საქართველოს ტექნიკური
უნივერსიტეტი

გიორგი გოგიჩაიშვილი, გურამ ჩაჩანიძე,

ქეთევან ნანობაშვილი

ავტომატიზებული მართვის მოდელები

ლოგიკური და გრაფული მოდელები

თბილისი
2005

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

გიორგი გოგიჩაიშვილი, გურამ ჩაჩანიძე,
ქეთევან ნანობაშვილი

ავტომატიზებული მართვის მოდელები

ლოგიკური და გრაფული მოდელები

დამტკიცებულია სტუ-ს სასწავლო-მეთოდური
საბჭოს მიერ

თბილისი 2005

წიგნი რეკომენდებულია სახელმძღვანელოდ მართვის ავტომატიზებული სისტემების სპეციალობის სტუდენტების, მაგისტრანტებისა და დოქტორანტებისათვის

Г. Гогичаишвили, Г. Чачанидзе, К. Нанобашвили

МОДЕЛИ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ
Логические и графовые модели

რეცეზენტი

დოცენტი თამაზ შეროზია

რედაქტორი

იზა სემიკინა

Email: intelecti@Posta.ge

გამომცემლობა — საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

შ ი ნ ა ა რ ს ი

I თავი

II თავი

III თავი
გრაფთა თეორიის ელემენტები

IV თავი
ლოგიკური ქსელები და სასრული ავტომატები

ადამიანს პრაქტიკულ მოღვაწეობაში საქმე აქვს არა მარტო უწყვეტ, არამედ დისკრეტულ პროცესებთანაც. მაგალითად, ჩარხების, ავტომობილების ტელევიზორების, კომპიუტერების და ა.შ. წარმოება მართვის ავტომატიზებულ სისტემებში ინფორმაციის დამუშავების და მართვის პროცესები ასევე ატარებენ დისკრეტულ ხასიათს. ასეთნაირი სისტემების დანერგვა მოითხოვს სპეციალურ მათემატიკურ მეთოდებს, რომელთა საფუძველზე აიგება ინფორმაციის დამუშავების და მართვის მოდელები.

ამ მეთოდებისათვის დამახასიათებელია ის რომ მათ არ გააჩნიათ მათემატიკური ანალიზის ასეთი ფუნდამენტური ცნებები, როგორიც არის უწყვეტობა, გადასვლა ზღვარზე, დიფერენცირება, ამავე დროს ეს მეთოდები წარმატებით აანალიზებენ ისეთ ობიექტებს და მათ შორის არსებულ დამოკიდებულებებს, რომლებსაც არა აქვთ რიცხობრივი (რაოდენობრივი) წარმოდგენა. სწორედ ასეთი სახის მოდელებს მიეკუთვნება ლოგიკური და გრაფული მოდელები. ამჟამად ლოგიკური და გრაფული მოდელები ფართოდ გამოიყენება მართვის ავტომატიზებული სისტემების ინფორმაციული, ალგორითმული და მათემატიკური უზრუნველყოფის და ფუნქციური ქვესისტემების დაპროექტების დროს. ამ სახის მოდელები ფართოდ იყენებენ სიმრავლეთა თეორიის ძირითად ცნებებს და განსაზღვრებებს. ამიტომაც წიგნში გარკვეული ნაწილი ეძღვნება სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებს.

I თავი

სიმრავლეთა თეორიის ძირითადი ცნებები

1.1. სიმრავლე. სიმრავლის მოცემის ხერხები

სამყაროში არსებობს არა მარტო ცალკეული ობიექტები ან საგნები, არამედ მათი ერთობლიობაც. მაგალითად, სახლების, სტუდენტთა, ფრინველთა, ცხოველთა ერთობლიობა და ა. შ. შეიძლება აგრეთვე წარმოვიდგინოთ აბსტრაქტული ერთობლიობაც, მაგალითად, წერტილთა, სიბრტყეთა, სივრცეთა ერთობლიობა და ა. შ. საგანთა ყველა ჩამოთვლილი ერთობლიობა ანუ ნაკრები წარმოადგენს სიმრავლეს.

სიმრავლის განსაზღვრა ცალსახად შეუძლებელია. სიმრავლეთა თეორიის ფუძემდებელმა გერმანელმა მათემატიკოსმა კანტორმა მოგვცა სიმრავლის განსაზღვრის შემდეგი წესი: ***სიმრავლე წარმოადგენს ერთმანეთისაგან განსხვავებულ განსაზღვრულ საგანთა ერთობლიობას (ნაკრებს), რომელიც ჩვენს ინტუიციაში აღიქმება, როგორც ერთიანი მთლიანი.*** ასე რომ, სიმრავლე არის პირველადი ცნება და იგი არ განისაზღვრება სხვა რომელიმე ცნებიდან გამომდინარე.

სიმრავლე იყოფა ორ კლასად: სასრული და უსასრულო სიმრავლე. სასრული არის ისეთი სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ელემენტთა სასრულ რიცხვს. ამავე დროს, მნიშვნელობა არა აქვს არის თუ არა ცნობილი ეს რიცხვი. მთავარია ის, რომ ეს რიცხვი არსებობს. სიმრავლე წარმოადგენს უსასრულოს, თუ იგი არ არის სასრული, ანუ ასეთი რიცხვი არ არსებობს. უსასრულო სიმრავლისათვის ელემენტთა რიცხვის ცნებას აზრი არა აქვს. ამ შემთხვევაში, მის მაგივრად შემოაქვთ სიმძლავრის ცნება. ობიექტებს, რომლებიც ადგენს სიმრავლეს, სიმრავლის ელემენტები ეწოდება. სიმრავლე ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია მისი შემადგენელი ელემენტები.

სიმრავლე შეიძლება მოცემული იყოს მისი ელემენტების უბრალო ჩამოთვლით, მაგალითად: {ა, ბ, გ, ე, კ, თ}.

გარდა ამისა, სიმრავლე ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია რაიმე კანონი, რომლის თანახმადაც შესაძლებელი იქნება სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტის განსაზღვრა. მაგალითად, რიცხვთა სიმრავლე, რომელიც იყოფა სამზე (სამზე იყოფა ის და მხოლოდ ის რიცხვი, რომლის ციფრთა ჯამიც იყოფა სამზე), წრფეთა სიმრავლე, რომელიც განისაზღვრება $y = kx$ განტოლებით და ა. შ.

ჩვეულებრივ, სიმრავლეს აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით: A, B, C, D, . . . , X, Y, Z. მის ელემენტებს კი აღნიშნავენ ამავე ანბანის მცირე (პატარა) ასოებით:

$$\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{d},\ \ldots,\ \boldsymbol{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}.$$

თუ $\boldsymbol{x}$ ელემენტი ეკუთვნის X სიმრავლეს, მას შემდეგნაირად აღნიშნავენ (ჩაწერენ): $x \in X$, სადაც $\in$ არის მიკუთვნების სიმბოლო.

თუ $\boldsymbol{x}$ ელემენტი არ ეკუთვნის X სიმრავლეს, მას აღნიშნავენ (ჩაწერენ) ასე: $x \notin X$ ან $x \overline{\in} X$. თუ X სიმრავლე შეიცავს $\boldsymbol{x}$ ელემენტს, მას ასე აღნიშნავენ: X={ $\boldsymbol{x}$ }. თუ A სიმრავლე შეიცავს $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ ელემენტებს იგი შესაბამისად ასე ჩაიწერება: A={ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ }.

სიმრავლეთა თეორიაში შემოაქვთ ერთელემენტიანი და ცარიელი სიმრავლის ცნება. სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ერთადერთ ელემენტს, წარმოადგენს ერთელემენტიან სიმრავლეს. ცარიელი სიმრავლის არსებობის აქსიომიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს ისეთი სიმრავლე, რომელიც არც ერთ ელემენტს არ შეიცავს. მას ეწოდება ცარიელი. ცარიელ სიმრავლეს აღნიშნავენ $\varnothing$ სიმბოლოთი. არ შეიძლება ცარიელი სიმრავლე აგვერიოს ნულში, რადგან ნული არის ციფრი (ისე, როგორც 1, 2. . . 9).

1.2. ქვესიმრავლე. ჩართვა

ზოგიერთი სიმრავლე წარმოადგენს სხვა უფრო ფართო სიმრავლის ნაწილს ან შედის მასში. მაგალითად, ჯგუფის სტუდენტთა სიმრავლე წარმოადგენს ფაკულტეტის სტუდენტთა

სიმრავლის ნაწილს. ავიღოთ ორი A და B სიმრავლე. თუ A სიმრავლე წარმოადგენს B სიმრავლის ნაწილს, ანუ A სიმრავლის ყოველი ელემენტი ამავე დროს წარმოადგენს B სიმრავლის ელემენტს, მაშინ A-ს უწოდებენ B-ს ქვესიმრავლეს. ეს შემდეგნაირად ჩაიწერება: $A \subset B$, სადაც $\subset$ არის მკაცრი ჩართვის სიმბოლო. $A \subset B$ გამოსახულება წაიკითხება შემდეგნაირად: A არის B-ს ქვესიმრავლე ან A ჩართულია B-ში. ეს გამოსახულება ტოლძალოვანია $B \supset A$ გამოსახულების და ასე წაიკითხება: B მოიცავს A –ს. ხშირად იყენებენ არამკაცრი ჩართვის ნიშანსაც $A \subseteq B$. ამ შემთხვევაში A არა მარტო ჩართულია B-ში (A ქვესიმრავლეა B-სი), არამედ ემთხვევა მას. წაიკითხება ასე: A ქვესიმრავლეა ან ტოლი B-სი. ერთმანეთში არ უნდა ავურიოთ ჩართვის და მიკუთვნების სიმბოლოები. მაგალითად, არ შეიძლება ჩავწეროთ ასე: $A \in B$. ცარიელი სიმრავლე ნებისმიერი სიმრავლის ქვესიმრავლეა $\varnothing \subseteq A$. ასევე მართებულია: $A \subseteq A$. ამ შემთხვევაში $\varnothing$ და თვით A სიმრავლეც წარმოადგენს A-ს არასაკუთრივ ქვესიმრავლეს, ყველა დანარჩენი A სიმრავლის ქვესიმრავლე წარმოადგენს A-ს საკუთარ ქვესიმრავლეს.

სიმრავლეთა თეორიის აქსიომატიკიდან გამომდინარეობს, რომ „არსებობს ერთი სიმრავლე მაინც" (ამას ეწოდება არსებობის აქსიომა).

ნებისმიერი X სიმრავლისათვის არსებობს $P(X)$ სიმრავლის ოჯახი, რომლის ელემენტებს წარმოადგენს X სიმრავლის ყველა შესაძლო ქვესიმრავლე (ამას ხარისხის აქსიომა ჰქვია). ამ შემთხვევაში, თვით X სიმრავლეს ეწოდება უნივერსუმი, ანუ უნივერსალური სიმრავლე. აღვნიშნოთ უნივერსუმი U-თი. დავუშვათ, X სიმრავლეა: X={1,2,3}. ვაწარმოოთ $P(X)$ სიმრავლის ოჯახი, ამისათვის ვისარგებლოთ ჯუფდებადობის კანონით და მიღებულ სიმრავლეს დავამატოთ $\varnothing$-ელემენტი. მივიღებთ:

$$P(X) = \{\{1\};\ \{2\};\ \{3\};\ \{1,2\};\ \{1,3\};\ \{2,3\};\ \{1,\ 2,\ 3,\};\varnothing\}.$$

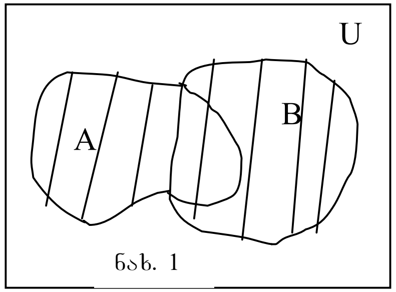
ზოგად შემთხვევაში $P(X)$ სიმრავლის ელემენტთა სიმრავლე განისაზღვრება როგორც $P(X) = 2^{(X)}$, სადაც $|X|$ – X სიმრავლის ელემენთა რაოდენობაა.

ორი A და B სიმრავლე ტოლია ან ემთხვევა ერთმანეთს (A=B), თუ $A \subset B$ და $B \subset A$ (ამას მოცულობის აქსიომა ეწოდება).

ოპერაციები სიმრავლეებზე

1.3. სიმრავლეთა გაერთიანება

ორი A და B სიმრავლის გაერთიანება, ანუ ჯამი ეწოდება ისეთ ახალ სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის A ან B სიმრავლეს (თუნდაც ორივეს ერთდროულად). სიმრავლეთა გაერთიანება შეიძლება წარმოვადგინოთ ეილერ-ვენის დიაგრამით (ნახ.1). დიაგრამაზე უნივერსალური U სიმრავლე მოცემულია მართკუთხედის წერტილთა სიმრავლით, ხოლო მისი A და B ქვესიმრავლეები – წრეწირებით.



ნახ. 1

ორი სიმრავლის გაერთიანება ჩაიწერება ასეთნაირად: $A \bigcup B$, სადაც $\bigcup$ არის გაერთიანების სიმბოლო. თუ გაერთიანების ელემენტი ეკუთვნის ერთდროულად ორივე სიმრავლეს, მაშინ ეს ელემენტი გაერთიანებაში მხოლოდ ერთხელ მონაწილეობს. მაგალითად, A={1, 2, 3}, B={2, 3, 7, 10} $A \bigcup B$={1, 2, 3, 7, 10}.

გაერთიანების ოპერაცია შეიძლება გავავრცელოთ სიმრავლეთა ერთობლიობაზეც. სიმრავლეთა $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ერთობლიობის გაერთიანება ანუ ჯამი ეწოდება ახალ სიმრავლეს, რომლის ნებისმიერი ელემენტი ერთ-ერთ სიმრავლეს ეკუთვნის მაინც მოცემული ერთობლიობიდან. თუ ერთობლიობათა გაერთიანებას ავღნიშნავთ A-თი, მაშინ:

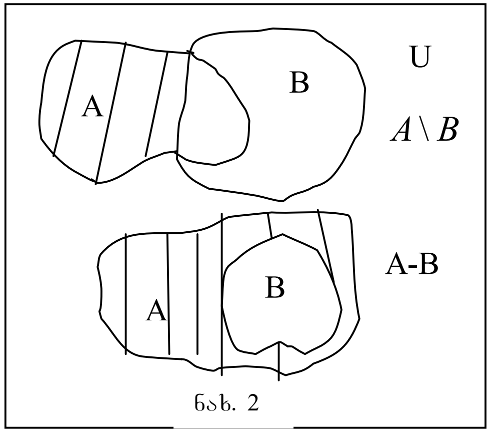
$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n \quad \text{ან} \quad A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i ,$$

თუ სიმრავლეთა ერთობლიობა უსასრულოა, მაშინ:

$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n \bigcup \ldots \quad \text{ან} \quad A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \ .$$

1.4. სიმრავლეთა სხვაობა

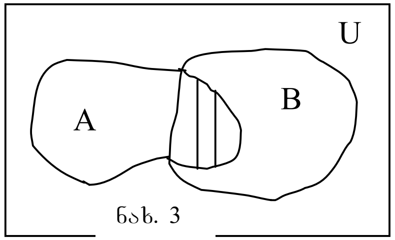
ორი A და B სიმრავლის სხვაობა ეწოდება ისეთ ახალ სიმრავლეს, რომლის შემცველი ელემენტი ეკუთვნის A-ს და არ ეკუთვნის B-ს. სხვაობა აღინიშნება შემდეგნაირად: $A \setminus B$ (A-ს სხვაობა B-სთან). ეილერ-ვენის დიაგრამაზე სხვაობა ნაჩვენებია მე-2 ნახ-ზე:



ნახ. 2

თუ $A \supset B$, მაშინ სხვაობა ჩაიწერება ასე: A-B=C. მხოლოდ ამ შემთხვევაში სრულდება A=B$\bigcup$C ტოლობა. თუ $A \subseteq A$, მაშინ სხვაობა $A - A = \varnothing$.

1.5. სიმრავლეთა თანაკვეთა (გადაკვეთა)



ნახ. 3

ორი A და B სიმრავლის თანაკვეთა ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის შემცველი ნებისმიერი ელემენტი ეკუთვნის ორივე სიმრავლეს ერთდროულად. ორი სიმრავლის თანაკვეთა შემდეგნაირად ჩაიწერება: $A \bigcap B$, სადაც $\bigcap$ წარმოადგენს თანაკვეთის სიმბოლოს. ეილერ-ვენის დიაგრამაზე თანაკვეთა ნაჩვენებია მე-3 ნახ-ზე.

თუ A და B სიმრავლის თანაკვეთა გვაძლევს $\varnothing$ სიმრავლეს – $A \bigcap B = \varnothing$, მაშინ A და B სიმრავლეს ეწოდება არათანაკვეთადი სიმრავლეები. თუ $A \bigcap B \neq \varnothing$, მაშინ A და B თანაკვეთადი სიმრავლეებია.

თანაკვეთის ოპერაცია ვრცელდება სიმრავლეთა ერთობლიობაზეც, $A_1, A_2, \dots, A_n$ სიმრავლეთა ერთობლიობის თანაკვეთა ეწოდება ისეთ სიმრავლეს, რომლის ელემენტი საერთოა, ყველა მოცემული სიმრავლისათვის.

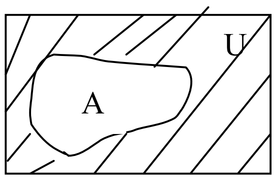
დავუშვათ, მოცემული სიმრავლეთა ერთობლიობის თანაკვეთა არის A, მაშინ:

$$A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_n \quad \text{ანუ} \quad A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

თუ სიმრავლეთა ერთობლიობა უსასრულოა, მაშინ

$$A = A_1 \bigcap A_2 \bigcap \dots \bigcap A_n \bigcap \dots \quad \text{ანუ} \quad A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

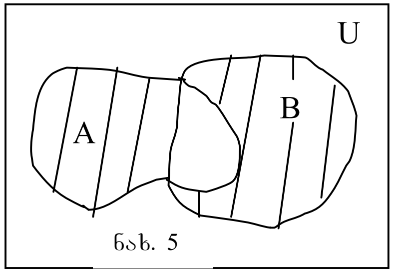
1.6. უარყოფის ოპერაცია



ნახ. 4

A სიმრავლის უარყოფა ეწოდება $\overline{A}$-ს, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: $\overline{A}$=U-A, სადაც U არის უნივერსალური სიმრავლე. ეილერ-ვენის დიაგრამაზე უარყოფა ნაჩვენებია მე-4 ნახ-ზე.

1.7. ორი სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობა



ნახ. 5

ორი A და B სიმრავლის სიმეტრიული სხვაობა აღინიშნება შემდეგნაირად: $A \setminus B$ და განისაზღვრება ასე:

$$A \setminus B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A).$$

ეილერ-ვენის დიაგრამაზე სიმეტრიულ სხვაობა ნაჩვენებია მე-5 ნახ-ზე.

1.8. სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი

განვიხილოთ A და B ორი სიმრავლე. დავუშვათ, A={ a }, B={b}. მოცემული სიმრავლეების ელემენტებიდან ვაწარმოოთ მოწესრიგებული (a, b) წყვილი. მას ვუწოდოთ მოწესრიგებული ანუ იგი განვასხვაოთ (b, a) წყვილისაგან. ელემენტთა (a, b) მოწესრიგებულ წყვილებს, სადაც პირველ ადგილზე დგას $a \in A$ ელემენტი, ხოლო მეორეზე $b \in B$ ელემენტი, ეწოდება სიმრავლეთა დეკარტული ანუ პირდაპირი ნამრავლი და შემდეგნაირად ჩაიწერება: $A \times B$. თუ $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ და $B = \{b_1, b_2\}$, მაშინ ამ სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი იქნება:

$$A \times B = \{a_1, a_2, a_3\} \times \{b_1, b_2\} =$$

$$= \{(a_1, b_1); (a_1, b_2); (a_2, b_1); (a_2, b_2); (a_3, b_1); (a_3, b_2)\}.$$

A და B სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი შეიძლება ზოგადად ასე ჩაიწეროს: $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$, სადაც დახრილი ხაზის მარჯვენა მხარეს ჩვეულებრივ აღინიშნება ელემენტების თვისება ($a \in A$ და $b \in B$ არის ელემენტების თვისება).

ცხადია, თუ $A = \varnothing$ ან $B = \varnothing$, მაშინ $A \times B = \varnothing$. დეკარტული ნამრავლი ვრცელდება სიმრავლეთა ერთობლიობაზეც. ვთქვათ, მოცემულია სიმრავლეთა შემდეგი ერთობლიობა $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. მაშინ $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$ სიმრავლეს ეწოდება A_i სიმრავლეთა დეკარტული ნამრავლი. ამ შემთხვევაში A სიმრავლის ელემენტი იქნება $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, სადაც პირველ ადგილზე დგას $a_1 \in A_1$ ელემენტი, მეორეზე $a_2 \in A_2$, ხოლო n-ზე $a_n \in A_n$. ელემენტთა $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ მიმდევრობას, სადაც ყოველი ელემენტი იკავებს თავის განსაზღვრულ ადგილს,

ეწოდება კორტეჟი. კორტეჟის სიგრძე განისაზღვრება მასში შემავალი ელემენტების რაოდენობით. კორტეჟში შემავალ ელემენტებს მისი კომპონენტები ეწოდება. ჩვეულებრივ, კორტეჟის ელემენტებს ათავსებენ მრგვალ ფრჩხილებში. n ერთნაირი სიმრავლის დეკარტულ ნამრავლს:

$$A^n = \underbrace{A\times A\times\ldots\times A}_{\text{n-ჯერ}}$$

ეწოდება სიმრავლის n-ური ხარისხი; ამასთან, $A^1 = A$; $A^0=\{\varnothing\}$.

$\prod_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$, თუ $A_1=\varnothing$ ან $A_2=\varnothing$, ან $\ldots$ $A_n=\varnothing$.

1.9. სიმრავლეთა ჯამი

ავიღოთ ორი X და Y სიმრავლე და ინდექსთა K სიმრავლე, რომლის რიცხვი ტოლია შესაკრებ სიმრავლეთა რიცხვისა. ამ შემთხვევაში K={1,2}, მაშინ X და Y სიმრავლეთა ჯამი იქნება X' და Y' სიმრავლეთა გაერთიანება, სადაც $X'=\{1\}\times X$, ხოლო $Y'=\{2\}\times Y$, ანუ X+ Y=({1}x X)$\cup$({2} x Y).

X' და Y' სიმრავლეს დანომრილ სიმრავლეებსაც უწოდებენ. სიმრავლეთა ჯამი X+ Y= X$\cup$Y, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც X$\cap$ Y=$\varnothing$.

1.10. სიმრავლეთა ოპერაციის თვისებები

გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაცია ხასიათდება გადანაცვლებადობის თვისებით (კომუნიკაცია):

$$A\cup B = B\cup A,$$

$$A\cap B = B\cap A.$$

ასევე ჯუფდებადობის (ასოციაციურობა) თვისებით:

$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C),$$

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C).$$

სიმრავლეთა თანაკვეთის ოპერაციას ახასიათებს განაწილების (დისტრიბუციულობა) თვისება როგორც გაერთიანების, ასევე სიმრავლეთა სხვაობის მიმართ:

$$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C),$$

$$(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C).$$

გადანაცვლებადობისა და ჯუფდებადობის თვისება ახასიათებს აგრეთვე სიმრავლეთა სიმეტრიულ სხვაობასაც:

$$A\setminus B = B\setminus A,$$

$$A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B)\setminus C.$$

თანაკვეთის ოპერაციას სიმეტრიულ სხვაობის მიმართ აქვს განაწილების თვისება:

$$A\cap(B\setminus C) = (A\cap B)\setminus(A\cap C).$$

სხვაობის ოპერაცია შეიძლება ასეც ჩაიწეროს:

$$A\setminus B = A-(A\cap B).$$

გაერთიანების ოპერაციას თანაკვეთის ოპერაციასთან აქვს განაწილების თვისება:

$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C).$$

მაგალითისათვის დავამტკიცოთ ამ უკანასკნელის მართებულობა.

დამტკიცება

იმისათვის, რომ მოცემული ტოლობა მართებული იყოს, უნდა ვაჩვენოთ, რომ:

ა) $A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

ბ) $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)$.

ეს გამომდინარეობს მოცულობის აქსიომიდან A=B, თუ $A\subset B$ და $B\subset A$.

ვიწყებთ დამტკიცებას. ჯერ ვაჩვენოთ ა) ნაწილი. ავიღოთ ნებისმიერი ***x*** ელემენტი ტოლობის მარცხენა ნაწილის სიმრავლიდან ანუ:

$$x\in A\cup(B\cap C).$$

გაერთიანების ოპერაციიდან გამომდინარეობს ორი შემთხვევა:

1. $x \in A$ ან
2. $x \in B \bigcap C$

ან შეიძლება ერთდროულად ეკუთვნოდეს A–საც და $B \bigcap C$. მაგრამ ეს არ არის განხილვის საგანი, რადგან ეს უკანასკნელი მაინც 1) და 2) შემთხვევას მოიცავს.

განვიხილოთ 1) შემთხვევა, როცა $x \in A$, მაშინ x ეკუთვნის ტოლობის მარჯვენა მხარის ორივე ნაწილის სიმრავლეს: $x \in A \bigcup B$ და $x \in A \bigcup C$. თუ ეს ასეა, თანაკვეთის ოპერაციის განსაზღვრის თანახმად, x ეკუთვნის მთლიანად ტოლობის მარჯვენა ნაწილის სიმრავლეს, ე. ი.:

$$x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

მაშასადამე, ნებისმიერი x ელემენტი, რომელიც ეკუთვნის ტოლობის მარცხენა ნაწილის სიმრავლეს წარმოადგენს ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი სიმრავლის ელემენტებსაც. ეს კი ნიშნავს, რომ ტოლობის მარცხენა ნაწილის სიმრავლე წარმოადგენს ტოლობის მარჯვენა ნაწილის სიმრავლის ქვესიმრავლეს, ე.ი.

$$A \bigcup (B \bigcap C) \subseteq (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

ახლა ვაჩვენოთ 2) შემთხვევა. დავუშვათ,

$$x \in (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$$

თანაკვეთის ოპერაციის განსაზღვრის თანახმად შეიძლება დავწეროთ, რომ x ერთდროულად ეკუთვნის როგორც $(A \bigcup B)$-ს, ასევე $(A \bigcup C)$, ე.ი. $x \in A \bigcup B$ და $x \in A \bigcup C$ (ერთდროულად).

თუ $x \in A \bigcup B$, მაშინ $x \in A$ ან $x \in B$ (ან ორივეს ერთდროულად) და თუ $x \in A \bigcup C$, მაშინ $x \in A$ ან $x \in C$ (ან ორივეს ერთდროულად), ე.ი. გვაქვს:

$x \in A$ და $x \in B$ და $x \in C$ (და ე.ი. ერთდროულად).

ახლა გადავიდეთ ანალიზზე (ვნახოთ რა მოხდება ტოლობის მარცხენა მხარეს).

ვთქვათ, $x \in A$, მაშინ $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$. როცა $x \in B$ და $x \in C$, მაშინ $x \in (B \bigcap C)$ და ცხადია, $x \in A \bigcup (B \bigcap C)$.

