v_1 + v_2) / 2 = 3.$$

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}) = 3 + 0,8(3 - 4) = 2,2;$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = 3 + 0,8(3 - 2) = 3,8.$$

14.6.  $v_1 = 4; v_2 = -2; k = 0,8; u_n = 1; u_1 = -1,4; u_2 = 3,4.$

14.7. ნივთიერი წერტილის დარტყმა უძრავ გლუვ ზედაპირზე.

$$v_n = v \cos \alpha = 7,2746; u_n = -k v_n = -2,42;$$

$$u_t = v_t = v \sin \alpha = 4,2;$$

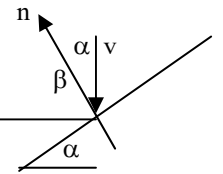
$$u = \sqrt{u_n^2 + u_t^2} = 4,847.$$

$$k = \tan \alpha / \tan \beta; \tan \beta = \tan \alpha / k = \sqrt{3}. \quad \beta = 60^\circ.$$

u მიმართულია ჰორიზონტალურად.

დარტყმის იმპულსი:

$$s = m(1+k) v_n = 19,7948 \text{ ნწმ}.$$



14.8. ალგენის კოეფიციენტი  $\chi / \tan \beta = \sqrt{3} / 3 = 0,577.$

დარტყმის კუთხე  $0_1$

წერტილში იგივეა,

რაც არეკვლის კუთხე

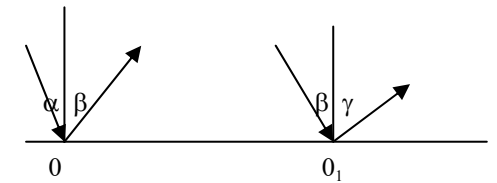
$0$  წერტილში. ამიტომ

$0_1$  წერტილში:

$$k = \tan \beta / \tan \gamma.$$

$$\tan \gamma = \tan \beta / k = \sqrt{3}. \quad \gamma = 60^\circ.$$

117



14.9. დარტყმა პირდაპირია ( $\alpha = 0$ ).  $u = kv.$

დარტყმის შემდეგ OB გზაზე:

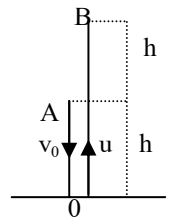
$$m u_B^2 / 2 - m u^2 / 2 = -2mgh;$$

$$u_B = 0; u = \sqrt{4gh} = 2\sqrt{gh}; k = 0,5; v = 4\sqrt{gh}.$$

დარტყმამდე A0 გზაზე:

$$m v^2 / 2 - m v_0^2 / 2 = mgh;$$

$$16gh / 2 - v_0^2 / 2 = gh; \quad v_0 = \sqrt{14gh}.$$



14.10. კუტის წონა  $P_1 = 2$  კნ. ხიმინჯის წონა  $P_2 = 1$  კნ.

$$H = 1,225 \text{ მ}. v_2 = 0; v_1 = \sqrt{2gH} = 4,903.$$

დარტყმა არადრეკადია:

$$u = (m_1 v_1 + m_2 v_2) / (m_1 + m_2) = (P_1 v_1 + P_2 v_2) / (P_1 + P_2) = 3,27 .$$

კუტი და ხიმინჯი ერთად მოძრაობენ u სიჩქარით. კინეტიკური ენერგია ისარჯება  $F = 23$  კნ წინალობის გადალახვაზე:

$$mu^2 / 2 = Fh .$$

$$h = (m_1 + m_2) u^2 / 2F = (P_1 + P_2) u^2 / 2gF = 0,071 \text{ მ} = 7,1 \text{ სმ}$$

14.11. უძრავ სხეულზე ( $v_2=0$ ) არადრეკადი დარტყმისას კუტის მიერ დაკარგული კინეტიკური ენერგია:

$$\Delta T = T_0 - T_1 = m_1 v_1^2 / 2 - (m_1 + m_2) u^2 / 2 = 816,7 \text{ მმ} .$$

### ლიტერატურა

1. ა . გორგიძე – თეორიული მექანიკის კურსი (დინამიკა)
2. ნ . მახვილძე – თეორიული მექანიკის კურსი (დინამიკა)
- 3.
- 4.
- 5.

### შინაარსი

§ 1. დინამიკის ორი ძირითადი ამოცანა -----	3	(96)
§ 2. წერტილის ჰარმონიული რხევა -----	14	(99)
§ 3. წერტილის მილევადი რხევა -----	18	(99)
§ 4. წერტილის იძულებითი რხევა -----	24	(100)
§ 5. მასების ცენტრი. მყარი სხეულის ინერციის მომენტი -----	29	(101)
§ 6. მასების ცენტრის მოძრაობა -----	35	(102)
§ 7. მოძრაობის რაოდენობის ცვლილების თეორემა ---	40	(103)
§ 8. მოძრაობის რაოდენობის მომენტის ცვლილების თეორემა -----	46	(104)
§ 9. კინეტიკური ენერგიის ცვლილების თეორემა ----	51	(106)
§10. შესაძლო გადაადგილებათა პრინციპი -----	61	(109)
§11. დინამიკის ზოგადი განტოლება -----	69	(110)
§12. განზოგადებული კოორდინატები. განზოგადებული ძალა -----	75	(111)
§13. ლაგრანჟის II გვარის განტოლებები -----	80	(112)
§14. დარტყმა-----	92	(117)

ლიტერატურა -----