მაშასადამე, ნებისმიერი x ელემენტი, რომელიც ავიღეთ ტოლობის მარჯვენა ნაწილში მდგომი სიმრავლიდან, ამავე დროს წარმოადგენს ტოლობის მარცხენა ნაწილში მდგომი სიმრავლის ელემენტს. ეს კი ნიშნავს, რომ ტოლობის მარჯვენა ნაწილის სიმრავლე წარმოადგენს ტოლობის მარცხენა ნაწილის სიმრავლის ქვესიმრავლეს, ე.ი.

$$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) \subseteq A \bigcup (B \bigcap C).$$

მოცულობის აქსიომის თანახმად:

$$(A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C) = A \bigcup (B \bigcap C).$$

ანალოგიურად მტკიცდება დანარჩენი თვისებებიც.

გაერთიანებისა და თანაკვეთის ოპერაციებს ახასიათებს იდემპოტენტურობის თვისება:

$$A \bigcup A = A; \qquad A \bigcap A = A.$$

U უნივერსალური და $\varnothing$ ცარიელი სიმრავლისათვის მართებულია შემდეგი მოქმედება:

$$A \bigcup \varnothing = A; \qquad A \bigcap \varnothing = \varnothing;$$

$$A \bigcup U = U; \qquad A \bigcap U = A.$$

A სიმრავლის ორმაგი უარყოფა გვაძლევს ისევ A სიმრავლეს:

$$\overline{\overline{A}} = A.$$

უარყოფისათვის მართებულია დე მორგანის კანონი:

$$\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B};$$

$$\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}.$$

ამრიგად, თანაკვეთის უარყოფა იძლევა უარყოფათა გაერთიანებას და გაერთიანების უარყოფა ტოლია უარყოფათა თანაკვეთის.

1.11. სიმრავლეთა ეკვივალენტობა

განვიხილოთ ორი სასრული სიმრავლე. იმისათვის, რომ შევადაროთ ეს ორი სიმრავლე, ანუ განვსაზღვროთ მათგან, რიცხობრივად რომელი უფრო მეტი ელემენტისაგან შედგება და რომელი ნაკლებისაგან, უნდა დავითვალოთ სათითაოდ ორივე სიმრავლის ელემენტი. ეს გზა არ არის ხელსაყრელი თუნდაც სასრული სიმრავლეთათვის, რომლებიც შეიცავს ელემენტთა დიდ რაოდენობას, რადგან ასეთ შემთხვევაში გაჭირდებოდა მისი თვლაც კი. ხოლო, რაც შეეხება უსასრულო სიმრავლეს, მათთვის ელემენტთა რაოდენობის დათვლა საერთოდ კარგავს აზრს.

სიმრავლეთა შედარებისათვის გამოიყენება სიმრავლეთა ელემენტების ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში დაყენების მეთოდი. განვიხილოთ ამ მეთოდის არსი შემდეგ მაგალითზე. მისაღებ გამოცდებზე აბიტურიენტებს იწვევენ ცალკეულ მაგიდებთან. დავუშვათ, უნდა განვსაზღვროთ არის თუ არა აბიტურიენტებისა და მაგიდების რაოდენობა თანაბარი. თუ გამოცდის დაწყების წინ ყოველი მაგიდა დაკავებულია (მარტო ზის ერთი აბიტურიენტი ერთ მაგიდასთან) და არც ერთი აბიტურიენტი არ დარჩა მაგიდის გარეშე, ასეთ შემთხვევაში დაბეჯითებით შეიძლება ითქვას, რომ აბიტურიენტებისა და მაგიდების რაოდენობა თანაბარია. ე.ი. ადვილად შეიმჩნევა, რომ აბიტურიენტთა და მაგიდათა სიმრავლე დაიყო წყვილებად – (აბიტურიენტი, მაგიდა) და ამ დროს არ დაგვრჩა არც თავისუფალი მაგიდა, არც ფეხზე მდგომი (მაგიდის გარეშე დარჩენილი) სტუდენტი.

ახლა განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა. დავუშვათ, ორ A და B სიმრავლეს აქვს ელემენტთა ერთნაირი რაოდენობა. ავიღოთ ნებისმიერი $a_1 \in A$ ელემენტი და მასთან რაიმე კანონით დავაწყვილოთ (შევუსაბამოთ) $b_1 \in B$ ელემენტი. შემდეგ ავიღოთ $a_2 \in A$ და იმავე კანონით დავაწყვილოთ $b_2 \in B$ ელემენტთან და ა. შ. საბოლოოდ, ელემენტთა სიმრავლე დაიყოფა წყვილებად. თუ ნებისმიერ $a \in A$ ელემენტს რაიმე განსაზღვრული კანონით

(დაწყვილება, ინდექსაცია და ა. შ.) შეიძლება შევუსაბამოთ ერთი და მხოლოდ ერთი $b \in B$ ელემენტი და ამავე დროს, ყოველი $b \in B$ ელემენტისათვის აღმოჩნდება შესაბამისობაში ერთი და მხოლოდ ერთი $a \in A$ ელემენტი და ამგვარად, ორივე სიმრავლე დაიყოფა ისეთ წყვილებად, სადაც ორივე სიმრავლიდან შედის თითო ელემენტი, მაშინ ამბობენ, რომ A და B სიმრავლეების ელემენტებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა.

სიმრავლეებს, რომელთა შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, ეწოდება ეკვივალენტური სიმრავლეები.

A და B სიმრავლეების ეკვივალენტობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $A \sim B$.

თუ A და B არ არის ეკვივალენტური, ეს ასე ჩაიწერება $A \sim B$.

სიმრავლეთა ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში დაყენების მეთოდი ერთადერთია უსასრულო სიმრავლეთა შედარებისათვის.

1.12. სიმრავლეთა სიმძლავრე. სიმრავლეთა სიმძლავრის შედარება

განვიხილოთ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ სიმრავლეთა ერთობლიობა. დავუშვათ, ისინი ერთმანეთის ეკვივალენტური სიმრავლეებია. ურთიერთეკვივალენტურ სიმრავლეთა ერთობლიობა ქმნის ეკვივალენტურ კლასებს. ერთი კლასის საზღვრებში სიმრავლეები ერთმანეთის ეკვივალენტურია. სხვადასხვა ეკვივალენტური კლასის სიმრავლეები არ იქნება ერთმანეთის ეკვივალენტური. ერთსა და იმავე ეკვივალენტურ კლასში შემავალ სიმრავლეებს აქვთ ერთნაირი სიმძლავრე.

სიმრავლის სიმძლავრე – ეს არის მასში შემავალი ელემენტების რაოდენობის განზოგადებული ცნება. სასრული სიმრავლეების სიმძლავრე ემთხვევა ელემენტთა რაოდენობის ცნებას. უსასრულო სიმრავლეებისათვის შეიძლება მხოლოდ მის სიმძლავრეზე ვისაუბროთ (ამ შემთხვევაში, ელემენტების რიცხვის

ცნება უაზრობაა). ხშირ შემთხვევაში, სიმრავლის სიმძლავრეს უწოდებენ კარდინალურ (თვლად) რიცხვს. სიმრავლის სიმძლავრეს ასეთნაირად აღნიშნავენ: $|A|$ თუ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ სიმრავლეთა ერთობლიობა წარმოადგენს ეკვივალენტურ კლასს, მაშინ ამ კლასს შეიძლება მივუწეროთ ერთი და იგივე კარდინალური რიცხვი, დავუშვათ, ეს რიცხვია α (ალფა). ამ კლასში შემავალი სიმრავლეები იქნება ტოლსიმძლავრიანი, ე.ი. $\alpha = |A_1|, \quad \alpha = |A_2|, \ldots, \alpha = |A_n|$.

იმ შემთხვევაში, თუ $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ სიმრავლეები არ არის ეკვივალენტური, მაშინ მიუწერენ სხვადასხვა კარდინალურ რიცხვს: $\alpha_1 = |A_1|, \quad \alpha_2 = |A_2|, \ldots, \alpha_n = |A_n|$. სადაც $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \ldots \neq \alpha_n$ ამ დროს თვით სიმრავლეებიც არ არის ტოლსიმძლავრიანი.

ვთქვათ, მოცემულია A და B სასრული სიმრავლეები. შევადაროთ მათი სიმძლავრეები. ამისათვის გამოვიყენოთ ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში დაყენების მეთოდი.

დავუშვათ, როცა $|A| = \alpha_1$ და $|B| = \alpha_2$, შესაძლებელია შემდეგი სამი შემთხვევა:

$$\alpha_1 = \alpha_2; \quad \alpha_1 > \alpha_2; \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

როცა $A \sim B$, მაშინ $\alpha_1 = \alpha_2$.

როცა $A \sim B$, მაგრამ $B \sim A_1$, სადაც $A_1 \subset A$, მაშინ $\alpha_1 > \alpha_2$.

როცა $A \sim B$, მაგრამ $A \sim B_1$, სადაც $B_1 \subset B$, მაშინ $\alpha_1 < \alpha_2$.

ახლა ვთქვათ, A და B სიმრავლეები არის უსასრულო. აღვნიშნოთ მათი სიმძლავრეები შესაბამისად $|A|$ და $|B|$-თი. აქაც შესაძლებელია სამი შემთხვევა $|A| = |B|$; $|A| > |B|$; $|A| < |B|$. პირველი შესრულდება, როცა $A \sim B$, სადაც $B_1 \subset B$ და $B \sim A_1$, აქ $A_1 \subset A$. მეორე შემთხვევა შესრულდება, თუ $B \sim A_1$, სადაც $A_1 \subset A$, მაგრამ A არ არის ეკვივალენტური B-ს არც ერთი ქვესიმრავლის. და ბოლოს, მესამე შემთხვევა შესრულდება მაშინ, როცა $A \sim B_1$, სადაც $B_1 \subset B$, მაგრამ B არ არის ექვივალენტური A-ს არც ერთი ქვესიმრავლის.

1.13. თვლადი სიმრავლეები

სიმრავლეთა თეორიაში ხშირად ისმება ასეთი სახის კითხვები: რომელ უსასრულო სიმრავლეს აქვს ყველაზე დიდი სიმძლავრე და არსებობს თუ არა ყველაზე მცირე სიმძლავრის უსასარულო სიმრავლე.

თეორემა. ***ნებისმიერი არაცარიელი X სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლის სიმძლავრე მეტია თვით X სიმრავლის სიმძლავრეზე.***

აქედან გამომდინარეობს, რომ არ შეიძლება ავაგოთ სიმრავლე ყველაზე დიდი სიმძლავრით. რაც შეეხება უსასრულო სიმრავლეს ყველაზე მცირე სიმძლავრით, იგი არსებობს.

დავუშვათ, X არის ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლე, ხოლო N ნატურალური მწკრივის ყველა რიცხვის სიმრავლე – N={1; 2; 3; . . .n; . . .}.

ავიღოთ X სიმრავლიდან x ელემენტი და მივუწეროთ მას N სიმრავლიდან ინდექსი 1, მივიღებთ x_1 ელემენტს. შემდეგ ავიღოთ მეორე ელემენტი X სიმრავლიდან და მივუწეროთ მას N სიმრავლიდან ინდექსი 2, მივიღებთ x_2 ელემენტს. თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ, X სიმრავლეზე მივიღებთ მისგან გამოყოფილ X_n სიმრავლეს ანუ $X_n \subseteq X$. რადგან N და X_n სიმრავლეებს შორის დამყარებულია ურთიერთცალსახა შესაბამისობა, ამიტომ $X_n \sim$N. სიმრავლეთა სიმძლავრეების შედარების საფუძველზე ვწერთ, რომ $|X| \geq |X_n|$. რადგან ეკვივალენტურ სიმრავლეთა სიმძლავრე

ტოლია, ამიტომ $|X_n|=|N|$. თუ ამას ჩავსვამთ წინა უტოლობაში, მივიღებთ $|X|\geq|N|$. როგორც ვხედავთ, ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლის სიმძლავრე მეტია ნატურალური მწკრივის რიცხვთა სიმრავლის სიმძლავრეზე.

ცხადია, ნებისმიერი უსასრულო სიმრავლის სიმძლავრე მეტი იქნება ნატურალური მწკრივის რიცხვთა სიმრავლის ეკვივალენტურ ნებისმიერი სიმრავლის სიმძლავრეზე. შესაბამისად, ყველა უსასრულო სიმრავლეს შორის, ყველაზე მცირე სიმძლავრე აქვს ნატურალური მწკრივის რიცხვთა სიმრავლეს.

ნატურალური მწკრივის რიცხვთა სიმრავლეს და მის ყველა ეკვივალენტურ სიმრავლეს, უწოდებენ თვლად სიმრავლეებს. თვლადი სიმრავლეების სიმძლავრეს ჩვეულებრივად თვლად სიმძლავრეს უწოდებენ და აღნიშნავენ $\aleph_0$ (ალეფ-ნული) სიმბოლოთი.

1.14. თანადობა

განვიხილოთ რამდენიმე მტკიცება. **a** სტუდენტი ზის **b** მაგიდასთან; $\boldsymbol{x}$ თბომავალი იმყოფება $\boldsymbol{y}$ ნავმისადგომთან, **m** სახლს აქვს **n** ნომერი. ყველა ამ მტკიცებით მაგალითში ადგილი აქვს სიმრავლის სხვადასხვა ელემენტებს შორის თანადობას. პირველ მაგალითში გვაქვს სტუდენტების და მაგიდების სიმრავლეს შორის თანადობა, მეორეში – თბომავლების და ნავმისაბმელების სიმრავლეებს შორის, მესამეში – სახლების და ნომრების სიმრავლეთა შორის. როგორც ვხედავთ, ცალკეული მტკიცებები განსაზღვრავს სხვადასხვა სიმრავლეებს შორის თანადობას. თუ თანადობას ადგილი აქვს ორი სიმრავლის ელემენტებს შორის, მაშინ ასეთ თანადობას ეწოდება ბინარული.

ვთქვათ, მოცემულია X და $\boldsymbol{Y}$ სიმრავლე. მათ შორის თანადობა აღვნიშნოთ $\boldsymbol{S}$-ით, მაშინ თანადობა შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

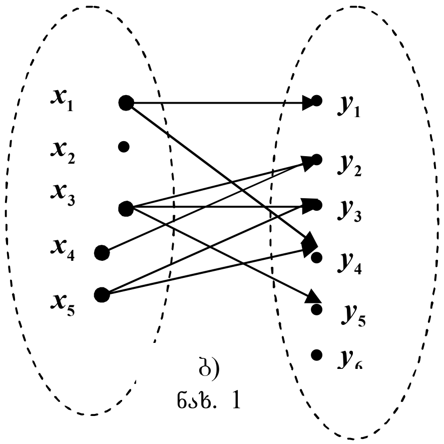
$$S=(X,Y,\Gamma),$$

სადაც Γ არის თანადობის გრაფიკი, რომელიც განისაზღვრება როგორც X და $\boldsymbol{Y}$ სიმრავლის დეკარტული ნამრავლის ქვესიმრავლე, ე.ი. $\Gamma\subseteq X\times Y$. X სიმრავლეს უწოდებენ გამგზავრების არეს, ხოლო $\boldsymbol{Y}$ სიმრავლეს უწოდებენ $\boldsymbol{S}$ თანადობის ჩასვლის არეს.

თანადობა შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილის ან გრაფის საშუალებით. მაგალითად, განვიხილოთ თანადობა „$\boldsymbol{x}$ ტანმოვარჯიშეს შეუძლია შეასრულოს $\boldsymbol{y}$ ვარჯიში“. ტანმოვარჯიშეთა სიმრავლე აღვნიშნოთ X-ით, ხოლო ვარჯიშთა სიმრავლე $\boldsymbol{Y}$-ით. დავუშვათ $\boldsymbol{X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}}$, ხოლო $Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6\}$, სადაც $\boldsymbol{x_i}$ არის $\boldsymbol{i}$-ური ტანმოვარჯიშე, ხოლო $\boldsymbol{y_j}$ $\boldsymbol{j}$-ური ვარჯიში, მაშინ მოცემული თანადობა შეიძლება გამოვსახოთ ცხრილის ან ნახ. 1ბ-ზე ნაჩვენები გრაფის საშუალებით.

ა)

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	*			*		
X_2						
X_3		*	*		*	
X_4		*				
X_5			*	*		



ბ)
ნახ. 1

თანადობის გრაფიკი ცხრილში მოცემულია ვარსკვლავიანი უჯრებით ანუ:
$$\Gamma=\{(x_1,y_1);(x_1,y_4);(x_3,y_2);(x_3,y_3);(x_3,y_5),(x_4,y_2);(x_5,y_3);(x_5,y_4)\}$$

$1^{\text{ბ}}$ ნახ-ზე გრაფში X და $\boldsymbol{Y}$ სიმრავლის ელემენტები მოცემულია წერტილებით (გრაფის მწვერვალები), ხოლო თანადობის გრაფი მოცემულია ისრებით (გრაფის რკალები), ანუ, თუ $(x,y)\in\Gamma$, მაშინ $\boldsymbol{x}$ წერტილიდან მიემართება ისარი $\boldsymbol{y}$ წერტილში. ამრიგად, $\boldsymbol{y}$ წერტილს უწოდებენ $\boldsymbol{S}$ თანადობის შემთხვევაში $\boldsymbol{x}$ ელემენტის სახეს. თვით $\boldsymbol{x}$ წერტილს უწოდებენ $\boldsymbol{y}$-ის პირველსახეს. $\boldsymbol{x}$ ელემენტის სახეს $\boldsymbol{S}$ თანადობის შემთხვევაში შეიძლება წარმოადგენდეს $\boldsymbol{y}$ ელემენტთა რაიმე ჯგუფი. მაგალითად, $\boldsymbol{x_3}$ ელემენტის სახე (ნახ. $1^{\text{ბ}}$) შეიცავს სამ ელემენტს: $\boldsymbol{y_2},\boldsymbol{y_3},\boldsymbol{y_5}$. ანალოგიურად $\boldsymbol{y}$ ელემენტის პირველ სახეს შეიძლება წარმოადგენდეს $\boldsymbol{x}$ ელემენტთა რაიმე ერთიანობა. მაგალითად, $\boldsymbol{y_2}$ ელემენტის პირველსახე ნახ. $1^{\text{ბ}}$ შეიცავს ორ ელემენტს $\boldsymbol{x_3},\boldsymbol{x_4}$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $S=(X,Y,\Gamma)$ თანადობა. $\boldsymbol{S}$ თანადობის განსაზღვრის არე ეწოდება X სიმრავლის ელემენტებს, რომლებსაც აქვთ სახე. $\boldsymbol{S}$ თანადობის მნიშვნელობათა არე ეწოდება Y სიმრავლის ელემენტებს, რომლებსაც აქვთ პირველსახე. თუ თანადობის განსაზღვრის არე შეადგენს X სიმრავლის ყველა ელემენტს, მაშინ

თანადობას უწოდებენ ყველგან განსაზღვრულს. იმ შემთხვევაში, თუ თანადობის განსაზღვრის არეს თითოეული $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ ელემენტის სახეს წარმოადგენს მნიშვნელობათა სიმრავლის $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}$ ერთადერთი ელემენტი, მაშინ თანადობას ეწოდება ფუნქციური ანუ ფუნქცია.

აღვნიშნოთ ფუნქცია $\boldsymbol{F}$-ით, მაშინ შეიძლება ჩავწეროთ, რომ $\boldsymbol{F}\subseteq\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ და ფუნქციონალური თანადობისათვის $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{F}$ ამავე დროს $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\boldsymbol{F}$ გამოსახულების ნაცვლად შეიძლება ვისარგებლოთ შემდეგი $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ გამოსახულებით, სადაც $\boldsymbol{x}$-ს ეწოდება არგუმენტი, ხოლო $\boldsymbol{y}$-ს – ფუნქციის მნიშვნელობა.

იმ შემთხვევაში, როდესაც თანადობის განსაზღვრის არეს წარმოადგენს $X_1,X_2,\dots,X_n$ სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი ანუ $\boldsymbol{X_1}\times\boldsymbol{X_2}\times\dots\times\boldsymbol{X_n}$, მაშინ $y=F(x_1,x_2,\dots,x_n)$, ხოლო $\boldsymbol{F}$ ფუნქციას უწოდებენ n-ადგილიანს.

1.15. სიმრავლის ასახვა

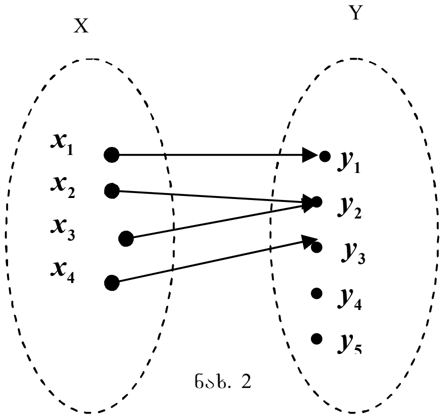
ასახვა თანადობის ერთ-ერთი კერძო შემთხვევაა. ვთქვათ, მოცემულია $S=(X,Y,\Gamma)$ თანადობა. თუ ნებისმიერი $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ ყოველ ელემენტის სახეს წარმოადგენს $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{Y}$ ერთადაერთი ელემენტი, მაშინ ასეთ თანადობას ეწოდება X სიმრავლის ასახვა Y სიმრავლეზე.

 აღვნიშნოთ ასახვა Γ-თი და სიმბოლურად ასე ჩავწეროთ:

$$\mathbf{\Gamma:X\to Y} \text{ ან } \mathbf{X}\xrightarrow{\Gamma}\boldsymbol{Y}.$$

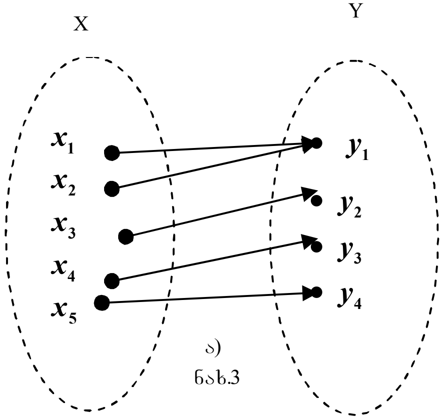
მოვიყვანოთ ასახვის მაგალითი (ნახ. 2).

Γ ასახვისათვის ასევე ადგილი აქვს $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ უკუასახვას. მაგალითად, $\boldsymbol{y_1}\in\boldsymbol{Y}$ ელემენტისათვის უკუასახვა (პირველსახე) წარმოადგენს $\boldsymbol{x_1}\in\boldsymbol{X}$ ელემენტს, ხოლო $\boldsymbol{y_2}$ ელემენტისათვის – $x_2,x_3\in X$ ელემენტები (ნახ. 2). თუ $\boldsymbol{x}$ ელემენტის სახეს Γ ასახვის შემთხვევაში ავღნიშნავთ $\boldsymbol{\Gamma x}$-ით, მაშინ უკუასახვა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად $\Gamma^{-1}\mathrm{y}=\{x/y\in\Gamma x\}$.

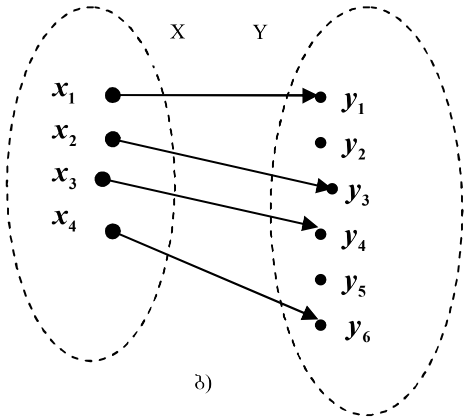


ნახ. 2

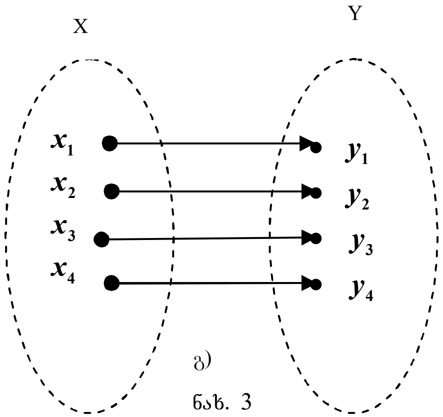
თუ X სიმრავლე აისახება მთლიან Y სიმრავლეში ანუ Γx =Y, მაშინ ასეთ ასახვას ეწოდება სურექციული. იმ შემთხვევაში როცა ნებისმიერი $y \in Y$ ელემენტის პირველსახე შეიცავს მხოლოდ ერთ $x \in X$ ელემენტს, მაშინ ასეთ ასახვას ეწოდება ინექციური. ინექციური ასახვის დროს დასაშვებია ცარიელი პირველსახის არსებობა. და ბოლოს, როცა ასახვა ერთდროულად წარმოადგენს სურექციულსაც და ინექციურსაც, ასეთ ასახვას უწოდებენ ურთიერთცალსახას ანუ ბიექციურს. 3 ა, ბ, გ ნახ-ზე მოცემულია სურექციული, ინექციური და ბიექციური ასახვების მაგალითები.



ა)
ნახ.3



ბ)



გ)
ნახ. 3

ვთქვათ, მოცემულია $\Gamma: X \to Y$ ასახვა. დავუშვათ, $X_1 \subset X$, მაშინ X_1 სიმრავლის სახე იქნება Y სიმრავლის იმ ელემენტთა ერთობლიობა, რომელიც წარმოადგენს $x \in X_1$ ელემენტის Γx სახეს. X_1 სიმრავლის სახე აღვნიშნოთ ΓX_1 -ით, მაშინ $\Gamma X_1 = \bigcup_{x \in X_1} \Gamma x$.

Γ ასახვა შეიძლება მოცემული იქნას ერთ სიმრავლეზეც: $\Gamma: X \to X$.

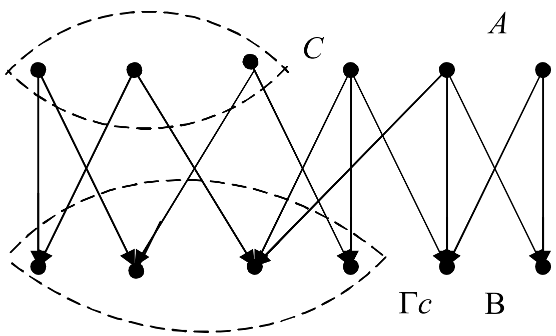
თუ X სიმრავლეზე მოცემულია ორი Γ და F ასახვა, მაშინ ამ ასახვათა კომპოზიციას უწოდებენ ამ უკანასკნელთა თანამიმდევრობით გამოყენებას:

$$(\boldsymbol{\Gamma F})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{Fx}).$$

თუ $\boldsymbol{\Gamma = F}$, მივიღებთ:

$$\Gamma^2 x = \Gamma(\Gamma x);\ \ \Gamma^3 x = \Gamma(\Gamma^2 x);\ \ \Gamma^n x = \Gamma(\Gamma^{n-1} x).$$

ვთქვათ, მოცემულია B სიმრავლის მრავალსახა Γ ასახვა A სიმრავლეზე. დავუშვათ Γc არის C სიმრავლის B სიმრავლეზე ასახვა, სადაც $C \subset A$ (ნახ. 4). იმ შემთხვევაში, თუ $\Gamma c = \Gamma$, $\forall x \in C$–სათვის, მაშინ Γc უწოდებენ Γ ასახვის შევიწროებას C ქვესიმრავლეზე. ამ დროს თვით Γ ასახვას უწოდებენ Γc ასახვის გაგრძელებას A სიმრავლეზე.



ნახ. 4

1.16. დამოკიდებულება (მიმართება). დამოკიდებულების მოცემის ხერხები

თუ თანადობა სრულდება ერთ A სიმრავლეზე, მაშინ მას უწოდებენ დამოკიდებულებას. უფრო გავრცელებულია ორ ობიექტს შორის დამოკიდებულება, რომელსაც ბინარული ეწოდება. მაგალითად, დავუშვათ A სახლების სიმრავლეა. მაშინ მტკიცება

იმისა, რომ $\boldsymbol{a \in A}$ სახლი უფრო მაღალია $\boldsymbol{b \in A}$ სახლზე, იქნება დამოკიდებულება A სიმრავლეზე.

დამოკიდებულება ითვლება მოცემულად, თუ ცნობილია ის ობიექტები, რომელთა შორისაც სრულდება დამოკიდებულება.

განვიხილოთ რომელიმე X სიმრავლე. მოცემული სიმრავლის $x \in X$ და $y \in Y$ ელემენტებისაგან ვაწარმოოთ მოწესრიგებული წყვილები $(\boldsymbol{x, y})$. ამასთან, $(\boldsymbol{x, y}) \in X \times X$, სადაც $X \times X$ არის X სიმრავლის დეკარტული ნამრავლი თავის თავზე. $(\boldsymbol{x, y})$ წყვილის საწარმოებლად მოცემულ ელემენტებს შორის დგინდება რაიმე ბინარული დამოკიდებულება. აღვნიშნოთ ბინარული დამოკიდებულება R-ით. R – ნიშნავს Relation – რელაცია ანუ ქართულად დამოკიდებულებას. მაშინ X სიმრავლეზე R დამოკიდებულება იქნება R ქვესიმრავლე $X \times X$ დეკარტული ნამრავლისა:

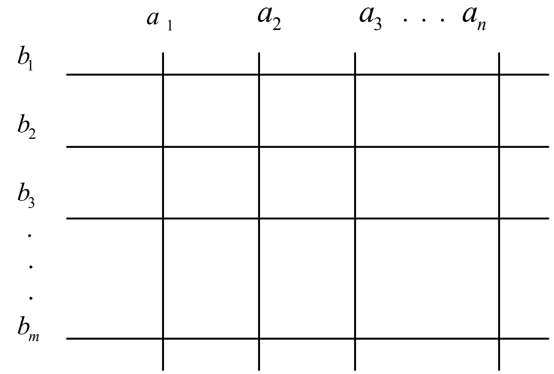
$$R \subseteq X \times X$$

ეს ნიშნავს, რომ R დამოკიდებულება $X \times X$ სიმრავლიდან ამოირჩევს იმ $(\boldsymbol{x, y})$ წყვილებს, რაც აკმაყოფილებს მოცემულ R დამოკიდებულებას. ის რაც ორ $\boldsymbol{x}$ და $\boldsymbol{y}$ ობიექტს შორის დამყარდა R ბინარული დამოკიდებულებით, შემდეგნაირად ჩაიწერება: $\boldsymbol{x}\,\mathrm{R}\,\boldsymbol{y}$ და ასე წაიკითხება: ობიექტი $\boldsymbol{x}$ არის R დამოკიდებულებაში ობიექტ $\boldsymbol{y}$-თან. X სიმრავლე ამ შემთხვევაში წარმოადგენს R დამოკიდებულების მოცემის არეს.

განვიხილოთ დამოკიდებულების მოცემის ხერხები.

დამოკიდებულება შეიძლება მოცემული იყოს ცხრილების საშუალებით. ვთქვათ, მოცემულია ორი სიმრავლე: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ და $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$.

ვიპოვოთ ამ სიმრავლეთა $A \times B$ დეკარტული ნამრავლი.

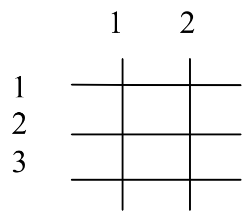


დავუშვათ, რომ $A\times B$ სიმრავლეზე მოცემულია $R\subseteq A\times B$ ბინარული დამოკიდებულება. გავატაროთ ვერტიკალური და ჰორიზონტალური წრფეები, რომლებიც შეესაბამება A და B სიმრავლეთა ელემენტებს. თუ (a,b) წყვილი აკმაყოფილებს მოცემულ R დამოკიდებულებას, ე. ი. (a,b)$\in R$, მაშინ მოცემული წრფეების გადაკვეთა წყვილთა შესაბამისად მოვნიშნოთ წერტილებით. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, $A=\{1,2\}$ და $B=\{1,2,3\}$ და მოცემულია R დამოკიდებულება: R=$\langle$ $a\in A$ წარმოადგენს $b\in B$- ს გამყოფს$\rangle$. (შეიძლება იყოს ასე R b/a ე. ი. b იყოფა a-ზე).

პირველ რიგში ვიპოვოთ $A\times B$ დეკარტული ნამრავლი:

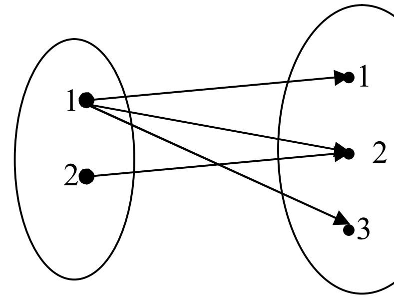
$$A\times B=\{1,2\}\times\{1,2,3\}=\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3)\}.$$

ამ სიმრავლიდან მოცემულ დამოკიდებულებას აკმაყოფილებს შემდეგი წყვილები: $R=\{(1,1);(1,2);(1,3);(2,2)\}$. ავაგოთ ამ წყვილთა შესაბამისი ცხრილი, მივიღებთ:

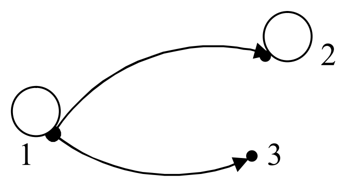


ბინარული დამოკიდებულება შეიძლება ასევე მოცემული იყოს ისრების საშუალებითაც. ამისათვის A და B სიმრავლეების ელემენტებს გამოვსახავთ წერტილების საშუალებით. ამის შემდეგ, მოცემული წერტილები იმ შემთხვევაში დაუკავშირდება ერთმანეთს

ისრებიანი ხაზებით, თუ შესაბამისი (a,b) წყვილი აკმაყოფილებს მოცემულ R დამოკიდებულებას. განხილული მაგალითისათვის R დამოკიდებულების შესაბამის სქემას ექნება შემდეგი სახე:



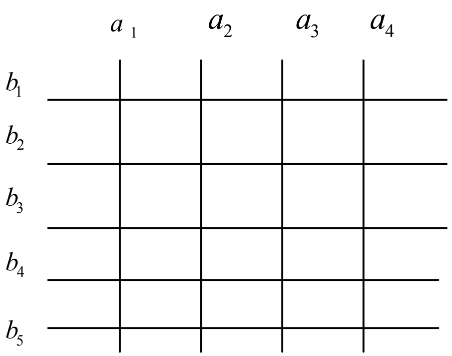
ამ მაგალითებში $A\subset B$ ნახაზი შეიძლება გავამარტივოთ და ერთი და იგივე წერტილები მხოლოდ ერთხელ მოვიყვანოთ:



ბინარული დამოკიდებულების მოცემისათვის სარგებლობენ აგრეთვე კვეთის ანუ მეორენაირად ერთეულოვანი რადიუსის მიდამოს ხერხით.

განვიხილოთ $A\times B$ დეკარტის ნამრავლი (a,b) წყვილი, რომელიც აკმაყოფილებს მოცემულ R დამოკიდებულებას. იგი აღვნიშნოთ C-თი. C სიმრავლის კვეთა $x=a$-ს მიხედვით, ეწოდება $b\in B$ ელემენტთა სიმრავლეს, რომელისთვისაც სრულდება (a,b)$\in C$. ანალოგიურად, R დამოკიდებულების კვეთა x-ით არის $b\in B$ ელემენტთა სიმრავლე, ისე რომ $(x,b)\in R$. R დამოკიდებულეების კვეთების სიმრავლეს ეწოდება B სიმრავლის ფაქტორ სიმრავლე R დამოკიდებულების მიმართ. ფაქტორ-სიმრავლეს აღნიშნავენ B/R-ით. ის მთლიანად განსაზღვრავს R

დამოკიდებულებას. ქვემოთ მოყვანილი ნახაზის მიხედვით, R დამოკიდებულების კვეთის სიმრავლე ჩავწეროთ შემდეგნაირად:



$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ (b_1,b_4) & (b_2,b_3) & \varnothing & (b_2,b_4,b_5) \end{bmatrix}$$

კვადრატულ ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულების მეორე მწკრივი წარმოადგენს B/R ფაქტორ-სიმრავლეს.

თუ $X \subset A$, მაშინ $R(X) = \bigcup\limits_{x \in X} R(x)$. მაგალითად, თუ $X = \{a_1, a_2\}$, $R(x = a_1) = \{b_1, b_4\}$, $R(x = a_2) = \{b_2, b_3\}$, მაშინ $R(X) = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

1.17. დამოკიდებულების თვისებები

ავიღოთ რომელიმე X სიმრავლე. ვთქვათ, ამ სიმრავლეზე მოცემულია R დამოკიდებულება. განვიხილოთ ბინარული დამოკიდებულების ყველა გავრცელებული თვისება.

1. რეფლექსურობა. თუ $x \in X$ ელემენტი R დამოკიდებულებაში იმყოფება თავის თავთან, მაშინ ასეთ დამოკიდებულებას რეფლექსურობა ეწოდება: xRx მაგალითად, თუ ეს რიცხვია, მაშინ $x \geq x$ ანუ დამოკიდებულებას $\langle$ არ არის მეტი$\rangle$, $\langle$ არ არის უფროსი$\rangle$, $\langle$ არის მსგავსი$\rangle$ და ა. შ. აქვს რეფლექსურობის თვისება.
2. ანტირეფლექსურობა. თუ დამოკიდებულება xRx არ სრულდება არც ერთ $x \in X$ -ისათვის, მაშინ ასეთ დამოკიდებულებას ეწოდება ანტირეფლექსური. მაგალითად, $x > x (5 > 5)$ არ სრულდება x -ის არც ერთი მნიშვნელობისათვის.
3. სიმეტრიულობა. თუ ერთდროულად სრულდება xRy და yRx დამოკიდებულება, მაშინ ასეთ თვისებას ეწოდება სიმეტრიული. მაგალითად, პერპენდიკულარობის დამოკიდებულება $a \perp b (b \perp a)$ ან ტოლობა $a = b (b = a)$.
4. ასიმეტრიულობა (არასიმეტრიულობა). თუ xRy და yRx ორი დამოკიდებულებიდან სრულდება მხოლოდ ერთი, მაშინ დამოკიდებულების ასეთ თვისებას ეწოდება ასიმეტრიულობა. მაგალითად, რიცხვებისათვის დამოკიდებულება $\langle$ მეტია$\rangle$: x>y.
5. ტრანზიტულობა. თუ xRy და yRz ორი დამოკიდებულებიდან გამომდინარეობს, რომ xRz, მაშინ დამოკიდებულების ასეთ თვისებას ეწოდება ტრანზიტულობა. მაგალითად, პარალელობის დამოკიდებულება: $a // b$ და $b // c$, მაშინ $a // c$. მეტობის დამოკიდებულება: x>y და y>z, მაშინ x>z.

1.18. მოწესრიგების (დალაგების) დამოკიდებულება

სხვადასხვა სიმრავლეში ელემენტები შეიძლება განსხვავდებოდეს ერთმანეთისაგან ისეთი ნიშნებით, როგორიცაა: უფროსი, მაღალი, პირველადი და ა. შ. ასეთი ნიშნების შემოღება სიმრავლის ელემენტების მიმართ განისაზღვრება იმ კანონზომიერებით, რომლის თანახმად სიმრავლის ელემენტები დალაგდება ერთმანეთის მიმართ. ანსხვავებენ მოწესრიგების შემდეგ დამოკიდებულებას:

კვაზიმოწესრიგება. მოცემული დამოკიდებულება ხასიათდება შემდეგი თვისებით:

ა) რეფლექსურობა;
ბ) ტრანზიტულობა.

რომელიმე სიმრავლის ელემენტების კვაზიმოწესრიგების დამოკიდებულების დროს აღმოჩნდება, რომ ეს დამოკიდებულება არ იძლევა სხვადასხვა $\boldsymbol{x}$ და $\boldsymbol{y}$ ელემენტის განსხვავების საშუალებას, ვინაიდან ერთდროულად სრულდება xRy და yRx დამოკიდებულება. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, X არის ადამიანთა სიმრავლე: $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ და დავუშვათ, რომ მათი სიმაღლეებია შესაბამისად: 163, 177, 159, 163, 184. ვთქვათ მოცემულია დამოკიდებულება: < x არის y-ზე მაღალი >. ეს დამოკიდებულება არის კვაზიმოწესრიგების დამოკიდებულება მოცემულ სიმრავლეზე. მართლაც, ის რეფლექსურიცაა, რადგან ნებისმიერი $x \in X$ -სათვის მართებულია. „$\boldsymbol{x}$ არ არის თავის თავზე მაღალი“. ეს დამოკიდებულება ტრანზიტულიცაა. ვინაიდან, თუ $\boldsymbol{x}$ არ არის $\boldsymbol{y}$-ზე მაღალი, ხოლო $\boldsymbol{y}$ არის z-ზე მაღალი, მაშინ $\boldsymbol{x}$ არ არის z-ზე მაღალი, სადაც $x,y,z \in X$. გარდა ამისა, საინტერესოა ისიც, რომ ეს დამოკიდებულება არ გვაძლევს საშუალებას ერთმანეთისაგან გავარჩიოთ სხვადასხვა ადამიანი, კერძოდ, x_1 და x_4; ვინაიდან მათ ერთი და იგივე სიმაღლე (163) აქვთ, და ერთდროულად სრულდება x_1Rx_4 და x_4Rx_1 დამოკიდებულება. აქედან ჩანს, რომ მოცემული დამოკიდებულება არ იძლევა საშუალებას დავალაგოთ x_1 და x_4 ელემენტები. სწორედ ამიტომ, ამ დამოკიდებულებას კვაზიდამოკიდებულების დამოკიდებულება ეწოდება.

მკაცრი დალაგების (მოწესრიგების) დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

ა) ასიმეტრიულობა;

ბ) ტრანზიტულობა.

მაგალითი. განვიხილოთ $X=\{2,5,3,10,7\}$ სიმრავლე და $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{x}$ ნაკლებია $\boldsymbol{y}$-ზე) დამოკიდებულება. მოცემული სიმრავლე შეიძლება $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ დამოკიდებულებით იყოს დალაგებული შემდეგნაირად: $X=\{2,3,5,7,10\}$, ანუ პირველ ადგილზე დგას

ელემენტი 2, ვინაიდან 2 ნაკლებია ყველა დანარჩენზე; შემდეგ ელემენტი 3 და ა. შ. მოცემული დამოკიდებულება შეიძლება გამოისახოს წყვილების საშუალებით, რომელთაგანაც თითოეული განსაზღვრავს ცალკეულ შედარებას:

$$\{(2,3);(2,5);(2,7);(2,10);(3,5);(3,7);(3,10);(5,7);(5,10);(7,10)\}.$$

$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ დამოკიდებულება მოცემულ სიმრავლეზე წარმოადგენს მკაცრი დალაგების დამოკიდებულებას. არსებითად, მოცემული სიმრავლის ნებისმიერი ორი $\boldsymbol{x}$ და $\boldsymbol{y}$ ელემენტისათვის, თუ $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$, მაშინ არ იარსებებს $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}$. გარდა ამისა, ეს დამოკიდებულება არის ტრანზიტულიც, ვინაიდან, თუ $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$ და $\boldsymbol{y}<$ z, მაშინ $\boldsymbol{x}<$ z, სადაც $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, z $\in$ X.

არამკაცრი დალაგების (მოწესრიგების) დამოკიდებულება. ეს დამოკიდებულება ხასიათდება შემდეგი თვისებებით:

ა) რეფლექსურობა;

ბ) ანტისიმეტრიულობა;

გ) ტრანზიტულობა.

მაგალითად, განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი სიმრავლე: $\mathrm{X}=\{2,5,3,10,7\}$ და დავალაგოთ იგი $x \geq y$ დამოკიდებულების მიხედვით (x მეტია ან ტოლი $y-$ზე).

მაშინ სიმრავლე მიიღებს ასეთ სახეს: $X=\{10,7,5,3,2\}$, ანუ პირველ ადგილზე დგას ელემენტი 10, ვინაიდან იგი მეტია დანარჩენ ელემენტზე, მეორე ადგილზეა 7 და ა.შ. ეს დამოკიდებულება შეიძლება მოცემული იქნას შემდეგი წყვილების საშუალებითაც:

$$\{(10,10);(10,7);(10,5);(10,3);(10,2);(7,7);(7,5);$$
$$(7,3);(7,2);(5,5);(5,3);(5,2);(3,3);(3,2);(2,2)\}.$$

როგორც ვხედავთ, $x \geq y$ დამოკიდებულება x სიმრავლეზე არის არამკაცრი დალაგების დამოკიდებულება. მართლაც, ნებისმიერი ელემენტისათვის $x \in x: x \geq x$, ანუ ის ხასიათდება რეფლექსურობის

თვისებებით. ეს დამოკიდებულება ანტისიმეტრიულია, რადგან $x \geq y$ და $y \geq x$ დამოკიდებულება ერთდროულად სრულდება მხოლოდ ერთ შემთხვევაში, როცა $x = y$. მოცემული დამოკიდებულება ტრანზიტულია, ვინაიდან, თუ $x \geq y$ და $y \geq z$, მაშინ $x \geq z$, სადაც $x, y, z \in X$.

ნაწილობრივი დალაგება. ნაწილობრივი დალაგება არსებობს ისეთ სიმრავლეზე, როცა მისი ყველა ელემენტი არ შეიძლება შედარდეს ერთმანეთთან.

მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია $X = \{2,3,5,8,9,11,16\}$ სიმრავლე და დამოკიდებულება: x არის $y-$ის გამყოფი. მოცემული დამოკიდებულებით X სიმრავლე შეიძლება ნაწილობრივ იქნეს დალაგებული. მართლაც, ის ხასიათდება რეფლექსურობის თვისებით: ყველა $x \in A-$თვის x არის თავის თავის გამყოფი. მოცემული დამოკიდებულება აგრეთვე ხასიათდება ანტისიმეტრიულობის თვისებით: x არის $y-$ის გამყოფი და y არის $x-$ის გამყოფი. ერთდროულად მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როცა $x = y$. ეს დამოკიდებულება ტრანზიტულია, ვინაიდან, თუ x არის $y-$ის გამყოფი და y არის $z-$ის გამყოფი, მაშინ x არის $z-$ის გამყოფი, სადაც $x, y, z, \in X$. ამავე დროს, რიგი ელემენტებისა ამ სიმრავლიდან არ შეიძლება ერთმანეთთან შედარდეს მოცემული დამოკიდებულებით. მაგალითად: 3 და 11; 5 და 9 და ა.შ. ამგვარად, მოცემული დამოკიდებულება X სიმრავლეზე წარმოადგენს ნაწილობრივ დალაგების დამოკიდებულებას.

წრფივი დალაგება. ნაწილობრივი დალაგების დამოკიდებულებისაგან განსხვავებით, წრფივი დალაგების დამოკიდებულება სრულდება სიმრავლის ნებისმიერი ორი ელემენტისათვის. იგი ხასიათდება მოწესრიგების დამოკიდებულების თვისებით, რომელსაც ემატება კიდევ სისრულის პირობაც:

ნებისმიერი x და y ორი ელემენტისთვის ყოველთვის სრულდება: xRy ან yRx.

მაგალითი. ვთქვათ, გვაქვს $\mathrm{X} = \{2,7,3,10,6\}$ სიმრავლე და $x \leq y$ დამოკიდებულება. მოცემული დამოკიდებულება სიმრავლეს ალაგებს წრფივად: $\mathrm{X} = \{2,3,6,7,10\}$.

განვიხილოთ X სიმრავლე. დავუშვათ, $Y \subset X$. ვთქვათ, X სიმრავლეზე მოცემულია მოწესრიგების R დამოკიდებულება. თუ არსებობს ისეთი $x_m \in \mathrm{X}$ ელემენტი, რომ $y \in Y$, ყველა ელემენტისათვის სრულდება yRx_m დამოკიდებულება (ელემენტი x_m მოსდევს ყველა y ელემენტს), მაშინ x_m ელემენტს ეწოდება Y სიმრავლის მაჟორანტი.

თუ არსებობს $x_n \in X$ ელემენტი ისე, რომ ყველა $y \in Y-$ისათვის სრულდება $x_n R\, y$ დამოკიდებულება (x_n წინ უძღვის ყველა y ელემენტს), მაშინ x_n ელემენტს ეწოდება Y სიმრავლის მინორანტი. შეიძლება არსებობდეს მაჟორანტთა და მინორანტთა სიმრავლე. იმ შემთხვევაში, თუ მაჟორანტი $x_m \in Y$, მაშინ მას ეწოდება Y სიმრავლის მაქსიმუმი $x_{\max}$ (მაქსიმალური ელემენტი). თუ მინორანტი $x_n \in Y$, მაშინ მას ეწოდება Y სიმრავლის მინიმუმი (მინიმალური ელემენტი) $x_{\min}$. თუ მაჟორანტთა სიმრავლე შეიცავს მაქსიმალურ ელემენტს, მაშინ მას უწოდებენ Y სიმრავლის ზედა ზღვარს და $\sup Y$-ით. აღნიშნავენ თუ მინორანტთა სიმრავლე შეიცავს მინიმალურ ელემენტს, მას უწოდებენ სიმრავლის ქვედა ზღვარს და $\inf Y$-ით აღნიშნავენ.

II თავი

მათემატიკური ლოგიკის ელემენტები

2.1. სენტენციური კავშირები. გამონათქვამის განსაზღვრა

განვიხილოთ შემდეგი წინადადებები: სამი არ არის ლუწი რიცხვი; ბაღში იზრდება ვაშლის ხე და ეზო სავსეა ხალხით; ონკანში მოედინება წყალი ან ავტობუსები ჩერდებიან გაჩერებასთან; თუ 2X2=5, მაშინ 3-3=10; შეჯიბრი დაიწყება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მოვლენ მსაჯები.

პირველი წინადადება შეიძლება იქნას მიღებული წინადადებიდან: ,,3 არის ლუწი რიცხვი‘‘ სიტყვა ,,არა‘‘-ს დახმარებით. მეორე მაგალითში ორი წინადადება დაკავშირებულია სიტყვით ,,და‘‘, მესამე, მეოთხე და მეხუთე მაგალითებში წინადადებები შესაბამისად დაკავშირებულია შემდეგი სიტყვების დახმარებით: ,,ან‘‘, ,,თუ მაშინ‘‘, ,,მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა‘‘. აქ გამოყოფილ ხუთ სიტყვას ლოგიკაში უწოდებენ სენტენციურს ანუ პროპოზიციურ კავშირებს. სენტენციური კავშირების საშუალებით შეიძლება შეერთებული იყოს ნებისმიერი შინაარსის წინადადება.

თუ წინადადება შედგენილია სიტყვა ,,არა‘‘-ს დახმარებით, მაშინ მას უწოდებენ საწყისი წინადადების უარყოფას. ორი წინადადება, რომელიც შეერთებულია სიტყვა ,,და‘‘-ს დახმარებით ქმნის ახალ წინადადებას, რომელსაც უწოდებენ საწყისი წინადადების კონიუნქციას. თუ ორი წინადადება შეერთებულია სიტყვით ,,ან‘‘, მაშინ ახალ წინადადებას ეწოდება საწყისი წინადადების დიზიუნქცია. ორი წინადადება შეიძლება დაკავშირებული იქნას ერთმანეთთან სიტყვის ,,თუ მაშინ‘‘ დახმარებით, ამ შემთხვევაში მიღებულ წინადადებას საწყისის იმპლიკაციას უწოდებენ. და ბოლოს, თუ ორი წინადადება დაკავშირებულია ერთმანეთთან სენტენციით ,,მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა‘‘, მიღებულ ახალ წინადადებას ეწოდება ეკვივალენცია.

თუ წინადადება არ შეიცავს დამაკავშირებელს, მაშინ ასეთ წინადადებას ლოგიკაში დაუშლელ ანუ მარტივ წინადადებას უწოდებენ. წინადადებას, რომელიც შედგება ერთი ან რამდენიმე კავშირისაგან, რთულ წინადადებას უწოდებენ. გამონათქვამს ჩვეულებრივად აღნიშნავენ ლათინური ანბანის დიდი ასოებით $A, B, \dots, P, Q, \dots, X, Y, \dots, A_1, X_1, Z_1 \dots$ ამ სიმბოლოებს უწოდებენ ცვლად გამონათქვამებს.

სენტენციურ კავშირებს ,,არა‘‘, ,,და‘‘, ,,ან‘‘, ,,თუ მაშინ‘‘, ,,მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა‘‘, მათემატიკაში შემდეგი სიმბოლოებით აღნიშნავენ: $-$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. მაგალითად:

$$\overline{A},\ P \wedge Q,\ A \vee Q,\ P \rightarrow Y,\ A \leftrightarrow Q.$$

გამონათქვამის აღნიშვნაში სიმბოლოებად გამოიყენება აგრეთვე მრგვალი ფრჩხილები: (   ).

ნებისმიერი წინადადება და მათ შორის რთულიც შეიძლება ფორმალიზებულად იქნას აღწერილი ცვლადი გამონათქვამების სიმბოლოებით, სენტენციური კავშირებისა და მრგვალი ფრჩხილების საშუალებით. შეთანხმებულია, რომ ფრჩხილების გამოყენების დროს ძლიერ კავშირად ითვლება ეკვივალენცია, შემდეგ იმპლიკაცია, იმპლიკაციის შემდეგ კონიუნქცია და დიზიუნქცია, ბოლოს სუსტი კავშირი – უარყოფაა.

მოვიყვანოთ გამონათქვამის განსაზღვრა. ***გამონათქვამი ეს არის ნებისმიერი წინადადება, ან მტკიცება, რომელიც შეიძლება კლასიფიცირებულ იქნეს, როგორც ჭეშმარიტი ან მცდარი და არავითარ შემთხვევაში ორივე ერთად.*** აღვნიშნოთ გამონათქვამის ჭეშმარიტება ასო ,,ჭ‘‘-თი, ხოლო მცდარობა ასო ,,მ‘‘-თი. ორ ელემენტიანი სიმრავლის {ჭ,მ} ელემენტებს უწოდებენ გამონათქვამის ჭეშმარიტების მნიშვნელობებს. წინადადება ან მტკიცება წარმოადგენს გამონათქვამს მაშინაც კი, როცა არაა ცნობილი მცდარია იგი თუ ჭეშმარიტი, მაგრამ აქვს აზრი მის ჭეშმარიტებაზე ან მცდარობაზე მსჯელობას. მოვიყვანოთ მაგალითები: 4 – ლუწი რიცხვია; პარიზი იტალიის დედაქალაქია; თბილისში ფრინველთა რაოდენობა ტოლია 21376. პირველი წინადადება ჭეშმარიტია, მეორე მცდარია, მესამის მცდარობა ან

ჭეშმარიტება ჩვენთვის არაა ცნობილი. თუ X და Y გამონათქვამებია, მაშინ X, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \to Y$ და $X \leftrightarrow Y$ აგრეთვე იქნება გამონათქვამები.

თუ X – ჭეშმარიტია, მაშინ $\overline{X}$ იქნება მცდარი და პირიქით. შევადგინოთ უარყოფის ჭეშმარიტების ცხრილი, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 1

X	$\overline{X}$
ჭ	მ
მ	ჭ

კონიუნქციისთვის $X \wedge Y$, ჭეშმარიტების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 2

X, Y	$X \wedge Y$
ჭ ჭ	ჭ
ჭ მ	მ
მ ჭ	მ
მ მ	მ

როგორც ცხრილიდან ჩანს, კონიუნქცია $X \wedge Y$ ჭეშმარიტია, მხოლოდ ერთ შემთხვევაში, როცა X და Y ერთდროულად ჭეშმარიტია.

განვიხილოთ დიზიუნქცია: $X \vee Y$

ცხრილი 3

X, Y	$X \vee Y$
ჭ ჭ	ჭ
ჭ მ	ჭ
მ ჭ	ჭ
მ მ	მ

დიზიუნქცია $X \wedge Y$ მცდარია მხოლოდ მაშინ, როცა X და Y ერთდროულად მცდარია.

თუ ბუნებრივ ენაზე, რთული წინადადება შედგენილია კავშირით „თუ მაშინ“ (მაგ. $A \to B$), მისი შინაარსის ანალიზის დროს A-ს უწოდებენ პირობას, ხოლო B-ს რომელიც გამომდინარეობს A-დან – შედეგს.

ლოგიკაში კავშირი $\to$ აერთებს ნებისმიერ წინადადებას და მათემატიკაში მიღებულ განსაზღვრათა საფუძველზე წარმოადგენს მცდარს ერთადერთ შემთხვევაში, როცა პირობა ჭეშმარიტია და შედეგი მცდარი. იმპლიკაცია წარმოადგენს ჭეშმარიტს, მაშინაც, როცა მცდარია პირობაც და შედეგიც, მაგალითად: თუ 2X3 = 3, მაშინ 5+6 = 20 მოცემული წინადადების ორივე გამონათქვამი მცდარია, იმპილიკაცია კი ჭეშმარიტია. ჭეშმარიტების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 4

X, Y	$X \to Y$
ჭ ჭ	ჭ
ჭ მ	მ
მ ჭ	ჭ
მ მ	ჭ

ეკვივალენციისათვის $X \leftrightarrow Y$, ჭეშმარიტების ცხრილი შეიძლება აგებული იქნას, იმპლიკაციის ჭეშმარიტების ცხრილის საფუძველზე, რადგან ეკვივალენცია $X \leftrightarrow Y$ წარმოადგენს ორი იმპლიკაციის კონიუნქციას: $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$.

ცხრილი 5

X, Y	$(X \to Y) \wedge (Y \to X)$		
ჭ ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ მ	მ	მ	ჭ
მ ჭ	ჭ	მ	მ
მ მ	ჭ	ჭ	ჭ

ცხრილი 6

ჭ ჭ	ჭ
ჭ მ	მ
მ ჭ	მ
მ მ	ჭ

2.2. სულმართალი ფორმულები

შემოვიღოთ ფორმულის ცნება გამონათქვამის აღრიცხვაში. განვიხილოთ A, B, C, . . .,\, X, Y, Z ცვლადი გამონათქვამები. მოცემული გამონათქვამიდან, რომელსაც საწყის გამონათქვამებს უწოდებთ, სენტენციური კავშირებისა და ფრჩხილების გამოყენებით შევადგინოთ ყველა შესაძლო გამოსახულებები, ასეთი გზით მიღებულ გამოსახულებებს ფორმულებს უწოდებენ, მოვიყვაოთ ფორმულების მაგალითი:

$$(A \vee B) \to C,\quad (\overline{A} \wedge Y) \leftrightarrow (X \to Z),\quad (X \vee \overline{X}) \to (A \to B)$$

ხშირ შემთხვევაში ცვლად გამონათქვამებს უწოდებენ მარტივს ანუ ელემენტარულ ფორმულებს, ხოლო ფორმულებს, რომლებიც შედგენილია სენტენციური კავშირებით – შედგენილს, მარტივ ფორმულებს შედგენილ ფორმულებში უწოდებენ მის მარტივ კომპონენტებს, ნებისმიერ მარტივ ფორმულას შეუძლია მიიღოს ერთ-ერთი მნიშვნელობა ორი „ჭ“ და „მ“ – მნიშვნელობიდან. შედგენილი ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები განისაზღვრება მისი შემადგენელი მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების მნიშვნელობიდან. თუ შედგენილი ფორმულა შეიცავს n – მარტივ კომპონენტს, მაშინ მისი ჭეშმარიტების ცხრილი შედგენილი იქნება 2^n რაოდენობის - სტრიქონისაგან.

განვიხილოთ გამონათქვამების აღრიცხვის რაიმე ფორმულა. თუ მოცემული ფორმულის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა ღებულობს ჭ-ს ტოლ მნიშვნელობას, მისი მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების მნიშვნელობის ნებისმიერი განაწილებისათვის, მაშინ ასეთ ფორმულას უწოდებენ სულმართალ ფორმულას ან ტავტოლოგიას.

X ფორმულის სულმართლობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $\models X$.

ნებისმიერი ფორმულის სულმართლობა შეიძლება განისაზღვროს უშუალოდ მისი ჭეშმარიტების ცხრილიდან. ფორმულები: $((A \vee B) \to (A \wedge B)) \to (A \to B)$ და $(A \vee \overline{B}) \vee B$

წარმოადგენენ ტავტოლოგიას. ვაჩვენოთ იგი ცხრილების საშუალებით.

ცხრილი 7

A,	B	$((A \vee B) \to (A \wedge B)) \to (A \to B)$				
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ
მ	ჭ	ჭ	მ	მ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ	ჭ	მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 8

A,	B	$(A \vee \overline{B}) \vee B$	
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	მ	ჭ
მ	მ	ჭ	ჭ

ახლა განვიხილოთ ფორმულა $(A \vee B) \leftrightarrow ((B \to C) \wedge (A \wedge B))$. იგი არ წარმოადგენს ტავტოლოგიას, მართლაც,

ცხრილი 9

A,	B,	C	$(A \vee B) \leftrightarrow ((B \to C) \wedge (A \wedge B))$				
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
ჭ	მ	მ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	ჭ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ
მ	ჭ	მ	ჭ	მ	მ	მ	მ
მ	მ	ჭ	მ	ჭ	ჭ	მ	მ
მ	მ	მ	მ	ჭ	ჭ	მ	მ

2.3. ფორმულათა ეკვივალენტობა

ორ A და B ფორმულას ეწოდება ეკვივალენტური ანუ ტოლძალოვანი, თუ მათი ყველა მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების მნიშვნელობის ნებისმიერი განაწილებისათვის, ისინი ღებულობენ ერთი და იგივე ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. სხვაგვარად რომ გამოვხატოთ, ეკვივალენტური ფორმულები ერთდროულად მცდარი ან ერთდროულად ჭეშმარიტია. A და B ფორმულის ეკვივალენტობა აღინიშნება შემდეგნაირად $A \sim B$. მოვიყვანით ეკვივალენტური ფორმულების მაგალითები:

$A \to B \sim \overline{A} \vee \overline{B}, \quad \overline{A} \to B \sim A \vee B, \quad A \sim A \vee A$ მართლაც,

ცხრილი 10

A	B	$A \to \overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
ჭ	ჭ	მ	მ
ჭ	მ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	ჭ	ჭ
მ	მ	ჭ	ჭ

ცხრილი 11

A	B	$\overline{A} \to \overline{B}$	$A \vee B$
ჭ	ჭ	ჭ	ჭ
ჭ	მ	ჭ	ჭ
მ	ჭ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ	მ

ცხრილი 12

A	A	$A \vee A$
ჭ	ჭ	ჭ
მ	მ	მ

მიუხედავად იმისა, რომ ჭეშმარიტების ცხრილიდან შესაძლებელია ფორმულათა სულმართალობის დადგენა, ამ მეთოდის გამოყენება შედგენილ ფორმულებში შემავალი დიდი რაოდენობის მარტივი კომპონენტების დროს პრაქტიკულად ძნელად განსახორციელებელია. ამიტომ, არსებობს მეთოდი, რომელიც იძლევა საშუალებას მიღებული იქნეს ტავტოლოგიიდან ტავტოლოგია. ამ მეთოდის თანახმად, რამდენიმე საწყისი ტავტოლოგიიდან, რომლებიც გამოიყენება აქსიომის სახით, სპეციალური წესის გამოყენებით მიიღება ახალი ტავტოლოგია. ძირითადად აქსიომის სახით იღებენ შემდეგ ტავტოლოგიებს:

1. $(A \vee A) \to A$;
2. $(A \vee B) \to (B \vee A)$;
3. $A \to (A \vee B)$;
4. $(B \to C) \to (A \vee B \to A \vee C)$.

მოვიყვანოთ თეორემის სახით ტავტოლოგიიდან ტავტოლოგიის გამოყვანის წესი.

თეორემა 1. (ჩასმის წესი). ვთქვათ P არის A ფორმულის მარტივი კომპონენტი, ხოლო ფორმულა B შექმნილია A ფორმულიდან მასში შემავალი P მარტივი კომპონენტის შეცვლით ფორმულა C-თი. მაშინ, თუ A ფორმულა სულმართალია, სულმართალი იქნება ფორმულა B.

დავამტკიცოთ B ფორმულის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა. აღვნიშნოთ $v(B)$-თი B ფორმულის ჭეშმარიტობის მნიშვნელობა მისი მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების ნებისმიერი განაწილებისათვის. ცხადია, ფორმულა C მიიღებს რაიმე $v(C)$ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. დაუშვათ $v(A)$ წარმოადგენს A ფორმულის ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, რომელიც მიიღება მოცემული ჭეშმარიტული მნიშვნელობის მიწერით მის მარტივ კომპონენტებისა და მათ შორის $v(C)$-სადმი. ვინაიდან C ცვლის P-ს A ფორმულაში ყველგან, ამიტომ $v(A) = v(B)$. პირობის მიხედვით $\models A$ ე. ი. $v(A)=$ჭ და, რადგან $v(A) = v(B)$ ამიტომ $v(B)=$ჭ. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\models B$.

მოვიყვანოთ მაგალითი. თუ $(A \vee B) \to (B \vee A)$ აქსიომაში A-ს მაგიერ ჩავსვამთ ფორმულას $C \to D$ მაშინ მივიღებთ ახალ ტავტოლოგიას $((C \to D) \vee B) \to (B \vee (C \to D))$

თეორემა 2. (ჩასმის წესი ეკვივალენტური ფორმულებისათვის). A და B ფორმულის ეკვივალენცია სულმართალია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \sim B$.

დამტკიცება. დავუშვათ A და B შედგენილი ფორმულებია. დავადგინოთ მათი ჭეშმარიტების მნიშვნელობები მათში შემავალი მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების ყველა მნიშვნელობისათვის. ეკვივალენციის ჭეშმარიტების ცხრილიდან გამომდინარე $A \leftrightarrow B$ იქნება ჭეშმარიტი იმ შემთხვევაში, როცა A და B ფორმულები ერთდროულად ღებულობენ ერთნაირ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობებს, ანუ ისინი ეკვივალენტურია. აქედან $\models A \leftrightarrow B$ როცა $A \sim B$.

თეორემა 3. (დასკვნის ანუ იმპლიკაციის წესი). თუ A და $A \to B$ ფორმულები არის ტავტოლოგია, მაშინ $B-$ც იქნება ტავტოლოგია.

დამტკიცება. თავიდან განვსაზღვროთ A და B ფორმულების ჭეშმარიტული მნიშვნელობები მათი მარტივი კომპონენტების ყველა ჩამონათვალისათვის. რადგან თეორემის პირობის თანახმად $\models A$ და $\models A \to B$, ამიტომ $A \to B-$სათვის ჭეშმარიტების ცხრილიდან გამომდინარეობს რომ $\models B-$მ უნდა მიიღოს ჭ-მნიშვნელობა. აქედან $\models B$.

2.4. ორგვარი ფორმულები

განვიხილოთ ფორმულები, რომლებიც შედგენილია მხოლოდ $-$, $\vee$, $\wedge$ ოპერაციით. ავიღოთ რაიმე A ფორმულა; შევცვალოთ მასში ყველა შემავალი დიზიუნქცია კონიუნქციით და პირიქით. გარდა ამისა, ყველა შემავალი მარტივი P_i კომპონენტი შევცვალოთ მისი უარყოფით $\overline{P_i}$ და პირიქით. შედეგად მიღებული ფორმულა აღვნიშნოთ A_α-თი. ამ შემთხვევაში A და A_α ფორმულებს უწოდებენ ორგვარ ფორმულებს ანუ ურთიერთორგვარ ფორმულებს.

A_α ფორმულას, აგრეთვე ეწოდება A ფორმულის ნეგატივი. მაგალითად, $\left(\overline{A} \vee B\right) \wedge \overline{C}$ ფორმულის ნეგატივი იქნება $\left(A \wedge \overline{B}\right) \vee C$ ხოლო $\left(\overline{\overline{A} \wedge B}\right) \vee \left(B \wedge \overline{C}\right) \wedge \left(\overline{\overline{D} \vee C}\right)$ ნეგატივი იქნება $\left(\overline{A \vee \overline{B}}\right) \wedge \left(\overline{B} \vee C\right) \vee \left(\overline{D \wedge \overline{C}}\right)$.

ორგვარობის თვისებების გამოყენებით მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თეორემა ტავტოლოგიის მისაღებად.

თეორემა 4. თუ A ფორმულა მიღებულია მხოლოდ $-$, $\vee$, $\wedge$ ოპერაციებით და A_α ფორმულა წარმოადგენს A ფორმულის ორგვარ ფორმულას, მაშინ $\models \overline{A} \leftrightarrow A_\alpha$.

მოვიყვანოთ ცნობილი ტავტოლოგიების ჩამონათვალი.

ტავტოლოგიური იმპლიკაციები

1. $A \wedge (A \to B) \to B$
2. $\overline{B} \wedge (A \to B) \to \overline{A}$
3. $\overline{A} \wedge (A \vee B) \to B$
4. $A \to (B \to A \wedge B)$
5. $A \wedge B \to A$
6. $A \to A \vee B$
7. $(A \to B) \wedge (B \to C) \to (A \to C)$
8. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$
9. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$
10. $\left(A \to B \wedge \overline{B}\right) \to \overline{A}$
11. $(A \to B) \to (A \vee C \to B \vee C)$
12. $(A \to B) \to (A \wedge C \to B \wedge C)$
13. $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$
14. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \to (A \leftrightarrow C)$

ტავტოლოგიური ეკვივალენცია

15. $A \leftrightarrow A$
16. $\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$
17. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$
18. $(A \to B) \wedge (C \to B) \leftrightarrow (A \vee C \to B)$
19. $(A \to B) \wedge (A \to C) \leftrightarrow (A \to B \wedge C)$
20. $(A \to B) \leftrightarrow \left(\overline{B} \to \overline{A}\right)$

21. $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$ — 21/. $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

22. $(A \vee B) \vee C \leftrightarrow A \vee (B \vee C)$ — 22/. $(A \wedge B) \wedge C \leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

23. $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ — 23/. $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

24. $A \vee A \leftrightarrow A$ — 24/. $A \wedge A \leftrightarrow A$

25. $\left(\overline{A \vee B}\right) \leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ — 25/. $\left(\overline{A \wedge B}\right) \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$

კავშირის გამორიცხვის ტავტოლოგია

26. $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$
27. $A \to B \leftrightarrow \left(\overline{A \wedge \overline{B}}\right)$
30. $A \wedge B \leftrightarrow \left(\overline{A \to \overline{B}}\right)$
31. $A \wedge B \leftrightarrow \left(\overline{\overline{A} \vee \overline{B}}\right)$

28. $A \vee B \leftrightarrow \overline{A} \rightarrow B$ 32.

$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

29. $A \vee B \leftrightarrow \left(\overline{\overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}}\right)$

2.5. ლოგიკური გამოყვანა

ლოგიკის ერთ-ერთ ძირითად ამოცანას წარმოადგენს მტკიცებებისა და გამონათქვამების გამოყვანის პრინციპების აგება სხვა გამონათქვამებიდან. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, თუ მოცემულია გამონათქვამთა რაიმე თანამიმდევრობა, ლოგიკის ამოცანა მდგომარეობს დასკვნითი გამონათქვამის გამოყვანის დასაბუთებაში, მოცემული თანამიმდევრობის იმ დანარჩენი გამონათქვამიდან, რომლებსაც პირობები ეწოდება. ხშირად დასკვნით გამონათქვამს უწოდებენ ლოგიკურ შედეგს დანარჩენ საწყის გამონათქვამებისას. ვთქვათ, მოცემულია გამონათქვამთა თანამიმდევრობა $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B. B გამონათქვამს უწოდებენ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ გამონათქვამთა ლოგიკურ შედეგს, თუ B ღებულობს „ჭ" მნიშვნელობას იმ შემთხვევაში, როცა თითოეული A_i ღებულობს „ჭ" მნიშვნელობას. ზოგად შემთხვევაში $A_1, A_2, \ldots, A_m$, B შედგენილი ფორმულებია, რომლის მარტივ კომპონენტებს მიეწერება ნებისმიერი ჭეშმარიტული მნიშვნელობები. ამიტომ განსაზღვრიდან გამომდინარე B მიიღებს „ჭ" მნიშვნელობას, როცა $A_1, A_2, \ldots, A_m$ შედგენილი ფორმულების მარტივი კომპონენტის ჭეშმარიტების ნებისმიერი განაწილებისათვის ეს უკანასკნელნი ერთდროულად ღებულობენ ჭ-ს ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ის ფაქტი, რომ B არის $A_1, A_2, \ldots, A_m$-ის ლოგიკური შედეგი, ჩაიწერება ასე: $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B$ მოცემული განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_m \models A_i$, სადაც $i = \left(\overline{i, m}\right)$.

ახლა განვიხილოთ ზოგიერთი პირობები თეორემების სახით რომლის დროსაც არსებობს გამოყვანის შესაძლებლობა.

თეორემა 1. B წარმოადგენს A-ს ლოგიკურ შედეგს, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\models A \rightarrow B$

დამტკიცება. დაუშვათ $A \models B$ განვიხილოთ იმპლიკაციის – $A \rightarrow B$ ჭეშმარიტების ცხრილი, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ იმპლიკაცია მცდარია, როცა A ჭეშმარიტია, ხოლო B მცდარი. მაგრამ დაშვება $A \models B$ გამორიცხავს ასეთ ვარიანტს შესაბამისად $\models A \rightarrow B$. ახლა დაუშვათ, რომ სამართლიანია $\models A \rightarrow B$ და A ღებულობს ჭეშმარიტულ „ჭ" მნიშვნელობას, მაშინ $A \rightarrow B$ გამომდინარეობს, რომ B ღებულობს ჭ-ს ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ე. ი. A B.

თეორემა 2. B არის ლოგიკური შედეგი $A_1, A_2, \ldots, A_m$-ის მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \models B$, ან მაშინ, როცა $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m \rightarrow B$.

დამტკიცება. ვისარგებლოთ კონიუნქციის ჭეშმარიტების ცხრილით. ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ კონიუნქცია ჭეშმარიტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა მასში შემავალი გამონათქვამები ერთდროულად ღებულობენ „ჭ" მნიშვნელობას და რადგან თეორემის პირობის თანახმად B არის ლოგიკური შედეგი $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$, ნიშნავს, რომ ყველა A_i ღებულობს „ჭ" მნიშვნელობას; აქედან $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B$.

მოცემული თეორემის მეორე მტკიცება გამომდინარეობს პირველი მტკიცებიდან და პირველი თეორემიდან.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თეორემა, რომელზეც დაფუძნებულია ლოგიკაში გამოყენებული გამოყვანის წესები.

თეორემა 3. თუ B_j წარმოადგენს $A_1, A_2, \ldots, A_m$, ლოგიკურ შედეგს, სადაც $j = \left(\overline{1, n}\right)$ და C არის $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ლოგიკური შედეგი, მაშინ C არის $A_1, A_2, \ldots, A_m$-ის ლოგიკური შედეგი, ანუ $A_1, A_2, \ldots, A_m \models B_j$ და $B_1, B_2, \ldots, B_n \models C$ გამომდინარეობს, რომ $A_1, A_2, \ldots, A_m \models C$.

დამტკიცება. ავაგოთ ჭეშმარიტების ცხრილები მოცემული თეორემის ყველა შემადგენელი ფორმულებისათვის. დაუშვათ, მარტივი კომპონენტების ჭეშმარიტების მნიშვნელობის რომელიმე განაწილებისათვის ყველა A_i გამონათქვამი ერთდროულად ღებულობს ჭ-ს ტოლ მნიშვნელობას. მაშინ თეორემის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ ყველა B_j და C ღებულობს „ჭ" მნიშვნელობას. ე. ი. როცა A_i ღებულობს „ჭ" მნიშვნელობას, მაშინ C-ც ღებულობს ჭ-ს მნიშვნელობას. შესაბამისად $A_1, A_2, ..., A_m \models C$. ლოგიკური შედეგის განსაზღვრა და ზემოჩამოთვლილი თეორემები გვაძლევენ შესაძლებლობას, ავაგოთ მუშა აპარატი დასკვნითი B გამონათქვამის გამოსაყვანად ($A_1, A_2, ..., A_m$) პირობიდან. ეს აპარატი წარმოადგენს $E_1, E_2, ..., E_k$ ფორმულათა მიმდევრობას. ბოლო ფორმულა მოცემულ მიმდევრობაში არის საძიებელი დასკვნა B, ანუ $E_k = B$. თითოეული E_l ფორმულა, სადაც $l = \left(\overline{1,k}\right)$ მოცემული მიმდევრობისა, განისაზღვრება ერთ-ერთი შემდეგი წესიდან:

P წესი: ფორმულა E_l წარმოადგენს პირობას;

t წესი: E_l ფორმულას წინ უსწრებს ისეთი $A, B, ..., C$ ფორმულები, რომ $\models A \wedge B \wedge ... \wedge C \to E_e$;

Cp წესი: დაუშვათ $A_1, A_2, ..., A_m \models B \to C$, მაშინ $A_1, A_2, ..., A_m$ პირობიდან შეიძლება გამოვიყვანოთ $B \to C$ იმ პირობით, რომ $A_1, A_2, ..., A_m, B \models C$. მოვიყვანოთ გამონათქვამის მაგალითი.

ვთქვათ, $C \to A \vee K,\ C \wedge L,\ \overline{K} \vee D \models A \vee D$.

ვაჩვენოთ იგი:

E_1 $C \wedge L$ P წესი,

E_2 C t წესი $1 \to 2$ (ტავტოლოგია 5),

E_3 $C \to A \vee K$ P წესი,

E_4 $A \vee K$ t წესი $\models 2 \wedge 3 \to 4$ (ტავტოლოგია 1),

E_5 $\overline{A} \to K$ t წესი $\models 4 \to 5$ (ტავტოლოგია 28),

E_6 $\overline{K} \vee D$ P წესი,

E_7 $K \to D$ t წესი $6 \to 7$ (ტავტოლოგია 26),

E_8 $\overline{A} \to D$ t წესი $5 \wedge 7 \to 8$ (ტავტოლოგია 7),

E_9 $A \vee D$ t წესი $8 \to 9$ (ტავტოლოგია 26).

ფორმულები, რომლებიც დანომრილია ციფრებით წარმოადგენენ E_i ფორმულათა მიმდევრობას, სადაც ბოლო ფორმულა $A \vee D$ არის საძიებელი დასკვნა. მოცემული ფორმულების მარჯვნივ მითითებულია, რომ ფორმულა წარმოადგენს ან პირობას, ან ლოგიკურ შედეგს წინამდებარე პირობისა. ამავე დროს შესაბამისი ტავტოლოგიით დასაბუთებულია მისი არსებობა მოცემულ მიმდევრობაში. მაგალითად, ფორმულა მეოთხე სტრიქონში $A \vee K$ გამომდინარეობს C ფორმულიდან (მეორე სტრიქონში) და $C \to A \vee K$ ფორმულიდან (მესამე სტრიქონი) ტავტოლოგიის $\models A \wedge (A \to B) \to B$ საფუძველზე (ვსარგებლობთ ზემოთმოყვანილი ტავტოლოგიებით). აღსანიშნავია, რომ მოცემული ტავტოლოგია $\models A \wedge (A \to B) \to B$ წარმოადგენს გამოყვანის წესს, რომელიც ცნობილია modus ponens–ის სახით: A–დან და $A \to B$ გამომდინარეობს B.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი, ვაჩვენოთ, რომ:

$B \to A,\ \left(\overline{A \wedge \overline{C}}\right),\ B \models K \to (D \vee C)$

E_1 $\left(\overline{A \wedge \overline{C}}\right)$ P წესი,

E_2 $A \to C$ t წესი $1 \to 2$ (ტავტოლოგია 27),

E_3 B P წესი,

E_4 $B \to A$ P წესი,

E_5 A 3,4 t წესი (ტავტოლოგია 1),

E_6 K cp წესი,

E_7 $A \vee D$ t წესი $5 \to 7$ (ტავტოლოგია 6),

E_8 $D \vee A$ t წესი $7 \to 8$ (ტავტოლოგია 21),

E_9 $\overline{D} \to A$ t წესი $8 \to 9$ (ტავტოლოგია 28),

E_{10} $\overline{D} \to C$ t წესი $9 \wedge 2 \to 10$ (ტავტოლოგია 7),

E_{11} $D \vee C$ t წესი $10 \to 11$ (ტავტოლოგია 28).

E_{12} $K \to (D \vee C)$ cp წესი (ტავტოლოგია 9).

2.6. პრედიკატის განსაზღვრა

გამონათქვამთა ლოგიკაში არ განიხილებოდა მარტივი წინადადებების შიგა სტრუქტურა, რომელიც წარმოგვიდგებოდა როგორც დაუშლელი წინადადება. პრედიკატების ლოგიკა განიხილავს მარტივი წინადადების შიგა წყობას. როგორც ცნობილია, მარტივი წინადადებების ძირითადი წევრებია სუბიექტი (ქვემდებარე) და პრედიკატი (შემასმენელი). შემასმენელი გამოხატავს იმას, თუ რას ლაპარაკობენ ქვემდებარის შესახებ.

განვიხილოთ საგანთა რაიმე სიმრავლე $A = \{a, b, c, d, \ldots\}$. ეს საგნები შეიძლება ხასიათდებოდეს სხვადასხვა თვისებით, ან იმყოფებოდეს ერთმანეთთან განსაზღვრულ დამოკიდებულებაში. მაგალითად, თუ A ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეა, მაშინ სამართლიანია გამონათქვამი: 3 მარტივი რიცხვია, 5 მარტივი რიცხვია, 7 მარტივი რიცხვია; ან 5 ნაკლებია 7-ზე, 4 ნაკლებია 7-ზე, 6 ნაკლებია 11-ზე და ა.შ. ავღნიშნოთ F-ით თვისება ,,არის მარტივი რიცხვი''. ხოლო – Q-თი დამოკიდებულება – ,,არის ნაკლები''. დაუშვათ ჩანაწერი $F(x)$ აღნიშნავს, რომ x არის მარტივი რიცხვი. მაშინ სიმბოლო F-ით აღინიშნება პრედიკატი, ხოლო x-ით ობიექტი. ამ შემთხვევაში F-ს უწოდებთ პრედიკატულ სიმბოლოს. შემდგომ მაგალითებში F (მარტივი რიცხვის პრედიკატი) იქნება პრედიკატი თვისება. x – სიმბოლოს არსებობა $F(x)$ გამოსახულებას აქცევს

განუსაზღვრელად (პრედიკატად). თუ x არის A – სიმრავლის განსაზღვრული ელემენტი, მაგალითად, $x = 3$, მაშინ გამოსახულება $F(3)$ – იქნება განსაზღვრული გამონათქვამი, სახელდობრ 3 – არის მარტივი რიცხვი. $F(x)$ პრედიკატის გამოსახულებაში შემავალი x ცვლადი წარმოადგენს სასაგნო ცვლადს. თუ პრედიკატის გამოსახულებაში არის სიმბოლო, რომელიც აღნიშნავს განსაზღვრულ ობიექტს, მაგ. $a, b, 3$, 7 და ა.შ., მაშინ ამ სიმბოლოებს უწოდებენ სასაგნო მუდმივებს. სასაგნო ცვლადებისა და სასაგნო მუდმივების ერთიანობას უწოდებენ ტერმებს. ახლა განვიხილოთ დამოკიდებულება Q – ,,არის ნაკლები''. იგი ამყარებს დამოკიდებულებას ორ x და y საგანს შორის. ამ შემთხვევაში გამოსახულება $Q(x, y)$ აღნიშნავს პრედიკატს ორი x და y ცვლადით. სხვანაირად მას ორადგილიან პრედიკატს უწოდებენ. მოვიყვანოთ ორადგილიანი პრედიკატის მაგალითები: x მეტია y-ზე, x არის ძმა y-ის, x იმყოფება y-ის ზემოთ და ა. შ. გამოსახულება $Q(x, y)$, ასევე წარმოადგენს განუსაზღვრელს. თუ x და y-ის ადგილზე ჩავსვამთ A სიმრავლის რაიმე განსაზღვრულ ელემენტს, მაგალითად, a და b მაშინ გამოსახულება $Q(a, b)$ გადაიქცევა განსაზღვრულ გამონათქვამად (მაგრამ უკვე აღარ იქნება პრედიკატი). საერთოდ განიხილავენ n-არულ ანუ n – ადგილიან პრედიკატებს:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ldots Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ცნობილია ასევე 0 – ადგილიანი პრედიკატი, რომელშიც იგულისხმება ჭეშმარიტი ან მცდარი გამონათქვამი.

პრედიკატის განსაზღვრისათვის აუცილებელია მოცემული იყოს რაიმე – A სიმრავლე, რომლიდანაც მოცემული პრედიკატის სასაგნო ცვლადები ღებულობენ თავიანთ მნიშვნელობას. დაუშვათ $F(x)$ რაიმე პრედიკატია. თუ x მიიღებს განსზღვრულ a მნიშვნელობას – A სიმრავლიდან, მაშინ

ცხადია, რომ გამონათქვამი $F(a)$ იქნება ან ჭეშმარიტი ან მცდარი. მაგ. თუ F არის პრედიკატი მარტივი რიცხვის, მაშინ გამონათქვამი $F(3)$ არის ჭეშმარიტი, ხოლო $F(4)$ – მცდარი.

მაშასადამე, პრედიკატი შეიძლება განსაზღვრული იქნას შემდეგნაირად. პრედიკატი არის ფუნქცია ერთი ან რამდენიმე ცვლადით რომელიც განსაზღვრულია მოცემულ A სიმრავლეზე და ღებულობს მნიშვნელობას {ჭ,მ} – ორ ელემენტიან სიმრავლიდან. ხშირად პრედიკატს უწოდებენ, ასევე, ლოგიკურ ფუნქციას, ხოლო A-ს – სასაგნო არეს.

ერთ ან რამდენიმე სასაგნო ცვლადიან პრედიკატულ სიმბოლოს უწოდებენ ელემენტარულ ფორმულას. ელემენტარული ფორმულები $F(x)$ ან $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ შეიძლება ერთმანეთთან დაკავშირებული იქნას სენტენციური კავშირებით $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ როგორც გამონათქვამის ლოგიკაში.

2.7. კვანტორები

განვიხილოთ შემდეგი წინადადება: ყველა პირველკურსელი სტუდენტია. დაუშვათ $F(x)$ პრედიკატი აღნიშნავს, რომ x არის პირველკურსელი, ხოლო $S(x)$ პრედიკატი აღნიშნავს, რომ x არის სტუდენტი. როგორც მოცემული წინადადებიდან ჩანს, მოქმედება ეხება ყველა პირველკურსელს; ეს კი შეიძლება ჩაიწეროს ლოგიკური ოპერაციის იმპლიკაციის დახმარებით შემდეგნაირად: ყველა x-ისათვის, $F(x) \rightarrow S(x)$ სიტყვათშერწყმას „ყველა x-ისათვის“ ეწოდება ზოგადობის კვანტორი და აღინიშნება $\forall x$. ზოგადობის სიმბოლო $\forall$ წარმოადგენს ინგლისური სიტყვის ALL (ყველა) პირველ ასოს, ამოტრიალებულს.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი წინადადება: ზოგიერთი სტუდენტი ფრიადოსანია, დაუშვათ $P(x)$ არის პრედიკატი, რომელიც აღნიშნავს, რომ x არის ფრიადოსანი. მაშინ, მოყვანილი წინადადება შეიძლება ჩავწეროთ ასე: არსებობს ისეთი

x, რომლისთვისაც $S(x) \wedge P(x)$. სიტყვათაწყობას „არსებობს x“ ეწოდება არსებობის კვანტორი და აღინიშნება როგორც $\exists x$. არსებობის $\exists$ სიმბოლო წარმოადგენს ინგლისური სიტყვის $Exist$ (არსებობს) პირველი ასოს ამოტრიალებულს.

დაუშვათ, რომელიმე პრედიკატი $F(x)$ განსაზღვრულია A სიმრავლეზე. მაშინ, გამონათქვამი $\forall x\ F(x)$ იქნება ჭეშმარიტი, თუ $F(a)$ ჭეშმარიტია ყველა $a \in A$-თვის. გამონათქვამი $\exists x\ F(x)$ იქნება ჭეშმარიტი, თუ $F(a)$ ჭეშმარიტია თუნდაც ერთი $a \in A$-სთვის. წინააღმდეგ შემთხვევაში, გამონათქვამი $\forall x\ F(x)$ და $\exists x\ F(x)$ იქნება მცდარი. კვანტორები $\forall$ და $\exists$ წარმოადგენენ ურთიერთორგვარ კვანტორებს. განვიხილოთ ნებისმიერი n – ადგილიანი პრედიკატი $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ რომელიც განსაზღვრულია A სიმრავლეზე. დაუშვათ, $\forall$ კვანტორის ზემოქმედება ხორციელდება მხოლოდ x_1-ზე ე. ი. სამართლიანია.

$$\forall x_1 \quad F(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში პრედიკატი (1) არ არის დამოკიდებული x_1-ზე და წარმოადგენს $n-1$ ცვლადის $x_2, x_3, ..., x_n$ ფუნქციას. გამოსახულება $\exists x_1\ F(x_1, x_2, ..., x_n)$ იქნება ჭეშმარიტი თუ არსებობს ისეთი $a \in A$ რომლისთვისაც $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ იქნება ჭეშმარიტი. თუ ნებისმიერი $a_1 \in A$ $F(a_1, a_2, ..., a_n)$ იქნება მცდარი მაშინ $\exists x_1\ F(x_1, x_2, ..., x_n)$ იქნება მცდარი.

$F(x)$ ფორმულაში x ცვლადს ეწოდება ბმული, თუ ის იმყოფება $\forall$ ან $\exists$ კვანტორების არეში. თუ სასაგნო ცვლადი x არ არის ფორმულაში კვანტორებთან დაკავშირებული, მაშინ მას ეწოდება თავისუფალი, მაგალითად, ფორმულებში $\forall x\ F(x, y, z)$, $\exists x\ F(x, y)$ x ცვლადი არის ბმული, ხოლო ცვლადები y, z –თავისუფალი.

გვაქვს რა პრედიკატული სიმბოლოები, ტერმები, კვანტორები სენტენციური კავშირები და ფრჩხილები ( ), შეიძლება მოვიყვანოთ

პრედიკატის აღრიცხვაში ფორმულის განმარტება, რომელიც ატარებს ინდუქციურ ხასიათს. იმისათვის, რომ გამოსახულება პრედიკატების აღრიცხვაში წარმოადგენს ფორმულას, ის უნდა იყოს შედგენილი შემდეგი წესის საფუძველზე:

1. დაუშვათ, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ სასაგნო ცვლადებია, ხოლო F_i^n პრედიკატული სიმბოლოა, სადაც n – ინდექსი განსაზღვრავს პრედიკატის n–არობას, ხოლო i ინდექსი მის ტიპს. მაშინ გამოსახულება $F_i^n(x_1, x_2, ..., x_n)$ იქნება ფორმულა.
2. დაუშვათ A არის ფორმულა, სადაც x ცვლადი თავისუფალი ცვლადია, მაშინ გამოსახულება $\forall xA$ და $\exists xA$ აგრეთვე იქნება ფორმულა, ხოლო x ცვლადი ამ ფორმულებში იქნება ბმული. თუ A ფორმულაში x-ის გარდა არსებობს კიდევ სხვა თავისუფალი ცვლადებიც, მაშინ ისინი რჩებიან თავისუფალი $\forall xA$ და $\exists xA$ ფორმულებში. თუ A ფორმულაში არსებობს ბმული ცვლადები, მაშინ ისინი რჩებიან ბმულები $\forall xA$ და $\exists xA$ ფორმულებშიაც. გამოსახულებებში $\forall xA$ და $\exists xA$, A ფორმულას ეწოდება $\forall x$ და $\exists x$ კვანტორების მოქმედების არე.
3. თუ A და B ფორმულებია, სადაც არ არის ცვლადები, ბმული ერთ ფორმულაში და თავისუფალი მეორეში, მაშინ გამოსახულება $\overline{A},\ A \wedge B,\ A \vee B,\ A \to B,\ A \leftrightarrow B$ აგრეთვე იქნება ფორმულები.

მოვიყვანოთ ფორმულების მაგალითი: გამოსახულება $\forall\ x(F_1^2(x,z) \wedge \exists y F_2^1(y))$ არის ფორმულა. მართლაც, $F_1^2(x,z)$ - ელემენტარული ფორმულაა პირველი წესის თანახმად, x და z ცვლადები მასში არიან თავისუფლები. $F_2^1(y)$ ასევე ფორმულაა, იგივე წესის თანახმად. ის შეიცავს y თავისუფალ ცვლადს. გამოსახულება $\exists_y^2 F_2^1(y)$ არის ფორმულა მეორე წესის თანახმად.

y ცვლადი მასში უკვე წარმოადგენს ბმულს. გამოსახულება $F_1^2(x,z) \wedge \exists y F_2^1(y)$ იქნება, აგრეთვე ფორმულა მესამე წესის თანახმად; ის არ შეიცავს ცვლადს დაკავშირებულს ერთ ფორმულაში და ბმულს მეორეში. და ბოლოს, გამოსახულება $\forall x F_1^2(x,z) \wedge \exists y F_2^1(y)$ აგრეთვე, წარმოადგენს ფორმულას მეორე წესის თანახმად. მასში x და y ცვლადები არის ბმული, ხოლო z ცვლადი – თავისუფალი.

განვიხილოთ კიდევ ერთი გამოსახულება $\exists x(F_1^3(x,y,z) \vee \forall y F_1^2(x,y))$. რომელიც არ წარმოადგენს ფორმულას. მიუხედავად იმისა, რომ ცალ-ცალკე, როგორც $F_1^3(x,y,z)$ გამოსახულება, ისე $\forall y F_1^2(x,y)$ გამოსახულება არის ფორმულა; მთლიანად გამოსახულება $(F_1^3(x,y,z) \vee \forall y F_1^2(x,y))$ არ წარმოადგენს ფორმულას მესამე წესის თანახმად; y ცვლადი პირველ ფორმულაში თავისუფალია, მეორეში – ბმული.

ავიღოთ ფორმულა $F(x)$; იმისათვის, რომ მოცემულ ფორმულაში x ცვლადის მაგივრად ჩავსვათ y ცვლადი, აუცილებელია, ყოველი თავისუფალი შემავალი x შევცვალოთ y-ით.

2.8. ᲡᲣᲚᲛᲐᲠᲗᲐᲚᲘ ᲤᲝᲠᲛᲣᲚᲔᲑᲘ

ვთქვათ, გვაქვს რაიმე $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ პრედიკატი და მოცემულია სასაგნო არე A, საიდანაც x ცვლადი ღებულობს თავის ყველა მნიშვნელობას. აღვნიშნოთ λ-თი F პრედიკატის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა, რასაც ის მიიღებს x_i ადგილზე A სიმრავლიდან მისი მნიშვნელობის ჩასმის დროს. მაგალითად, $\lambda(a_1, a_2, ..., a_n)$. განვიხილოთ ფორმულების მიერ ჭეშმარიტების მნიშვნელობათა მიწერა პრედიკატების აღრიცხვაში შემდეგი ფორმულის მაგალითზე: $\forall x(F(x) \vee A \to F(y))$

დავუშვათ, $A = \{a, b\}$. x ცვლადი ამ ფორმულაში წარმოადგენს ბმულს, ხოლო y ცვლადი – თავისუფალს. ამ

ცვლადებს შეუძლიათ მიიღონ ორი a ან b მნიშვნელობა. ხოლო A ფორმულას შეუძლია მიიღოს „ჭ“ – ან „მ“ – მნიშვნელობა. $F(x)$-ის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა შეიძლება განსაზღვრული იქნეს შემდეგი ცხრილიდან:

ცხრილი 13

x	$\lambda_1(x)$	$\lambda_2(x)$	$\lambda_3(x)$	$\lambda_4(x)$
a	ჭ	ჭ	მ	მ
b	ჭ	მ	ჭ	მ

ავაგოთ ჭეშმარიტების ცხრილი საწყისი ფორმულისათვის:

ცხრილი 14

$F(x)$,	A,	Y	$\forall x(F(x) \vee \overline{A} \to F(y))$	
$\lambda_1(x)$	ჭ	a	ჭ	ჭ
$\lambda_1(x)$	ჭ	b	ჭ	ჭ
$\lambda_1(x)$	მ	a	ჭ	ჭ
$\lambda_1(x)$	მ	b	ჭ	ჭ
$\lambda_2(x)$	ჭ	a	ჭ	ჭ
$\lambda_2(x)$	ჭ	b	მ	მ
$\lambda_2(x)$	მ	a	ჭ	ჭ
$\lambda_2(x)$	მ	b	მ	მ
$\lambda_3(x)$	ჭ	a	მ	მ
$\lambda_3(x)$	ჭ	b	ჭ	ჭ
$\lambda_3(x)$	მ	a	მ	მ
$\lambda_3(x)$	მ	b	ჭ	ჭ
$\lambda_4(x)$	ჭ	a	ჭ	მ
$\lambda_4(x)$	ჭ	b	ჭ	მ
$\lambda_4(x)$	მ	a	მ	მ
$\lambda_4(x)$	მ	b	მ	მ

განვიხილოთ ჭეშმარიტების მნიშვნელობის მიწერა ამ ფორმულისათვის. მაგალითად, მეექვსე სტრიქონისათვის: $\forall x(\lambda_2(x) \vee მ \to \lambda_2(b))$. ამ გამოსახულებაში უკვე ჩასმულია $\lambda(x)$-ის მნიშვნელობა შესაბამისი პრედიკატის ადგილზე. შემდეგ აუცილებელია განისაზღვროს $\lambda_1(x) \vee მ \to \lambda_2(b)$ ფორმულის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა. გავაკეთოთ ეს შემდეგი ცხრილის დახმარებით:

ცხრილი 15

x	$\lambda_2(x) \vee მ \to \lambda_2(b)$
a	ჭ ჭ მ მ მ
b	მ ჭ მ ჭ მ

ამ ცხრილიდან ჩანს, რომ იმპლიკაციის ჭეშმარიტების მნიშვნელობა სასაგნო არის ყველა მნიშვნელობისათვის არის ჭ-ს ტოლი. ამიტომ, მთლიანად ფორმულა $\forall x(F(x) \vee \overline{A} \to F(y))$ მიიღებს მ-ს ტოლ მნიშვნელობას.

პრედიკატების აღრიცხვაში ფორმულას ეწოდება სულმართალი მოცემულ სასაგნო არეზე, თუ თავისუფალი ცვლადებისა და პრედიკატული სიმბოლოების ნებისმიერი ჭეშმარიტების მნიშვნელობის მიწერისას ის ღებულობს „ჭ“ მნიშვნელობას. თუ ფორმულა სულმართალია ყველა სასაგნო არეზე, მაშინ მას ეწოდება სულმართალი. ფორმულის სულმართალობა პრედიკატების აღრიცხვაში აღინიშნება იმავე F სიმბოლოთი როგორც გამონათქვამის აღრიცხვაში.

მოვიყვანოთ სულმართალი ფორმულების მაგალითი პრედიკატების აღრიცხვაში. მაგალითად, $\forall xF(x) \to F(y)$ ფორმულა წარმოადგენს სულმართალს, ანუ $\models \forall xF(x) \to F(y)$.

მართლაც, იმპლიკაციის ჭეშმარიტების ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ ის მიიღებს მ-ს ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას იმ შემთხვევაში, როცა $F(y)$ ღებულობს „მ“ მნიშვნელობას, ეს კი იმას ნიშნავს, რომ არსებობს y-ის

მნიშვნელობა, რომელიმე სასაგნო არიდან, რომლისთვისაც $F(y)$ მცდარი იქნება. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\forall xF(x)$ მიიღებს „მ“ მნიშვნელობას. მაგრამ იმპლიკაცია ამ შემთხვევაში ღებულობს ჭ-ს ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას. ეს კი იმას ნიშნავს, რომ $\models \forall xF(x) \to F(y)$. ფორმულა $F(y) \to \exists xF(x)$ აგრეთვე, წარმოადგენს სულმართალს $\models F(y) \to \exists xF(x)$.

ხელახლა განვიხილოთ ჭეშმარიტების ცხრილი იმპლიკაციისათვის. დავუშვათ $\exists xF(x)$ ღებულობს „მ“ მნიშვნელობას. ეს იმას ნიშნავს, რომ სასაგნო არეზე არსებობს x-ის ისეთი მნიშვნელობა, რომლისთვისაც $\exists xF(x)$ – მცდარია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $F(y)$-იც მიიღებს „მ“ მნიშვნელობას. მთლიანად კი ფორმულა მიიღებს „ჭ“ მნიშვნელობას. ამიტომ, $\models F(y) \to \exists xF(x)$. ახლა განვიხილოთ ფორმულა $\exists xF(x) \to \forall xF(x)$. იგი არ არის სულმართალი. ვუჩვენოთ ეს. ვთქვათ, x ღებულობს ორ a და b მნიშვნელობას სასაგნო არედან. დავუშვათ, $F(x)$ მნიშვნელობა ამ დროს იქნება: $\lambda(a)=$ჭ და $\lambda(b)=$მ ამ დროს ფორმულა $\exists xF(x)$ ღებულობს ჭ-ს ტოლ მნიშვნელობას, ხოლო ფორმულა $\forall xF(x)$ მ-ს ტოლ მნიშვნელობას. მაშინ იმპლიკაციის ჭეშმარიტების ცხრილიდან გამომდინარეობს, რომ $\exists xF(x) \to \forall xF(x)$ მიიღებს მ-ს ტოლ მნიშვნელობას.

ჭეშმარიტების ცხრილის აგება პრედიკატების აღრიცხვაში ფორმულების ჭეშმარიტების მნიშვნელობის დასადგენად პრაქტიკულად დაკავშირებულია მნიშვნელოვან სიძნელეებთან. ამიტომ ფორმულათა სულმართალობის დასადგენად ძირითადად სარგებლობენ მსჯელობათა შედეგებით.

2.9. ლოგიკური გამოყვანა პრედიკატების ლოგიკაში

ვთქვათ, პრედიკატების ლოგიკაში მოცემულია ფორმულათა ერთიანობა $A_1, A_2, ..., A_m, B$. ასევე, მოცემულია A სასაგნო არე. B ფორმულა იქნება $A_1, A_2, ..., A_m$ ფორმულის ლოგიკური

შედეგი, თუ A_i ფორმულათა ნებისმიერი მნიშვნელობის მინაწერისათვის A სასაგნო არიდან ფორმულა B ღებულობს ჭ-ს ტოლ ჭეშმარიტულ მნიშვნელობას, როცა ყველა A_i ღებულობს „ჭ“ მნიშვნელობას. თუ B არის $A_1, A_2, ..., A_m$ ფორმულათა ლოგიკური შედეგი, მას, როგორც გამონათქვამთა ლოგიკაში, აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $A_1, A_2, ..., A_m \models B$.

როგორც ცნობილია, ფორმულები პრედიკატების ლოგიკაში შეიძლება შეიცავდნენ თავისუფალ ცვლადებს. A_i ფორმულისათვის სასაგნო არიდან სხვადასხვა მნიშვნელობის მიწერისას მასში შემავალი თავისუფალ ცვლად x-ს ეძლევა ერთი და იგივე მნიშვნელობა ერთი და იგივე სასაგნო არედან.

როგორც გამონათქვამის ლოგიკაში, ფორმულა B წარმოადგენს $A_1, A_2, ..., A_m$ ფორმულათა ლოგიკურ შედეგს E_l ფორმულათა თანამიმდევრული ჯაჭვის სახით, სადაც ბოლო ფორმულაა B, P და t წესებს პრედიკატების ლოგიკაში ემატება კიდევ შემდეგი წესები:

1. უნივერსალური კონკრეტიზების US წესი, რომლის თანახმად თანამიმდევრულ ჯაჭვში E ფორმულას წინ უსწრებს ისეთი $\forall xF(x)$ ფორმულა, რომ E არის $F(y)$, სადაც $F(y)$ არის x ცვლადის ადგილზე $F(x)$ ფორმულაში, y ცვლადის ჩასმის შედეგი: ამავე დროს y-ის არცერთი შემავლობა არ უნდა იყოს ბმული.
2. უნივერსალური განზოგადების წესი Ug, რომლის თანახმადაც, E ფორმულას, რომელსაც აქვს $\forall xF(x)$-სახე, წინ უსწრებს $F(x)$ ფორმულა, სადაც x ცვლადი არ არის თავისუფალი არცერთ პირობაში.
3. ეკზისტენციალური კონკრეტიზების eS წესი, რომლის თანახმადაც $\exists xF(x)$ ფორმულიდან შეიძლება გადახვიდე $F(y)$ ფორმულაზე.

4. ეკზისტენციალური განზოგადების წესი – eg, რომლის თანახმადაც $F(y)$ ფორმულიდან შეიძლება დაგახვიდე $\exists xF(x)$ ფორმულაზე.

მოვიყვანოთ ფორმალური გამოყვანის აგების მაგალითი შემდეგი მსჯელობის საფუძველზე: „ყველა ადამიანი არ არის მონადირე. სანადირო თოფი აქვს მხოლოდ მონადირეს, შესაბამისად, ყველა ადამიანს არ აქვს სანადირო თოფი“.

დაუშვათ $H(x)$ აღნიშნავს, რომ „ x არის ადამიანი“, $F(x)$ – „ x არის მონადირე“, $P(x,y)$ „ x აქვს y “, $R(y)$ – „ y არის სანადირო თოფი“. ფორმალურად ეს მსჯელობა შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$\exists x(H(x)\wedge F(x)),\ \forall x(\exists yF(x)\to P(x,y)\wedge R(y)) \models$$
$$\models(\exists x)(\exists y)(H(x)\to P(x,y)\wedge R(y)).$$

წარმოვადგინოთ დასკვნის გამოყვანა მოცემული პირობიდან ფორმულათა თანამიმდევრობის სახით:

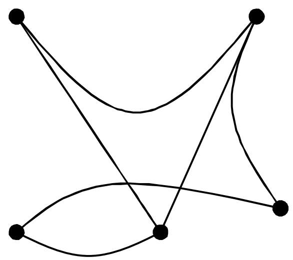
E_1	$\exists(H(x)\wedge F(x))$	P წესი,
E_2	$\forall x(\exists yF(x)\to P(xy)\wedge R(y))$	P წესი,
E_3	$H(\alpha)\wedge F(\alpha)$	1 eS წესი,
E_4	$F(\alpha)\wedge H(\alpha)$	$3t \models 3\to 4$ წესი,
E_5	$F(\alpha)$	$4t \models 4\to 5$ წესი,
E_6	$\exists y(P(\alpha)\to P(\alpha,y)\wedge R(y))$	$2US$ წესი,
E_7	$F(\alpha)\to P(\alpha,\beta)\wedge R(\beta)$	6 eS წესი,
E_8	$P(\alpha,\beta)\wedge R(\beta)$	$5{,}7t$ წესი,
E_9	$\exists xH(x)$	P წესი,
E_{10}	$\exists xP(x,\beta)\wedge R(\beta)$	8 eg წესი,
E_{11}	$\exists x\exists y(P(x,y)\wedge R(y)$	10 eg წესი,
E_{12}	$\exists x\exists y(H(x)\to P(x,y)\wedge R(y))$	$\models$ 9, 11 cp.

III თავი

გრაფთა თეორიის ელემენტები

3.1. გრაფის განსაზღვრა

განვიხილოთ წერტილთა სიმრავლე, რომელიც ნებისმიერადაა განლაგებული. შევაერთოთ ერთმანეთთან ეს წერტილები ხაზებით. შედეგად მიიღება განსაზღვრული გეომეტრიული კონფიგურაცია, რომელსაც გრაფი ეწოდება (ნახ.1).



ნახ. 1

ე.ი. გრაფი – ეს არის წერტილთა და მათი შემაერთებელი ხაზების სიმრავლე. ამავე დროს სრულებით არა აქვს მნიშვნელობა პირდაპირი იქნება ეს ხაზები, თუ მრუდი, გრძელი გზით შევაერთებთ თუ მოკლე გზით. არ მიიღება მხედველობაში წერტილთა და შემაერთებელი ხაზების ადგილმდებარეობა. გრაფის ასეთ წარმოდგენას უწოდებენ – გრაფის მოცემის გეომეტრიულ ხერხს.

აღვნიშნოთ გრაფის წერტილთა სიმრავლე X–ით და ვუწოდოთ მას გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე. ცხადია, რომ ელემენტი $x\in X$ წარმოადგენს გრაფის მწვერვალს. გრაფის თითოეული ხაზი ერთმანეთთან აკავშირებს მის ორ x_i და x_j მწვერვალს. შესაბამისად, გრაფში არსებობს $(x_i\, x_j)$ სახის წყვილთა სიმრავლე. $(x_i\, x_j)$ წყვილი არის X სიმრავლის თავის თავზე დეკარტული ნამრავლის ელემენტი: $(x_i\, x_j)\in X\times X$

თუ აღვნიშნავთ გრაფს G-თი, მაშინ შეიძლება ჩავწეროთ:

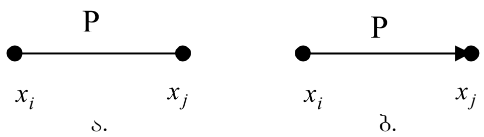
$$G\subseteq X\times X$$

ხაზს, რომელიც აერთებს გრაფის ორ მწვერვალს, ეწოდება წიბო. თუ გრაფის წიბოს აღვნიშნავთ P-თი, მაშინ $P=(x_i\ x_j)$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ მწვერვალები x_i და x_j არიან P წიბოს ინციდენტურები, ან P წიბო ინციდენტურია x_i და x_j მწვერვალების.

იმ შემთხვევაში თუ წიბოსათვის მწვერვალების მდებარეობის რიგს არა აქვს მნიშვნელობა, ასეთ წიბოს უწოდებენ არაორიენტირებულს. წინააღმდეგ შემთხვევაში წიბოს ეწოდება ორიენტირებული წიბო ანუ რკალი.

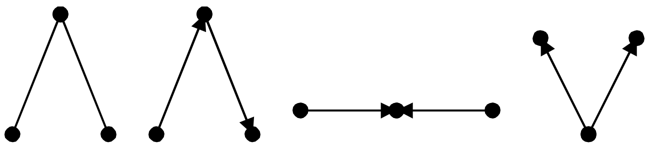
ორიენტაცია წიბოზე აღინიშნება ისრის საშუალებით (ნახ. 2. ა.ბ.)



ნახ. 2 ა) არაორიენტირებული წიბო
ბ) ორიენტირებული წიბო (რკალი).

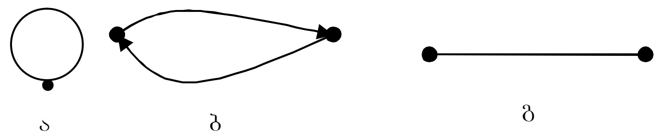
ნახ. 2 ბ) შემთხვევისათვის წიბო გამოდის x_i მწვერვალიდან, რომელსაც წიბოს საწყისი მწვერვალი ეწოდება და შედის x_j მწვერვალში, რომელსაც წიბოს საბოლოო მწვერვალი ეწოდება. ხშირ შემთხვევაში x_i და x_j მწვერვალებს უწოდებენ P წიბოს ბოლოებს, ან სასაზღვრო მწვერვალებს. თუ x_i მწვერვალი არცერთი წიბოს ინციდენტური არ არის, ასეთ მწვერვალს იზოლირებულ მწვერვალს უწოდებენ.

თუ ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ P_1 და P_2 წიბოს აქვთ ერთიდაიგივე სასაზღვრო მწვერვალი ასეთ წიბოებს მოსაზღვრე წიბოებს უწოდებენ. ამავე დროს, არა აქვს მნიშვნელობა წარმოადგენს თუ არა ეს მწვერვალი რომელიმე წიბოს საწყის ან საბოლოო მწვერვალს (ნახ.3).



ნახ. 3

ორ ერთმანეთისაგან განსხვავებულ მწვერვალს ეწოდება მოსაზღვრე მწვერვალები, თუ არსებობს მათი შემაერთებელი წიბო. წიბოს, რომლის საწყისი და საბოლოო მწვერვალები ერთმანეთს ემთხვევა ეწოდება მარყუჟი. (ნახ.4ა). თუ ორი ურთიერთსაწინააღმდეგოდ ორიენტირებული რკალი აერთებს ერთიდაიგივე მწვერვალებს (ნახ 4ბ), მაშინ ეს რკალები შეიძლება შეიცვალოს ერთი არაორიენტირებული რკალით (ნახ. 4გ).

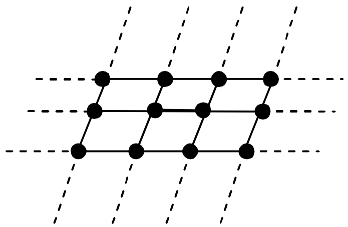


ნახ. 4

ორი მწვერვალი შეიძლება შეერთებული იყოს არა მხოლოდ ერთი, არამედ რამდენიმე რკალით. ამ შემთხვევაში მათ უწოდებენ ჯერად წიბოებს. თუ ორი მწვერვალი შეერთბულია რამდენიმე ორიენტირებული წიბოთი, მაშინ აუცილებელია ჯერადობა განისაზღვროს ორიენტაციის მიხედვით. მე-5 ნახაზზე მოცემულია ჯერადი წიბოების მაგალითი.

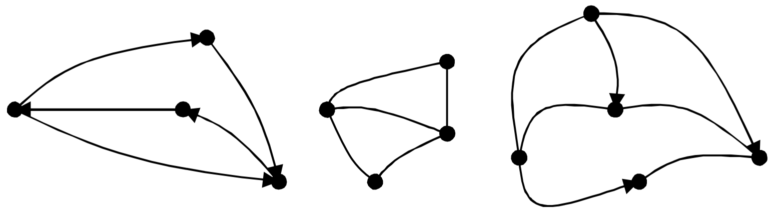
ნახ. 5

გრაფს, რომელიც შეიცავს წიბოთა სასრულ რაოდენობას, ეწოდება სასრული გრაფი. წინააღმდეგ შემთხვევაში უსასრულო. ნახ. 6-ზე მოცემულია უსასრულო გრაფის მაგალითი.



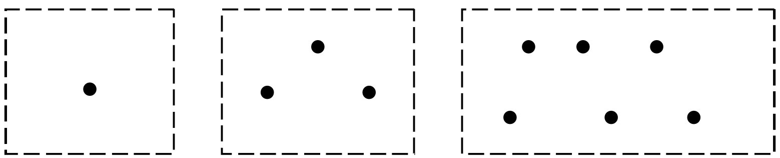
ნახ. 6

თუ გრაფი შეიცავს მხოლოდ ორიენტირებულ წიბოებს, ასეთ გრაფს ეწოდება ორიენტირებული გრაფი. გრაფს, რომელიც მხოლოდ არაორიენტირებულ წიბოებისაგან შედგება არაორიენტირებული გრაფი ეწოდება. არსებობს შერეული გრაფიც, რომელიც შეიცავს ორივე სახის წიბოებს. მე-7 ნახაზზე მოცემულია ორიენტირებული, არაორიენტირებული და შერეული გრაფის მაგალითები.



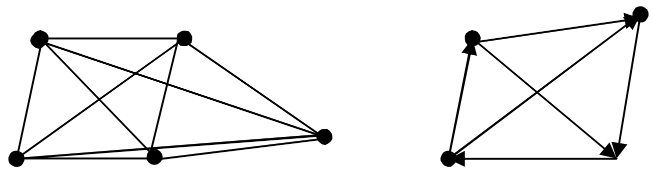
ნახ. 7

განიხილება ისეთი გრაფი, რომელიც შედგება მხოლოდ იზოლირებული მწვერვალებისაგან, მას ნული გრაფი ეწოდება (ნახ. 8).



ნახ. 8

გრაფს, რომლის ნებისმიერი ორი მწვერვალი შეერთებულია წიბოთი ეწოდება სრული გრაფი: ორიენტირებულ სრულ გრაფში ნებისმიერი ორი მწვერვალი შეერთებულია წიბოთი, რომელიც ორიენტირებულია თუნდაც ერთი მიმართულებით. მე-9 ნახ.-ზე მოცემულია სრული გრაფის მაგალითები.



ნახ. 9

ნებისმიერი ორიენტირებული G გრაფისათვის არსებობს უკუგრაფი G^* ანუ გრაფი, რომლის წიბოების ორიენტაცია მიმართულია საწყისი გრაფის წიბოების ორიენტაციის საწინააღმდეგოდ.

თუ გრაფის ყველა წიბო იკვეთება მხოლოდ მწვერვალებში, ასეთ გრაფს ეწოდება ბრტყელი გრაფი (ნახ. 10).

ნახ. 10

3.2. გრაფის მწვერვალთა ლოკალური ხარისხი

განვიხილოთ არაორიენტირებული გრაფი. მოცემული გრაფის x მწვერვალის ლოკალური ხარისხი $\rho(x)$, ეწოდება ამ

მწვერვალის ინციდენტური წიბოების რაოდენობას ანუ $\rho(x)=\sum_{y\in X}\rho(x,y)$, სადაც X გრაფის მწვერვალთა სიმრავლეა.

აღვნიშნოთ გრაფის მწვერვალთა რიცხვი n-ით, ხოლო წიბოების რაოდენობა N-ით. განვსაზღვროთ წიბოების რაოდენობა გრაფში, მისი მწვერვალების ლოკალური ხარისხის საშუალებით. ამისათვის, ავჯამოთ ყველა მწვერვალის ლოკალური ხარისხი. ცხადია, ამ ჯამში თითოეული წიბო ორჯერ იღებს მონაწილეობას. შესაბამისად ჯამი ტოლი იქნება:

$$\rho(x_1)+\rho(x_2)+\ldots+\rho(x_n)=2N \qquad (1)$$

საიდანაც $N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)$

გრაფის მწვერვალებს შეიძლება ჰქონდეს ლუწი ან კენტი ლოკალური ხარისხი. არსებობს შემდეგი თეორემა: გრაფში კენტ მწვერვალთა რიცხვი ყოველთვის ლუწია.

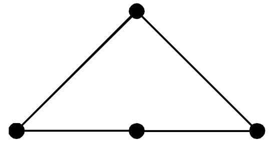
მართლაც, განვიხილოთ (1)-ჯამი. ეს ჯამი ყოველთვის ლუწია, ანუ $\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i)\equiv 0 \pmod 2$.

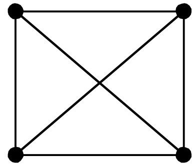
თუ ამ ჯამიდან ამოვიღებთ იმ შესაკრებებს, რომელიც ლუწი ლოკალური ხარისხის მქონე მწვერვალებს წარმოადგენს (თუ რა თქმა უნდა ასეთები არსებობს), შესაკრებებად დაგვრჩება კენტი ხარისხის მქონე მწვერვალები, რომელთა ჯამი მაინც ლუწი იქნება (რადგან ყოველი წიბო ჯამში ორჯერ მონაწილეობს); ელემენტარული მათემატიკიდან ცნობილია, რომ კენტ შესაკრებთა ჯამი ლუწია მაშინ, როცა შესაკრებთა რაოდენობა ლუწია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

ზოგიერთ არაორიენტირებულ გრაფში (ნახ. 11), ყველა მწვერვალის ლოკალური ხარისხი შეიძლება იყოს ტოლი

$$\rho(x_1)=\rho(x_2)=\ldots=\rho(x_n)=k$$

ასეთ გრაფებს k ხარისხის ერთგვაროვან ანუ რეგულარულ გრაფს უწოდებენ.

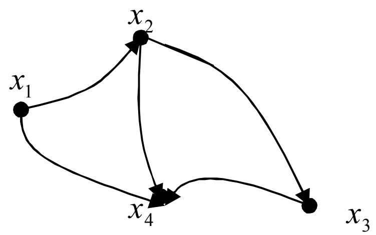




ნახ. 11

ერთგვაროვან არაორიენტირებულ n მწვერვალიან გრაფის წიბოთა რაოდენობა ტოლია: $N=\frac{1}{2}nk$.

ვთქვათ, G გრაფი ორიენტირებული გრაფია. ამ შემთხვევაში თითოეული x მწვერვალისათვის განასხვავებენ შემავალ და გამავალ ლოკალურ ხარისხებს. აღვნიშნოთ ისინი შესაბამისად $\rho'(x)$ და $\rho(x)$. მე-12 ნახ-ზე მოცემული გრაფისათვის მწვერვალთა ლოკალური ხარისხები იქნება:



ნახ. 12

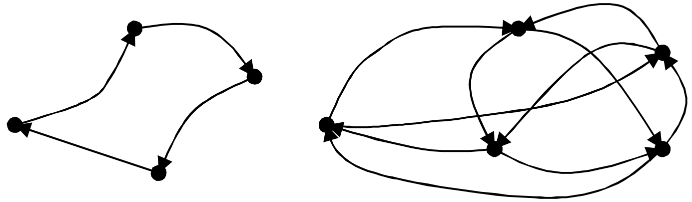
$\rho'(x_1)=0$, $\rho'(x_2)=1$, $\rho'(x_3)=1$, $\rho'(x_4)=3$, $\rho(x_1)=2$, $\rho(x_2)=2$, $\rho(x_3)=1$, $\rho(x_4)=0$ ე. ი. $\rho(x)=\sum_{y\in X}\rho(x,y)$ და $\rho'(x)=\sum_{y\in X}\rho'(x,y)$. რადგან თითოეული $\rho(x,y)$ წიბო მოცემული გრაფის x მწვერვალისათვის იქნება გამომავალი, ხოლო y მწვერვალისათვის შემავალი, ამიტომ ორიენტირებული გრაფის წიბოების რაოდენობა გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$N=\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i);\quad N=\sum_{i=1}^{n}\rho'(x_j)$$

ორიენტირებული გრაფებისათვისაც არსებობს ერთგვაროვანი გრაფი, რომლის მწვერვალთა ლოკალური ხარისხები, როგორც შემავალი, ისევე გამომავალი წიბოების მიხედვით ერთმანეთის ტოლია ანუ

$$\rho(x_i) = \rho'(x_j) = k$$

მე-13 ნახ-ზე მოცემულია 1 და 2 ხარისხის ორიენტირებული ერთგვაროვანი გრაფი.



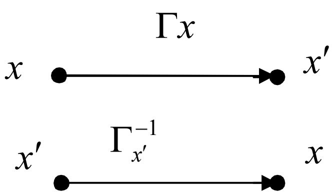
ნახ. 13

k ხარისხის ერთგვაროვანი ორიენტირებული გრაფის წიბოთა (რკალთა) რაოდენობა ტოლია $N = nk$.

თუ გრაფის მწვერვალებს აქვს მარყუჟები, მიღებულია რომ ისინი ჩაითვალოს ერთ წიბოდ.

3.3. ასახვები გრაფში. შემავალი და გამომავალი ნახევარხარისხები

განვიხილოთ G გრაფი X მწვერვალთა სიმრავლით. თუ გრაფზე მოცემულია ცალსახა ასახვა Γ, მაშინ ნებისმიერი მწვერვალისათვის შეიძლება ჩაიწეროს: $x : x \to x' = \Gamma x_1$. $x, x' \in X$. ანუ x მწვერვალი გადადის x' მწვერვალში, რომელიც განისაზღვრება როგორც Γx, სადაც Γx არის x მწვერვალის ასახვა. გრაფში (ნახ. 14.) Γ ცალსახა

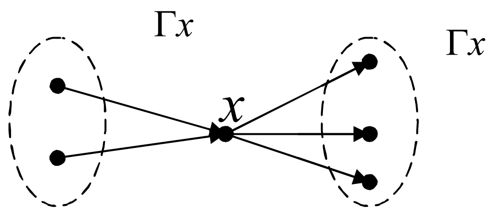


ნახ. 14

ასახვა წარმოადგენს ერთადერთ წიბოს, გამომავალს x მწვერვალიდან და შემავალს x' მწვერვალში. ამ შემთხვევაში x' მწვერვალს ეწოდება x მწვერვალის სახე Γ ასახვის დროს, უკუ ასახვის შემთხვევაში $x = \Gamma x$.

იმ შემთხვევაში, როცა გრაფზე მოცემულია მრავალსახა ასახვა, ნებისმიერი მწვერვალი აისახება მწვერვალთა X სიმრავლეში:

$\Gamma x \subseteq X$ (ნახ. 15).



ნახ. 15

თუ X არის მოცემული გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე, ხოლო Γ ურთიერთ მრავალსახა ასახვა ამ მწვერვალთა სიმრავლისა, მაშინ გამოსახულება $G = (X, \Gamma)$ განსაზღვრავს გრაფის ანალიზური ხერხით მოცემის ხერხს.

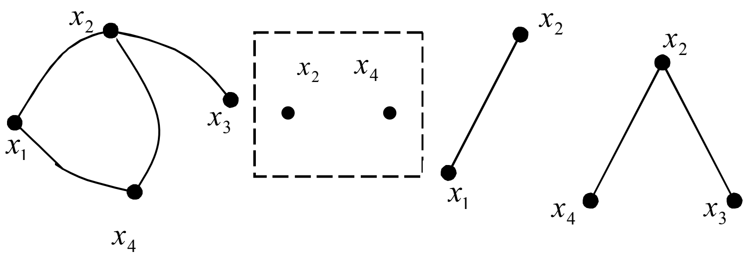
ხშირად გრაფის x_i მწვერვალიდან გამოსულ წიბოთა რიცხვს უწოდებენ x_i მწვერვალის გამომავალ ნახევარხარისხს, ხოლო x_i მწვერვალში შემავალ წიბოთა რიცხვს – შემავალ ნახევარხარისხს. აღვნიშნოთ x_i მწვერვალის გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები შესაბამისად $S(x_i)$ და $P(x_i)$ ან S_i და P_i; თუ x_i მწვერვალის ასახვა შეადგენს $x_j \in \Gamma x_i$-ს, მაშინ $S(x_i) = |\Gamma x_i|$, $P(x_i) = |\Gamma' x_i|$.

3.4. ნაწილები, ქვეგრაფი, სუგრაფი

ვთქვათ, მოცემულია $G=(X,\Gamma)$ გრაფი. $G_1=(X_1,\Gamma_1)$ გრაფს ეწოდება G გრაფის ნაწილი, თუ X შეიცავს X_1-ს და G_1 გრაფის წიბოები წარმოადგენენ ასევე G გრაფის წიბოებს ანუ $X_1 \subseteq X$ და $\Gamma_1 x \subseteq \Gamma x \bigcap X_1$.

გრაფის ნაწილი შეიძლება იყოს მისი ნებისმიერი მწვერვალი, ან ნებისმიერი წიბო, ან მათი ნებისმიერი შეთავსება.

მე-16 ნახ-ზე მოცემულია საწყისი გრაფი და მისი რამდენიმე ნაწილი.

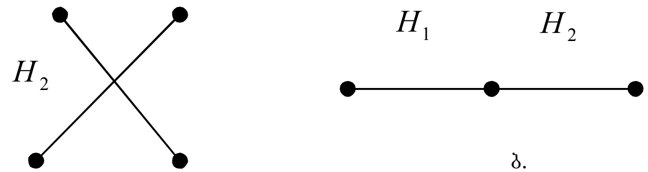


ნახ. 16

G გრაფის $\overline{H}$ ნაწილს, რომელიც შეიცავს G გრაფის ყველა იმ წიბოს, რომელიც არ მიეკუთვნება H ნაწილს, ეწოდება H ნაწილის დამატებითი ნაწილი, ანუ H ნაწილის დამატება. დამატება შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$\overline{H}=G-H$$

H_1 და H_2 ნაწილს ეწოდებათ არათანაკვეთადი მწვერვალების მიხედვით, თუ მათ არ აქვთ საერთო მწვერვალი. ცხადია, რომ მათ არ ექნებათ აგრეთვე საერთო წიბო (ნახ. 17ა). ისეთი ნაწილების გაერთიანებას, რომლებიც არათანაკვეთადი არიან მწვერვალების მიხედვით, ეწოდება მათი პირდაპირი ჯამი.



ა. ბ.

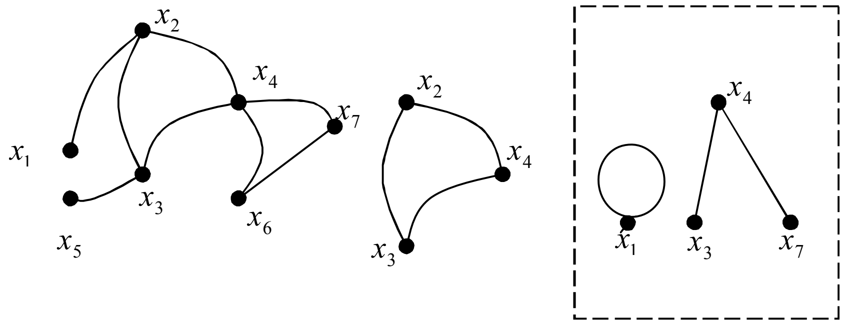
ნახ. 17

H_1 და H_2 ნაწილები წარმოადგენენ არათანაკვეთადს წიბოების მიხედვით, თუ მათ არ აქვთ საერთო წიბო (ნახ. 17ბ), ასეთი ნაწილების გაერთიანებას ეწოდება პირდაპირი ჯამი წიბოს მიხედვით.

მოცემულ $G=(X,\Gamma)$ გრაფში გამოვყოთ რომელიმე X_1 მწვერვალები. G გრაფის G_1 ქვეგრაფი ეწოდება G გრაფის იმ ნაწილს, რომელიც შეიცავს X_1 მწვერვალთა სიმრავლეს და G გრაფის იმ წიბოებს, რომელთა ორივე ბოლო მდებარეობს X_1 მწვერვალთა სიმრავლეში, ანუ:

$$X_1 \subseteq X,\ \Gamma_1 x = \Gamma x \bigcap X_1$$

საწყისი $G=(X,\Gamma)$ გრაფს ამ შემთხვევაში ეწოდება G_1 გრაფის ზეგრაფი. მე-18 ნახ-ზე მოცემულია საწყისი გრაფი და მისი რამდენიმე ქვეგრაფი.



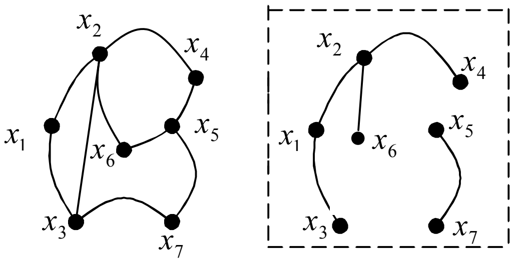
ნახ. 18

თუ გრაფი შეიცავს მხოლოდ ერთ მწვერვალს, მაშინ ქვეგრაფი იქნება მარყუჟი x მწვერვალში $x : x$

$G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ სუგრაფი მიიღება საწყისი $G = (X, \Gamma)$ გრაფიდან რამდენიმე წიბოს ამოღებით:

$$X_1 = X\ ,\ \ \Gamma_1 x \subset \Gamma x$$

მე-19 ნახაზზე მოცემულია საწყისი გრაფი და რამდენიმე სუგრაფის მიღების მაგალითი.



ნახ. 19

როგორც სიმრავლეთა თეორიაში, გრაფების თეორიაშიც არსებობს ცარიელი და უნივერსალური გრაფისა და ჩართვის ცნება. ისეთ გრაფს, რომლის მწვერვალთა სიმრავლე $X = \varnothing$, ეწოდება ცარიელი გრაფი. აღვნიშნოთ ცარიელი გრაფი Л–ით. G გრაფს ეწოდება უნივერსალური, თუ იგი არის სრული გრაფი და ყველა დანარჩენ გრაფთა სიმრავლე წარმოადგენს მის ქვეგრაფს. უნივერსალური გრაფი აღვნიშნოთ L-ით. უნივერსალური გრაფის სახით შეიძლება განვიხილოთ სრული გრაფი მოცემულ მწვერვალთა სიმრავლეზე.

ვთქვათ, მოცემულია ორი გრაფი $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$; ამავე დროს $x \in X_1$ და $x \in X_2$. გარდა ამისა, თუ Γ_2 არის Γ_1 ასახვის გაგრძელება X_2 სიმრავლეზე, მაშინ G_1 გრაფი ჩართულია G_2 გრაფში ან G_2 გრაფი მოიცავს G_1 გრაფს:

$$G_1 \subseteq G_2 \ \text{ან}\ G_2 \supseteq G_1$$

ამ შემთხვევაში ამბობენ, რომ G_2 გრაფი წარმოადგენს G_1 გრაფის გაგრძელებას, ხოლო G_1 გრაფი წარმოადგენს G_2 გრაფის შევიწროებას.

შეიძლება ითქვას, რომ: Л$\subseteq G$ და $G \subseteq G$

მაშინ სიმრავლეთა ანალოგიურად Л და G გრაფებს ეწოდება G გრაფის არასაკუთარი ქვეგრაფები, დანარჩენ მის ქვეგრაფებს ეწოდებათ საკუთარი ქვეგრაფები.

ვთქვათ, მოცემულია G_1, G_2, და G_3 გრაფები. მათთვის სამართლიანია შემდეგი მიმართება; თუ $G_1 \subseteq G_2$ და $G_2 \subseteq G_3$, მაშინ $G_1 \subseteq G_3$; თუ $G_1 \subseteq G_2$ და $G_2 \subseteq G_1$, მაშინ, $G_1 = G_2$.

განვიხილოთ რაიმე $G = (X, \Gamma)$ გრაფი. დავუშვათ, G_X არის სრული გრაფი X მწვერვალთა სიმრავლეზე; მაშინ G გრაფის დამატება ასახვით G_X გრაფამდე იქნება გრაფი $\overline{G} = (X, \overline{\Gamma})$. ამავე დროს $\overline{\Gamma} x = X \setminus \Gamma x, \quad x \in X$.

ვთქვათ, G_Y – არის სრული გრაფი Y მწვერვალთა სიმრავლეზე; მაშინ G გრაფის დამატება ასახვით G_Y გრაფამდე იქნება გრაფი $\overline{G} = (Y, \overline{\Gamma})$. ამასთან: $\overline{\Gamma} y = Y \setminus \Gamma y$, სადაც $y \in Y$. თუ $y \notin X$, მაშინ $\Gamma y = \varnothing$.

ახლა განვიხილოთ ორი გრაფი $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ დავუშვათ, $G_1 \subseteq G_2$. G_1 გრაფის დამატება ასახვით G_2 გრაფამდე იქნება გრაფი $\overline{G} = (X_2, \overline{\Gamma} x_2)$, სადაც $\overline{\Gamma} x_2 = \Gamma x_2 \setminus \Gamma x_1$, და $x_2 \in X_2$. თუ $x_2 \notin X_1$ მაშინ $\Gamma x_2 = \varnothing$.

3.5. გრაფის მოცემის მატრიცული ხერხი

გრაფი შეიძლება მოცემული იყოს სამი სახით: მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცის საშუალებით, წიბოთა ინციდენციის მატრიცის საშუალებით და რკალთა ინციდენციის მატრიცის საშუალებით. განვიხილოთ თითოეული ცალ-ცალკე.

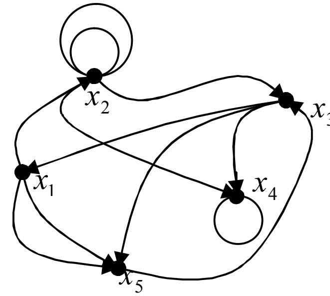
მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცა. ვთქვათ, მოცემულია $G=(X,\Gamma)$ გრაფი, სადაც X={x_1, x_2, . . ., x_n}. ამოვწეროთ ეს მწვერვალები სტრიქონებისა და სვეტების სახით (ნახ. 20) და ავაგოთ A მატრიცა შემდეგნაირად: მატრიცის i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილზე დაიწერება $a_{ij}=1$ ელემენტი, თუ არსებობს x_i მწვერვალიდან გამომვალი და x_j მწვერვალში შემავალი წიბო. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილზე დაიწერება ელემენტი $a_{ij}=0$, თუ არ არსებობს წიბო, რომელიც გამოდის x_i-დან და მიდის x_j მწვერვალში. თუ გრაფში არსებობენ ჯერადი წიბოები, მაშინ i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილზე იწერება $a_{ij=k}$ ელემენტი, სადაც k ტოლია x_i მწვერვალიდან გამოსული და x_j მწვერვალში შემავალი წიბოთა ჯერადობის.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & & \bullet \\ \bullet & \bullet & & \bullet \\ & & & \\ \cdot & & & \bullet \end{pmatrix} \end{array}$$

ნახ. 20

იმ შემთხვევაში, როცა გრაფის მწვერვალებში არსებობენ მარყუჟები, მაშინ მისი შესატყვისი ელემენტები მოთავსდებიან მატრიცის მთავარ დიაგონალზე. ასეთი წესით აგებულ მატრიცას უწოდებენ გრაფის მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცას. თუ გრაფი არაორიენტირებულია, მაშინ ცხადია მისი მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცა სიმეტრიული იქნება მთავარი

დიაგონალის მიმართ. მოვიყვანოთ მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცის აგების მაგალითი (ნახ. 21).



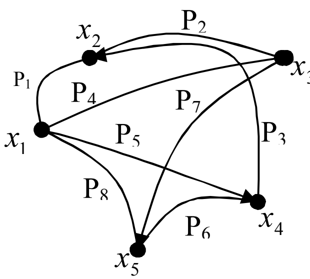
$$A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ნახ. 21

გრაფის წიბოთა ინციდენციის მატრიცა. ვთქვათ, მოცემულია $G=(X,\Gamma)$ გრაფი, რომლის მწვერვალები X={x_1, x_2, . . ., x_n}, ხოლო წიბოები: P ={P_1, P_2,. . ., P_m}. ამოვწეროთ x_1, x_2, . . ., x_n – მწვერვალები სვეტებად, P_1, P_2,. . ., P_m წიბოები –სტრიქონებად. ავაგოთ განსაზღვრული P მატრიცა შემდეგნაირად. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილზე ჩავსვათ ელემენტი $P_{ij}=1$, თუ P_j წიბო x_i მწვერვალის ინციდენტურია, ან $P_{ij}=0$ თუ P_j წიბო არაა x_i მწვერვალის ინციდენტური. ე.ი.

$$P_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ თუ } P_j \text{ ინციდენტურია } x_i \text{ მწვერვალის,} \\ 0, \text{ დანარჩენ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

ასეთი ხერხით მიღებულ მატრიცას ეწოდება გრაფის წიბოთა ინციდენციის მატრიცა. განვიხილოთ 22-ე ნახ.-ზე მოცემული გრაფისათვის წიბოთა ინციდენციის მატრიცის აგების მაგალითი.



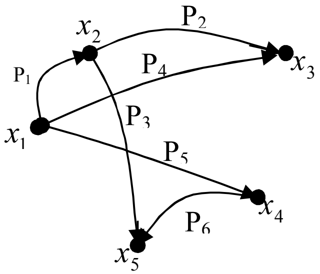
$$P=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5\ P_6\ P_7\ P_8 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ნახ. 22

გრაფის რკალთა ინციდენციის მატრიცა. განვიხილოთ $G=(X,\ \Gamma)$ გრაფი. სადაც, X=$\{x_1, x_2, \ . \ . \ ., x_n\}$, ხოლო რკალები P=$\{P_1, P_2, . \ . \ ., P_m\}$. ამოვწეროთ მწვერვალები სვეტებად, ხოლო რკალები სტრიქონებად. აღვნიშნოთ რკალთა ინციდენციის მატრიცა S–ით. განვსაზღვროთ ამ მატრიცის ელემენტები შემდეგნაირად.

$$S_{ij}=\begin{cases} +1, \text{ თუ } P_j \text{ რკალი გამოდის } x_i \text{ მწვერვალიდან,} \\ -1, \text{ თუ } P_j \text{ რკალი შედის } x_i \text{ მწვერვალში,} \\ 0, \text{ დანარჩენ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მოვიყვანოთ მატრიცის აგების მაგალითი 23-ე ნახ.-ზე მოცემული გრაფისათვის.

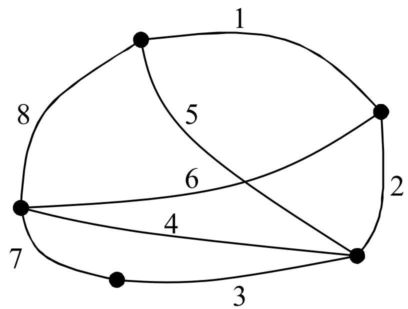


$$S=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\begin{array}{c} P_1\ \ P_2\ \ P_3\ \ P_4\ \ P_5\ \ P_6 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

ნახ. 23

3.6. მოსაზღვრე გრაფები

განვიხილოთ $G=(X,\ \Gamma)$ არაორიენტირებული გრაფი (ნახ. 24). ვთქვათ, მასში არ არსებობს მარყუჟი და ჯერადი წიბო. მოცემული გრაფისათვის ავაგოთ განსაზღვრული $B(G)$ მატრიცა შემდეგნაირად. დავნომროთ გრაფის წიბოები მთელი რიცხვებით, რომლის შემდეგ ამოვწეროთ ისინი სტრიქონებისა და სვეტების საშუალებით. i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილას ჩავსვათ ელემენტი B_{ij}=1 თუ ორი P და P' წიბო საწყის გრაფში წარმოადგენს მოსაზღვრე წიბოებს (აქვთ საერთო მწვერვალი). i-ური სტრიქონისა და j-ური სვეტის გადაკვეთის ადგილას ჩავსვათ ელემენტი B_{ij}=0, თუ ორი P და P' წიბო თანაკვეთადია ან არ აქვთ საერთო მწვერვალი. ასეთი სახით მიღებულ $B(G)$ მატრიცას ეწოდება გრაფის მოსაზღვრეობის მატრიცა. მოცემული გრაფისათვის (ნახ. 24) მოსაზღვრეობის მატრიცას ექნება შემდეგი სახე:



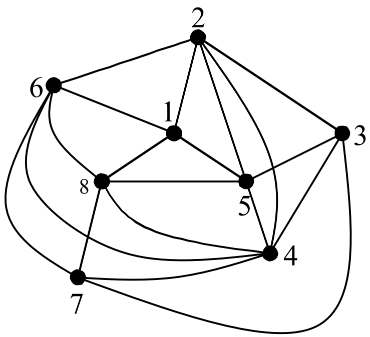
ნახ. 24

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array}\begin{array}{c} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

საწყისი G გრაფის წიბოთა მოსაზღვრეობის მატრიცა, ამავე დროს, წარმოადგენს ახალი გრაფის მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცას, რომლის მწვერვალები იქნება საწყისი გრაფის წიბოები,

ხოლო წიბოები იქნება ისეთი P და P' წიბოთა წყვილები, რომელთათვისაც $b_{ij}=1$ ანუ, რომელთაც აქვთ საერთო მწვერვალი საწყის გრაფში. ამ ახალ გრაფს ეწოდება საწყისი G გრაფის მოსაზღვრე გრაფი. აღვნიშნოთ იგი $B(G)$-თი მოსაზღვრე $B(G)$ გრაფი აიგება საწყისი გრაფიდან შემდეგნაირად; საწყისი G გრაფის წიბოთა შუა წერტილები Cp აღინიშნებიან რიცხვებით შემდეგ ეს რიცხვები ნებისმიერად განლაგდებიან სიბრტყეზე წერტილების სახით. ეს წერტილები წარმოადგენენ მოსაზღვრე გრაფის მწვერვალებს. ამის შემდეგ, იმ წერტილებს, რომლებიც წარმოადგენენ საწყისი G გრაფის იმ წიბოთა შუა წერტილებს – Cp რომელთაც აქვთ საერთო მწვერვალი, შეაერთებენ წიბოთი. მოსაზღვრე გრაფს, რომელიც 24-ე ნახ.-ზე მოცემული გრაფისათვის $B(G)$ მატრიცის მიხედვითაა აგებული აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 25). იმ გრაფისათვის, რომელიც შეიცავს ერთადერთ წიბოს მოსაზღვრე გრაფი არ აიგება.

განვიხილოთ $B(G)$ მოსაზღვრე გრაფის აგების მაგალითი საწყისი G გრაფიდან მისი მწვერვალების ლოკალური ხარისხის მიხედვით. ავიღოთ G გრაფის $P=(x,x')$ წიბო, დაუშვათ $P(x)$ და $P(x')$ წარმოადგენს შესაბამისად x და x' მწვერვალთა ლოკალურ ხარისხებს. მოსაზღვრე გრაფში P წიბოს შუა წერტილი Cp იქნება შეერთებული საწყისი გრაფის დანარჩენი იმ წიბოების $P(x)-1$ შუა წერტილებთან, რომლებსაც აქვთ x მწვერვალში საერთო დაბოლოება. მიღებულ ქვეგრაფს მოსაზღვრე გრაფში შევავსებთ სრულ $G(x)$ გრაფამდე, რომელსაც ექნება $P(x)$ მწვერვალი. ანალოგიურად, P წიბოს შუა წერტილი Cp იქნება შეერთებული

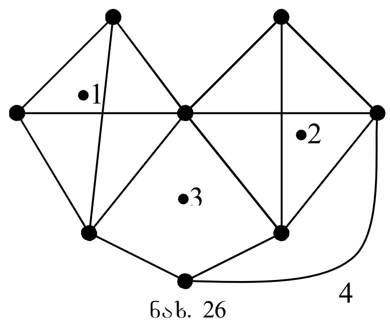


ნახ. 25

საწყისი გრაფის დანარჩენი იმ წიბოების $P(x')-1$ შუა წერტილებთან, რომლებსაც აქვთ x' მწვერვალში საერთო დაბოლოება. მიღებულ ქვეგრაფს მოსაზღვრე გრაფში, აგრეთვე შევავსებთ $G(x')$ სრულ გრაფამდე, რომელსაც ექნება $P(x')$ მწვერვალი. $G(x)$ და $G(x')$ სრულ გრაფებს მოსაზღვრე გრაფში ექნებათ მხოლოდ ერთი საერთო Cp მწვერვალი. ასეთი აგების საფუძველზე მოსაზღვრე გრაფში მიიღება ორი $G(x)$ და $G(x')$ სრული გრაფი, რომლებიც არიან არათანაკვეთადი წიბოების მიმართ:

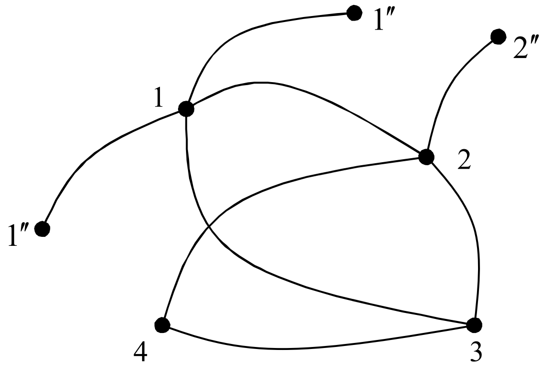
$$B(G)=\bigcup_{x\in X} G(x)$$

ახლა განვიხილოთ საწყისი გრაფის აგების მაგალითი მოსაზღვრე გრაფიდან. ვთქვათ, მოცემულია მოსაზღვრე გრაფი $B(G)$ (ნახ. 26); ეს ნიშნავს, რომ არსებობს $B(G)$ დაყოფა $G(x)$ და $G(x')$ სრულ გრაფებად, რომლებსაც აქვს მხოლოდ ერთი საერთო მწვერვალი. დავუშვათ, $P(x)$ არის $G(x)$-ის მწვერვალთა რაოდენობა $B(G)$-ში, ხოლო $P_1(x)$ წარმოადგენს $G(x)$-ის საერთო მწვერვალთა რაოდენობას სხვა სრულ მწვერვალებთან $B(G)$-ში. საერთოდ, $P_1(x)\le P(x)$. თითოეულს $G(x)$ და $G(x')$ სრული გრაფის შიგნით ავიღოთ წერტილები და აღვნიშნოთ ისინი მთელი რიცხვებით. შემდეგ ეს წერტილები დავიტანოთ ნებისმიერად სიბრტყეზე. მიღებული წერტილები შევაერთოდ წიბოებით (ნახ. 27). იმ შემთხვევაში, როცა მათ შესაბამის $G(x)$ და $G(x')$ სრულ გრაფებს აქვთ საერთო მწვერვალი $B(G)$-ში. იმ შემთხვევაში როცა გრაფში



ნახ. 26

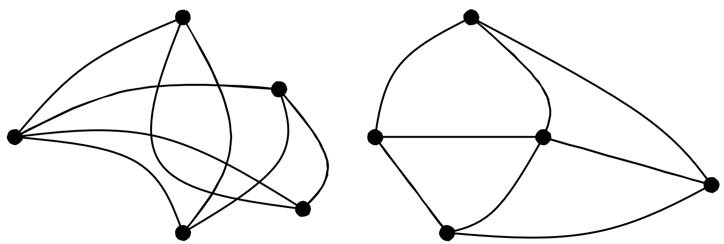
$P_1(x) < P(x)$, x მწვერვალში დავამატოთ წიბო, რომლის რიცხვი ტოლი იქნება, $P(x) - P_1(x)$-ის ეს წიბოები წავლენ x'' მწვერვალებში, რომლებშიც იარსებებენ მხოლოდ ეს წიბოები.



ნახ. 27

3.7. გრაფების იზომორფიზმი

ორი გრაფი წარმოადგენს იზომორფულს, თუ ისინი შეიცავენ მწვერვალთა ერთნაირ რაოდენობას და მწვერვალები ერთ გრაფში შეერთებული არიან წიბოთი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა მეორე გრაფის შესატყვისი მწვერვალებიც ასევე შეერთებულია წიბოთი. იზომორფული გრაფები განსხვავდებიან ერთმანეთისგან მხოლოდ და მხოლოდ მწვერვალთა ნუმერაციით. მაგალითად, 28-ე ნახ.-ზე მოცემული გრაფები წარმოადგენს იზომორფულს.



ნახ. 28

თუ გრაფის მწვერვალთა რაოდენობა ტოლია n-ის, მაშინ იზომორფიზმის გამოსავლენად საჭიროა მწვერვალებს შორის ჩატარდეს $n!$ (ფაქტორიალი) წყვილად შედარება, რაც n-ის მცირე მნიშვნელობის შემთხვევისათვისაც კი საკმაოდ დიდ რიცხვს წარმოადგენს და არაეფექტურია. ზოგიერთ შემთხვევაში, იზომორფიზმის დასადგენად ორი გრაფისათვის მიმართავენ ქვემოთ მოყვანილ მეთოდს. განვიხილოთ იგი. ვთქვათ, გვაქვს შემდეგი ორი გრაფი $G_1 = (X, \Gamma_1)$ და $G_2 = (Y, \Gamma_2)$; ისინი იქნებიან იზომორფული, თუ $X \sim Y$ ან $X \subseteq Y$ და $Y \subseteq X$; ამავე დროს, ნებისმიერი მწვერვალისათვის $x \in X$ და $y \in Y$ ადგილი ექნება $\Gamma_1 x \sim \Gamma_2 y$. დავუშვათ, $X = \{x_i\}$ და $Y = \{y_i\}$, სადაც $i = \overline{1,n}$ და $j = \overline{1,n}$. ასევე s_i და p_i წარმოადგენს x_i მწვერვალის გამომავალ და შემავალ ნახევარხარისხებს, ხოლო v_j და w_j – y_j მწვერვალის გამომავალ და შემავალ ნახევარხარისხებს.

მოვიყვანოთ შემდეგი ორი ლემა.

ლემა 1. თუ ორი გრაფი G_1 და G_2 იზომორფულია, მაშინ არსებობს $t \in T$ ჩასმა, სადაც T წარმოადგენს ჩასმათა სიმეტრიულ ჯგუფს, რომელიც G_1 გრაფის თითოეულ x_i მწვერვალს აყენებს ურთიერთცალსახა შესაბამისობაში G_2 გრაფის y_j მწვერვალთან ისე, რომ $s_i = v_j$ და $p_i = w_j$.

დავამტკიცოთ ეს ლემა. დავუშვათ, G_1 და G_2 გრაფები არიან იზომორფულები. ცნობილია, რომ ორი იზომორფული გრაფი ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ მწვერვალთა ნუმერაციით, მაგრამ ნუმერაცია ვერ შეცვლის მწვერვალთ შემავალ და გამომავალ ნახევარ ხარისხებს. აქედან გამომდინარეობს, რომ G_1 გრაფის $x_i(s_i, p_i)$ მწვერვალისათვის აუცილებლად მოიძებნება G_2 გრაფის ისეთი $y_i(v_j, w_j)$ მწვერვალი, რომლისათვისაც

$s_i = v_j$ და $p_i = w_j$; ეს ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი t ჩასმა, რომელსაც გადაყავს G_1 გრაფი G_2 გრაფში.

ლემა 2. თუ არსებობს ჩასმა $t \in T$, რომელსაც გადაყავს G_1 გრაფის მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცა G_2 გრაფის მწვერვალთა მოსაზღვრეობის მატრიცაში, მაშინ მოცემული გრაფები არიან იზომორფულები. ამ ლემის დამტკიცება გამომდინარეობს უშუალოდ გრაფების იზომორფულობის განმარტებიდან. და ბოლოს მოვიყვანოთ გრაფების იზომორფულობის გამოსავლინებელი თეორემა: იმისათვის, რომ G_1 და G_2 გრაფები იყვნენ იზომორფულები, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი ორი პირობის შესრულება.

1. $(\forall x_i \in X)(\exists y_j \in Y)((s_i = v_j) \wedge (p_i = w_j))$;
2. $\exists\, t \in T$, რომელსაც გადაყავს G_1 გრაფი G_2 გრაფში.

ზემოთ მოყვანილი ლემები ამტკიცებენ თეორემის ორივე პირობებს.

მოყვანილი თეორემა განსაზღვრავს G_1 და G_2 გრაფის იზომორფულობის გამოვლენის შემდეგ ალგორითმს. მოვიყვანოთ მოცემული ალგორითმის ბიჯები:

1. განისაზღვრება ორი გრაფის მწვერვალთა რაოდენობა. თუ G_1 და G_2 გრაფის მწვერვალების რიცხვი ტოლია, მაშინ გადავდივართ მეორე ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში მეექვსე ბიჯზე;
2. ამოიწერება G_1 და G_2 გრაფის მწვერვალები მათი ნუმერაციის ზრდადობის მიხედვით და ორივე გრაფი თითოეული მწვერვალისათვის განისაზღვრება s_i და v_j გამომავალი, და შემავალი p_i და w_j ნახევარხარისხები, რომლის შედეგად გადავდივართ მესამე ბიჯზე;
3. ამ ბიჯზე G_1 გრაფის თითოეული x_i მწვერვალისათვის მოიძებნება G_2 გრაფის ისეთი y_j მწვერვალი, რომ შესრულდეს თეორემის პირველი პირობა. ამის შემდეგ x_i და y_j მწვერვალებს შევაერთებთ შესატყვისი გრაფის წიბოთი. თუ თეორემის პირველი პირობა არ სრულდება არცერთი წყვილი მწვერვალისათვის, მაშინ გადავდივართ მეექვსე ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ მეოთხე ბიჯზე;
4. შესატყვისი გრაფიდან განისაზღვრება t – ჩასმა. თუ ამ დროს სრულდება თეორემის მეორე პირობა, ამ შემთხვევაში გადავდივართ მეხუთე ბიჯზე, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადავდივართ მეექვსე ბიჯზე;
5. გრაფები იზომორფულია;
6. გრაფები არ არიან იზომორფული.

დავუშვათ, რომ G_1 და G_2 გრაფებს აქვთ k: მწვერვალები, რომლებსაც გააჩნიათ ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ამასთან ერთად $k < n$ რა თქმა უნდა, ამ შემთხვევაში აუცილებელია შემოწმდეს თეორემის მეორე პირობის შესრულება $k!$ ჩასმისათვის, რომელსაც მივყავართ შედარებათა დიდ რიცხვთან.

ამ რიცხვის შემცირებისათვის გამოიყენება სპეციალური მეთოდი. განვიხილოთ მისი არსი. გამოვყოთ n მწვერვალიანი გრაფიდან k მწვერვალები, რომელთაც აქვთ ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ჯერ განვიხილავთ იმ $(n\text{-}k)$ მწვერვალებს, რომელთაც გააჩნიათ განსხვავებული გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ამ მწვერვალებისათვის ვამოწმებთ თეორემის პირველი პირობის შესრულებას. ორივე გრაფის იმ წვერვალებს, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამ პირობას, შევაერთებთ შესატყვისი გრაფის წიბოებით, რომელიც განსაზღვრავს ნაწილობრივ ჩასმას.

შემდეგ განვიხილავთ მწვერვალებს, რომელთაც გააჩნიათ ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ამ მწვერვალებისათვის განისაზღვრება X' და Y' სიმრავლე. X' სიმრავლე შეიცავს საწყისი G_1 გრაფის მწვერვალებს, რომლებიც წარმოადგენენ k მწვერვალებში შემავალ x_i მწვერვალების, Γ_1 ასახვებს. Y' სიმრავლე შეიცავს G_2 გრაფის მწვერვალებს, რომლებიც წარმოადგენენ k მწვერვალებში შემავალ y_j მწვერვალების Γ_2 ასახვებს. X' და Y' სიმრავლეები მიეწერება k მწვერვალებში შემავალ $x_i \in X$ და $y_j \in Y$ მწვერვალებს. მწვერვალებს: $x_i \in X'$ მიეწერება მწვერვალები $y_j \in Y'$, რომლებიც განისაზღვრებიან ნაწილობრივი ჩასმით. ამის შემდეგ ის მწვერვალები $x_i \in X$ და $y_j \in Y$, რომელთა Y' სიმრავლე ერთნაირია, შეერთდება შესატყვისი გრაფის წიბოთი.

შეიძლება მოხდეს ისე, რომ k' მწვერვალებს შორის აღმოჩნდეს ისეთი $\ell \leq k$ მწვერვალები, რომელთათვისაც Y' სიმრავლე იქნება ერთნაირი. ამ შემთხვევაში ვიქცევით შემდეგნაირად. მწვერვალებისათვის $x_i \in X$ და $y_j \in Y$, რომლებიც შედიან ℓ მწვერვალებში, განისაზღვრება X'' და Y'' სიმრავლე. $x_i \in X''$ მწვერვალები წარმოადგენენ x_i და y_j მწვერვალების უკუ ასახვებს Γ_1^{-1} და Γ_2^{-2}, რომლებიც შედიან ℓ მწვერვალებში. $x_i \in X''$ მწვერვალებს მიუწერენ $y_j \in Y''$ მწვერვალებს განსაზღვრულს ადრე მიღებული ნაწილობრივი ჩასმით. ამის შემდეგ, ისეთ $x_i \in X$ და $y_j \in Y$ მწვერვალებს, რომელთაც Y'' სიმრავლე ერთნაირი აქვთ შეაერთებენ შესატყვისი გრაფის წიბოთი. შედეგად ვღებულობთ ერთ ან რამდენიმე ჩასმას $k!$ ჩასმის მაგივრად, რომლის შემდეგ შემოწმდება თეორემის მეორე პირობა.

ახლა მოვიყვანოთ G_1 და G_2 გრაფის იზომორფულობის განსაზღვრის განზოგადებული ალგორითმი:

ბიჯი 1. განისაზღვრება ორივე გრაფის მწვერვალთა რაოდენობა. თუ მწვერვალთა რიცხვი ტოლია გადავდივართ მეორე ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში მეექვსეზე;

ბიჯი 2. ამოიწერება ორივე გრაფის მწვერვალები მათი ნუმერაციის ზრდადობის მიხედვით და G_1 და G_2 გრაფის თითოეული მწვერვალისათვის განისაზღვრება გამომავალი s_i და v_j და შემავალი p_i და w_j ნახევარხარისხი და გადავდივართ მესამე ბიჯზე;

ბიჯი 3. თუ გრაფის ყველა მწვერვალს გააჩნია განსხვავებული გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები, მაშინ მათთვის მოწმდება თეორემის პირველი პირობა. თუ ეს პირობა სრულდება გრაფის ყველა მწვერვალისათვის, გადავდივართ მეოთხე ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში მეექვსე ბიჯზე;

იმ შემთხვევაში, როცა გრაფის n მწვერვალთა შორის არსებობს k მწვერვალები ($k < n$), რომელთაც აქვთ ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები, მაშინ თავიდან განიხილებიან ის მწვერვალები, რომელთაც აქვთ სხვადასხვა გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ამ მწვერვალებისათვის მოწმდება თეორემის პირველი პირობა. თუ ეს პირობა სრულდება, მაშინ ამ მწვერვალებს ვაერთებთ შესატყვისი გრაფის წიბოთი. შედეგად მიიღება ნაწილობრივი ჩასმა. ამის შემდეგ, აუცილებელია გადავიდეთ 3ა ბიჯზე. თუ პირველი პირობა არ სრულდება, თუნდაც ერთი წყვილი მწვერვალისათვის, მაშინ გადავდივართ მეექვსე ბიჯზე.

ბიჯი 3ა. ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხების მქონე მწვერვალებისათვის ვატარებთ ზემოთ აღწერილ პროცედურას. ამის შემდეგ, ვღებულობთ ერთ ან რამდენიმე ჩასმას $k!$ ჩასმის მაგიერ, რომლის შემდეგ გადავდივართ მეოთხე ბიჯზე.

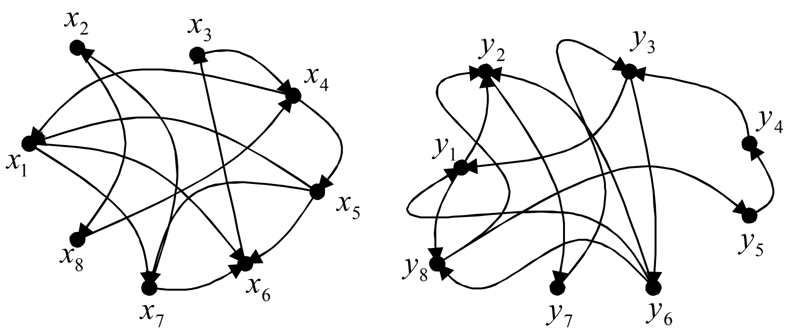
ბიჯი 4. ვპოულობთ t ჩასმას, რომელიც განისაზღვრება შესატყვისი გრაფით. თუ სრულდება თეორემის მეორე პირობა, მაშინ აუცილებელია გადავიდეთ მეხუთე ბიჯზე. წინააღმდეგ შემთხვევაში მეექვსე ბიჯზე.

ბიჯი 5. G_1 და G_2 გრაფები იზომორფულია.

ბიჯი 6. G_1 და G_2 გრაფები არ არის იზომორფული.

განვიხილოთ ორი გრაფის იზომორფულობის მაგალითი.

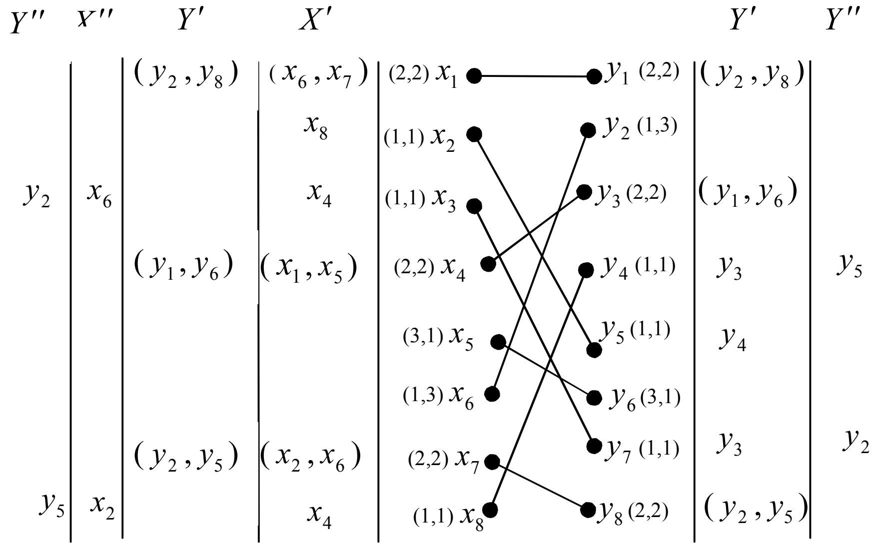
ვთქვათ, $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ გრაფებს აქვს შემდეგი სახე (ნახ.29).



G₁ G₂

ნახ. 29

ვმოქმედებთ რა ალგორითმის I და II ბიჯის თანახმად, ვამოწმებთ გრაფების მწვერვალთა რაოდენობას, ამოვწერთ მწვერვალებს მათი ნუმერაციის ზრდის მიხედვით და მივუწერთ მათ გამომავალ და შემავალ ნახევარხარისხებს (ნახ.30).



ნახ. 30

ალგორითმის მესამე ბიჯის თანახმად ჯერ ვამოწმებთ თეორემის I პირობას იმ მწვერვალებისათვის რომელთაც გააჩნიათ განსხვავებული გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები. ეს მწვერვალებია – x_5, x_6, y_2, y_6, შევაერთებთ მათ შესატყვისი გრაფის წიბოებით $1 \div 2$ და მივიღებთ ნაწილობრივ ჩასმას: (x_5, y_6) და (x_6, y_2). იმ მწვერვალებისათვის, რომლის გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები ერთნაირია ვპოულობთ Γ_1 და Γ_2 ასახვებს. გამოვიყენებთ რა ადრე მიღებულ ნაწილობრივ ჩასმას, ვსაზღვრავთ ახალ ნაწილობრივ ჩასმას და ვაგებთ შესატყვისი გრაფის $3 \div 6$ წიბოს. x_2, x_8, y_4, y_4 მწვერვალებისათვის ვსაზღვრავთ Γ_1^{-1} და Γ_2^{-1} უკუ ასახვებს. თავიდან ვსარგებლობთ მიღებული ნაწილობრივი ჩასმით და ვაგებთ შესატყვისი გრაფის ახალ $7 \div 8$ წიბოს.

მოცემული გრაფებისათვის t ჩასმას ექნება შემდეგი სახე:

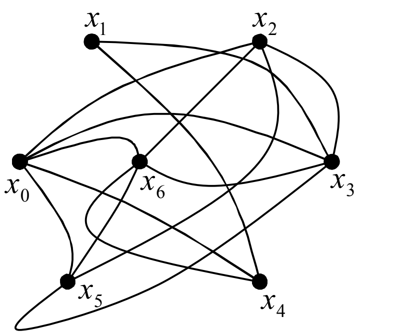
$$t = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \\ y_1 & y_5 & y_7 & y_3 & y_6 & y_2 & y_8 & y_4 \end{pmatrix}$$

მოცემული ჩასმა აკმაყოფილებს თეორემის მეორე პირობას. თანახმად ამისა, G_1 და G_2 გრაფები არიან იზომორფული. მოცემული ალგორითმის გამოყენებას არ აქვს აზრი იმ შემთხვევაში, როცა გრაფის ყველა მწვერვალს აქვთ ერთნაირი გამომავალი და შემავალი ნახევარხარისხები.

დაკავშირება გრაფებში

3.8. მარშრუტი. წრედი. ციკლი

ვთქვათ, მოცემულია G გრაფი, დავუშვათ, იგი არაორიენტირებულია (ნახ. 31). გრაფში წიბოთა თანმიმდევრობას ეწოდება მარშრუტი. თუ მასში ყოველი წინამდებარე წიბოს დასასრული წარმოადგენს მომდევნო წიბოს დასაწყისს. მარშრუტში ერთი და იგივე მწვერვალი და წიბო შეიძლება შეგვხვდეს რამდენიმეჯერ. თუ მარშრუტს აღვნიშნავთ M-ით, მაშინ იგი შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგნაირად:



ნახ. 31

$$M=(P_1,P_2,P_3,...,P_n),$$

სადაც $P_1 \div P_n$ მარშრუტის წიბოებია. თუ x_0 წარმოადგენს $P=(x_0,x_1)$ წიბოს დასაწყისს, მაშინ მას უწოდებენ მარშრუტის საწყის მწვერვალს. ანალოგიურად, $P_n=(x_{n-1},x_n)$ წიბოს x_n მწვერვალს უწოდებენ მარშრუტის საბოლოო მწვერვალს. მარშრუტის ყველა დანარჩენი მწვერვალები წარმოადგენენ შიდა მწვერვალებს. მარშრუტი,

რომელსაც აქვს x_0 და x_n ბოლოები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირადაც: $M=M(x_0,x_n)$.

თუ მარშრუტი შეიცავს n რაოდენობის წიბოს, მაშინ მისი სიგრძე უდრის n-ს. განზოგადოებისათვის შემოაქვთ ნული მარშრუტის ცნება. ეს მარშრუტი არ შეიცავს წიბოებს. თუ მარშრუტში საწყისი და საბოლოო მწვერვალები ერთმანეთს ემთხვევა ანუ $x_0=x_n$, მაშინ ასეთ მარშრუტს უწოდებენ ჩაკეტილს ანუ ციკლურს.

თუ მარშრუტში ყველა წიბო სხვადასხვაა, მაშინ ასეთ მარშრუტს წრედი ეწოდება. წრედში ერთი და იგივე მწვერვალი შეიძლება შეგვხვდეს რამდენიმეჯერ. თუ წრედში ყველა წიბო და ყველა მწვერვალი გვხვდება მხოლოდ ერთჯერ, მაშინ ასეთ წრედს უწოდებენ მარტივს.

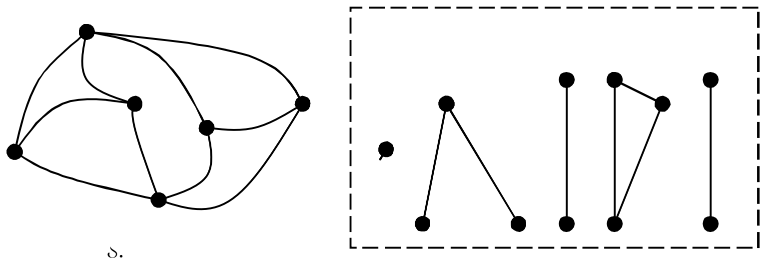
თუ წრედში საწყისი და საბოლოო მწვერვალები ემთხვევა ერთმანეთს, მაშინ ასეთ წრედს ციკლი ეწოდება. და ბოლოს, თუ ციკლში ყველა მწვერვალი სხვადასხვაა, მაშინ ასეთ ციკლს ეწოდება მარტივი. მოცემული გრაფისათვის: (ნახ. 31). $(x_0\,x_3\,x_6\,x_5\,x_6\,x_3\,x_2)$ არის მარშრუტი; $(x_1\,x_3\,x_5\,x_2\,x_3\,x_6)$ არის წრედი; $(x_1\,x_3\,x_6\,x_5\,x_2\,x_0)$ არის მარტივი წრედი; $(x_2\,x_0\,x_3\,x_6\,x_5\,x_3\,x_2)$ არის ციკლი; $(x_0\,x_3\,x_5\,x_2\,x_0)$ მარტივი ციკლია.

ანალოგიური ცნება შემოდის ორიენტირებული გრაფისათვისაც. ორიენტირებულ გრაფში რკალთა ისეთ თანმიმდევრობას, როდესაც ყოველი წინამდებარე რკალის დასასრული წარმოადგენს მომდევნო რკალის დასაწყისს, გზა ეწოდება. ანსხვავებენ მარტივ და შედგენილ გზას. მარტივ გზაში ყველა რკალები განსხვავდებიან, მხოლოდ მწვერვალები შეიძლება განმეორდეს. შედგენილ გზაში რკალები შეიძლება გვხვდებოდეს რამდენიმეჯერ. ისეთ გზას, რომელშიც ყველა მწვერვალი სხვადასხვაა, ელემენტარული გზა ეწოდება. ორიენტირებული გრაფებისათვის შემოდის კონტურის ცნება. კონტური არის ისეთი

გზა, სადაც საწყისი და საბოლოო მწვერვალები ემთხვევა ერთმანეთს. თუ კონტურის ყველა მწვერვალი სხვადასხვაა, მაშინ მას ელემენტარული კონტური ეწოდება. და ბოლოს, გზის სიგრძე განისაზღვრება მისი რკალების მიხედვით.

3.9. დამაკავშირებელი კომპონენტები

განვიხილოთ არაორიენტირებული $G=(X,\ \Gamma)$ გრაფი. ავიღოთ მასში ნებისმიერი x_i და x_j მწვერვალები. თუ არსებობს წრედი, რომელიც აკავშირებს ამ მწვერვალებს, მაშინ მათ ეწოდებათ დაკავშირებული. თვით გრაფი G იქნება დაკავშირებული, თუ მისი ორი ნებისმიერი მწვერვალი შეიძლება დაკავშირდეს წრედით. წინააღმდეგ შემთხვევაში გრაფი იქნება არადაკავშირებული. ავიღოთ G გრაფის ნებისმიერი x მწვერვალი. x მწვერვალს და G გრაფის იმ სხვა მწვერვალთა სიმრავლეს, რომელთანაც x მწვერვალი შეიძლება დავაკავშიროთ წრედებით, მათი ინციდენტური წიბოების სიმრავლესთან ერთად ეწოდება x მწვერვალის Cx დამაკავშირებელი კომპონენტა. 32ა-ე ნახაზზე მოცემულია გრაფი ერთი დამაკავშირებელი კომპონენტათი, ხოლო 38ბ-ნახაზზე მოცემული გრაფი შეიცავს ხუთ დამაკავშირებელ კომპონენტას.



ა. ნახ. 32 ბ.

დაკავშირება გრაფში ამყარებს განსაზღვრულ დამოკიდებულებას (ბინარული დამოკიდებულება) გრაფის ორ

ნებისმიერ მწვერვალს შორის. განვიხილოთ დაკავშირების დამოკიდებულების თვისება. ვთქვათ, G არის დაკავშირებული გრაფი, თუ მოცემული გრაფის x მწვერვალი დაკავშირებულია y მწვერვალთან წრედით, მაშინ ეს ნიშნავს, რომ y მწვერვალიც ასევე დაკავშირებული იქნება x მწვერვალთან წრედით, შესაბამისად, დაკავშირების დამოკიდებულებას აქვს სიმეტრიულობის თვისება.

თუ x მწვერვალი დაკავშირებულია y მწვერვალთან და y დაკავშირებულია z მწვერვალთან, მაშინ აქედან გამომდინარეობს, რომ x დაკავშირებული იქნება z მწვერვალთან. ეს იმას ნიშნავს, რომ დაკავშირების დამოკიდებულებას ახასიათებს ტრანზიტულობის თვისება.

გრაფის ყველა მწვერვალში შეიძლება ავაგოთ მარყუჟი. შესაბამისად, დაკავშირების დამოკიდებულებას აქვს რეფლექსურობის თვისება. მოყვანილი მსჯელობიდან ჩანს, რომ დაკავშირების დამოკიდებულებას ახასიათებს ექვივალენტობის დამოკიდებულების თვისებები: რეფლექსურობა, ტრანზიტულობა, სიმეტრიულობა. ამიტომ, დაკავშირების დამოკიდებულება გრაფზე წარმოადგენს ექვივალენტობის დამოკიდებულებას. როგორც ცნობილია, სიმრავლეზე ექვივალენტობის დამოკიდებულების შემოტანას მივყავართ ამ სიმრავლის დაყოფამდე არათანაკვეთად ექვივალენტობის კლასებად. ანალოგიურად, დაკავშირების დამოკიდებულებას მივყავართ გრაფის მწვერვალთა სიმრავლის არათანაკვეთად ექვივალენტურ კლასებად დაყოფამდე. ერთი ექვივალენტობის კლასის საზღვრებში აღებული გრაფის მწვერვალები დაკავშირებული იქნება ერთმანეთთან წიბოებით. სხვადასხვა ექვივალენტობის კლასებიდან აღებული მწვერვალები ერთმანეთთან არ იქნება დაკავშირებული წიბოთი.

მოვიყვანოთ რამდენიმე თეორემა, რომელიც განსაზღვრავს გრაფის დაკავშირებას.

თეორემა 1. ნებისმიერი $G=(X,\ \Gamma)$ არაორიენტირებული გრაფი ერთადერთი სახით დაიშლება თავისი დამაკავშირებელი კომპონენტების პირდაპირ ჯამად.

დამტკიცება. ავიღოთ გრაფის რაიმე x მწვერვალი, დაუშვათ Cx არის x მწვერვალის დამაკავშირებელი კომპონენტა, ანალოგიურად Cy იქნება y მწვერვალის დამაკავშირებელი კომპონენტა. დამტკიცებისათვის ვაჩვენოთ შემდეგი პირობების შესრულება:

1. $Cx \ne \varnothing$; 2. თუ $Cx \ne Cy$; მაშინ $Cx \bigcap Cy = \varnothing$;

3. $\bigcup Cx = X$ ვინაიდან Cx არის x მწვერვალის დამაკავშირებელი კომპონენტა, ამიტომ $x \in Cx$, შესაბამისად $Cx \ne \varnothing$. დავუშვათ, რომ $Cx \bigcap Cy \ne \varnothing$, მაშინ $Cx = Cy$. მართლაც, ვთქვათ, $z \in Cx \bigcap Cy$, მაგრამ z არის გრაფის მწვერვალი. რადგან Cx არის x მწვერვალის დამაკავშირებელი კომპონენტა, მაშინ z იქნება დაკავშირებული x-თან წრედით. პირობის თანახმად $y \in Cy$, მაგრამ, რადგან $z \in Cx \bigcap Cy$, ამიტომ მწვერვალი z დაკავშირებული იქნება წრედით y მწვერვალთანაც. ტრანზიტულობის თვისებიდან გამომდინარეობს, რომ x და y მწვერვალები დაკავშირებული იქნება ერთმანეთთან წრედით. ამის გამო, ქვესიმრავლის განსაზღვრის თანახმად $Cy \subseteq Cx$. სიმეტრიულობის თვისებიდან გამომდინარე ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ $Cx \subseteq Cy$ და, რადგან სრულდება ჩართვა ორივე მხრიდან, ამიტომ $Cx = Cy$; მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება თეორემის მეორე პირობას. შესაბამისად, $Cx \ne Cy$ და $Cx \bigcap Cy = \varnothing$. და ბოლოს, ვაჩვენოთ მესამე პირობის შესრულება: $\bigcup\limits_{x\in X} Cx \supseteq \bigcup\limits_{x\in X}\{x\} = X$.

თეორემა 2. ნებისმიერი დაკავშირებული გრაფი შეიცავს ერთადერთ დამაკავშირებელ კომპონენტას.

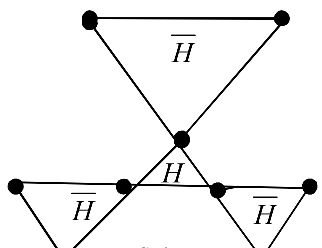
დამტკიცება. დაუშვათ საწინააღმდეგო, სახელდობრ ის, რომ გრაფი შეიცავს ორ დამაკავშირებელ კომპონენტას, მაშინ გრაფში ყოველთვის მოიძებნება ორი x და y მწვერვალი, რომლებიც ეკუთვნიან სხვადასხვა Cx და Cy დამაკავშირებელ კომპონენტას ცხადია, რომ ამ მწვერვალებს ერთმანეთთან ვერ დავაკავშირებთ წრედით. აქედან გამომდინარეობს, რომ მოცემული გრაფი იქნება არადაკავშირებული. შესაბამისად, თეორემის საწინააღმდეგო მოსაზრება მცდარია. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3. თუ გრაფში მხოლოდ ორ მწვერვალს აქვს კენტი ლოკალური ხარისხი, მაშინ ეს მწვერვალები იქნება დაკავშირებული.

დამტკიცება. ვთქვათ, მოცემულ გრაფში x მწვერვალს აქვს კენტი ლოკალური ხარისხი და Cx არის ამ მწვერვალის დამაკავშირებელი კომპონენტა. ვისარგებლოთ თეორემით, რომლის თანახმად გრაფში კენტი მწვერვალების რაოდენობა არის ლუწი. მაშინ თუ y არის მეორე კენტი მწვერვალი, ცხადია, $y \in Cx$, რადგან ორი მწვერვალი x და y ეკუთვნის ერთი და იმავე დამაკავშირებელ კომპოპნენტას, ამიტომ ისინი დაკავშირებულია.

თეორემა 4. გრაფის H ნაწილის $\overline{H}$ დამატების დამაკავშირებელი კომპონენტას რიცხვი არ აღემატება H ნაწილის მწვერვალთა რიცხვს.

დამტკიცება. გამოვყოთ გრაფში H ნაწილი (ნახ.33). თეორემის პირობის თანახმად $\overline{H}$ დამატება შედგება დამაკავშირებელ კომპონენტთა რიგისაგან. აღვნიშნოთ ერთ-ერთი მათგანი C-თი. რომ მივიღოთ დამაკავშირებელი კომპონენტა, C გრაფიდან უნდა ამოვიღოთ H ნაწილის ყველა წიბო. ეს ნიშნავს, რომ დამაკავშირებელ C კომპონენტაში მოიძებნება ერთი მწვერვალი მაინც, რომელიც იქნება ინციდენტური H



ნახ. 33

ნაწილის წიბოების, მაგრამ ამავე დროს ეს მწვერვალი არ შეიძლება იყოს $\overline{H}$ დამატების დანარჩენი დამაკავშირებელი კომპონენტების წიბოების ინციდენტური.

თეორემა 5. გრაფის წიბოთა მაქსიმალური რაოდენობა მარყუჟისა და ჯერადი წიბოების ჩაუთვლელად, რომელსაც აქვს n მწვერვალი და k დამაკავშირებელი კომპონენტა, ტოლია:

$$N_{\max}(n,k)=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

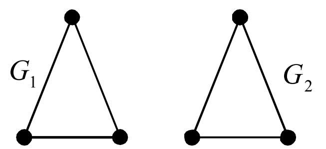
დამტკიცება. ვთქვათ, გვაქვს G გრაფი, რომელიც შეიცავს k დამაკავშირებელ კომპონენტას, აღვნიშნოთ i-ური დამაკავშირებელი კომპონენტა G_i-თი. დაუშვათ, რომ G გრაფის ყველა დამაკავშირებელი კომპონენტა წარმოადგენს სრულ გრაფს. სრული გრაფის წიბოების რაოდენობა ტოლია:

$$N=\frac{1}{2}n(n-1)$$

მაშინ i-ური დამაკავშირებელი კომპონენტას წიბოთა რაოდენობა ტოლია: $N_i=\frac{1}{2}n_i(n_i-1)$. G გრაფის წიბოთა საერთო N რაოდენობა ამ შემთხვევაში იქნება:

$$N=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}n_i(n_i-1) \qquad (1)$$

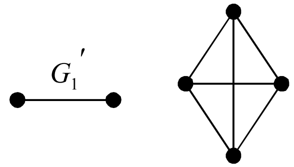
გამოვყოთ მოცემულ გრაფში ორი დამაკავშირებელი კომპონენტა ანუ ორი G_1 და G_2 ქვეგრაფი მწვერვალთა რიცხვით: $n_1>1$ და $n_2\geq n_1$. ვთქვათ, $n_1=n_2$ (ნახ. 34).



ნახ. 34

შევასრულოთ შემდეგი ოპერაცია: G_1 და G_2 გრაფებიდან ვაწარმოოთ ახალი G_1' და G_2' გრაფები შემდეგნაირად. G_1 გრაფიდან

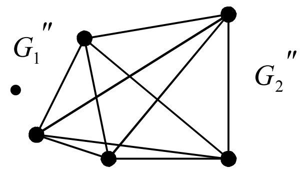
ამოვიღოთ ერთი მწვერვალი და დაუმატოთ იგი G_2 გრაფს (ნახ. 35). ამის შემდეგ, G_2 გრაფი შევავსოთ სრულ გრაფამდე. G_1' გრაფს ექნება უკვე (n_1-1) მწვერვალი, ხოლო G_2' გრაფს – (n_2+1) მწვერვალი. ანალოგიურად G_1' და G_2' გრაფებიდან ვაწარმოოთ G_1'' და G_2'' (ნახ. 36). ეს პროცედურა ტარდება ყველა G_i დამაკავშირებელი კომპონენტებისათვის მანამ, სანამ არ დარჩება $(k-1)$ იზოლირებული მწვერვალის შემცველი გრაფი და ერთი სრული გრაფი



ნახ. 35

$$n-(k-1)=n-k+1$$

მწვერვალთა რიცხვით. ჩავსვათ (1) ფორმულაში n_i-ს ადგილზე მიღებული ქვეგრაფის მწვერვალთა რიცხვი $n-k+1$, მაშინ მივიღებთ:



ნახ. 36

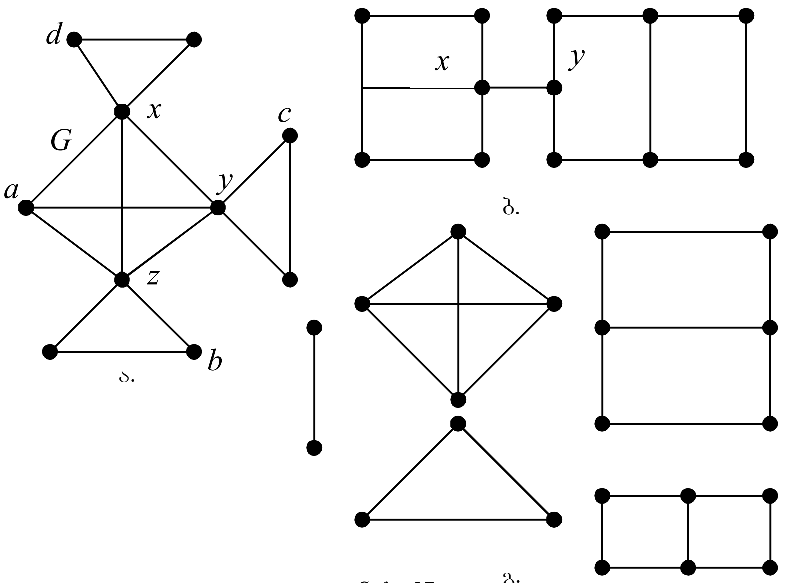
$$N=\frac{1}{2}(n-k+1)(n-k+1-1)=\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

რაც უნდა დაგვემტკიცებინა.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს შემდეგი დასკვნა: იმისათვის, რომ გრაფი იყოს დაკავშირებული, რომელიც შეიცავს n – მწვერვალს და ორ დამაკავშირებელ კომპონენტას აუცილებელია, რომ მისი წიბოთა რიცხვი იყოს მეტი $N(n,2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-$ ზე.

3.10. შერწყმის წერტილები. ხიდები. ბლოკები.

დაკავშირებულ გრაფებში შეიძლება არსებობდეს მწვერვალები, რომელთა ამოღების შემდეგ საწყისი გრაფი გახდეს არადაკავშირებული ანუ შეიცავდეს რამდენიმე დამაკავშირებელ კომპონენტას. ასეთ მწვერვალებს ეწოდებათ შერწყმის წერტილები. თუ გრაფს არა აქვს შერწყმის წერტილები, მაშინ მას ეწოდება განუცალკევებელი (განუყრელი) გრაფი. თუ დაკავშირებულ გრაფში არსებობს წიბო, რომლის ამოღების შემდეგ ირღვევა გრაფის დაკავშირება ანუ საწყის გრაფს გადააქცევს რამდენიმე დამაკავშირებელი კომპონენტის მქონე გრაფად, მაშინ ასეთ წიბოს ეწოდება ხიდი. და ბოლოს, გრაფის ბლოკი ეწოდება მის მაქსიმალურად განუყოფელ ქვეგრაფს. ცხადია, განუცალკევებული გრაფი თვითონ იქნება ბლოკი. მაგალითისთვის მოვიყვანოთ გრაფი, რომელიც მოცემულია 37ა ნახ-ზე.



ნახ. 37

მწვერვალები x, y, z წარმოადგენენ G გრაფისათვის შერწყმის წერტილებს (ნახ.37ა); ხოლო a, b, c, d მწვერვალები არ წარმოადგენენ შერწყმის წერტილებს. (x, y) წიბო, წარმოადგენს G გრაფის ხიდს (ნახ.37ბ); ხოლო დანარჩენი წიბოდან არც ერთი არ წარმოადგენს ხიდს. და ბოლოს, 37გ ნახ-ზე მოცემულია საწყისი გრაფების ბლოკები. გრაფებში, სადაც არსებობენ შერწყმის წერტილები და ხიდები, თითოეული მწვერვალი და წიბო მიეკუთვნება მხოლოდ ერთ ბლოკს. მოვიყვანოთ თეორემა, რომელიც განსაზღვრავს გრაფში შერწყმის წერტილებისა და ხიდების არსებობის პირობას.

თეორემა: თუ x-ით არის დაკავშირებული G გრაფის მწვერვალი, მაშინ ექვივალენტურია შემდეგი პირობა: ა) x არის G გრაფის შერწყმის წერტილი; ბ) G გრაფში არსებობს ისეთი z და y მწვერვალი, $x \neq y$ და $x \neq z$, რომ x ეკუთვნის ნებისმიერ $\{y \div z\}$ მარტივ წრედს. გ) არსებობს X მწვერვალთა სიმრავლის დაყოფა ორ Y და Z ქვესიმრავლედ, ისე, რომ ორი $y \in Y$ და $z \in Z$-სათვის მწვერვალი x ეკუთვნის ნებისმიერ $\{y \div z\}$ წრედს.

დავამტკიცოთ თეორემა. თეორემის პირველი პირობიდან უშუალოდ გამომდინარეობს მესამე პირობა. მართლაც, თუ x შერწყმის წერტილია, მაშინ მისი ამოღების შემდეგ $X-\{x\}$, საწყისი გრაფი იშლება ორ დამაკავშირებელ კომპონენტად. აღვნიშნოთ ამ კომპონენტთა მწვერვალების სიმრავლე Y და Z-ით. ცხადია, რომ $y \in Y$ და $z \in Z$ მოთავსებული იქნებიან სხვადასხვა კომპონენტაში. აქედან გამომდინარეობს, რომ G გრაფის ნებისმიერი მარტივი წრედი $\{y \div z\}$ შეიცავს x მწვერვალს. თეორემის მეორე პირობა გამომდინარეობს მესამედან, ან წარმოადგენს მის კერძო შემთხვევას. და ბოლოს, მეორე პირობიდან გამომდინარეობს პირველი. მართლაც, რადგან, x ეკუთვნის ნებისმიერ მარტივ $\{y \div z\}$ წრედს, მაშინ x-ის

ამოღების შემდეგ G გრაფში არ იარსებებს წრედი, რომელიც დააკავშირებს y და z მწვერვალებს, ან წარმოიშობა ორი დამაკავშირებელი კომპონენტა; რადგან x-ის ამოღებას მივყევართ დაუკავშირებელ გრაფამდე. ამიტომ x არის შერწყმის წერტილი.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი თეორემა დამტკიცების გარეშე: თუ G გრაფში არის P წიბო, რომელიც წარმოადგენს ხიდს, მაშინ ექვივალენტურია შემდეგი პირობა: ა) P არის G გრაფის ხიდი; ბ) P წიბო არ მიეკუთვნება გრაფის არცერთ მარტივ ციკლს; გ) G გრაფში არსებობს ისეთი y და z მწვერვალები, რომ P წიბო იქნება მიკუთვნებული ნებისმიერ მარტივ წრედს, რომელიც აერთებს y და z; დ) არსებობს საწყისი გრაფის მწვერვალთა X სიმრავლის დაყოფა ისეთ Y და Z ქვესიმრავლედ, რომ ნებისმიერი $y \in Y$ და $z \in Z$ მწვერვალთათვის P წიბო ეკუთვნის ნებისმიერ მარტივ წრედს, რომელიც აერთებს y და z.

თეორემა: ნებისმიერ დაკავშირებულ გრაფში მოიძებნება ორი მწვერვალი მაინც, რომელიც არ წარმოადგენს შერწყმის წერტილს.

დავამტკიცოთ თეორემა: ავიღოთ გრაფში ორი x და y წერტილი. ვიგულისხმოთ, რომ ისინი წარმოადგენენ გრაფის რაიმე დიამეტრალური წრედის ბოლოებს; ანუ $d(x,y) = d(G)$. დაუშვათ, რომ y არის შერწყმის წერტილი. ამოვიღოთ y გრაფიდან. ცხადია, G გრაფი დაიშლება ორ დამაკავშირებელ კომპონენტად. ვთქვათ, z არის მწვერვალი, რომელიც ეკუთვნის იმ დამაკავშირებელ კომპონენტას, სადაც არ შედის x მწვერვალი. წინა თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ მწვერვალი y მიეკუთვნება ნებისმიერ მარტივ წრედს, რომელიც აკავშირებს x და z; მაშინ $d(x,z) > d(x,y)$; მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება დაშვებას, რომ $d(x,y) = d(G)$, ამიტომ იმის დაშვება, რომ y არის შერწყმის წერტილი, არაა სწორი. ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ x არ იქნება შერწყმის წერტილი.

3.11. ორიენტირებული გრაფის ბიკომპონენტები

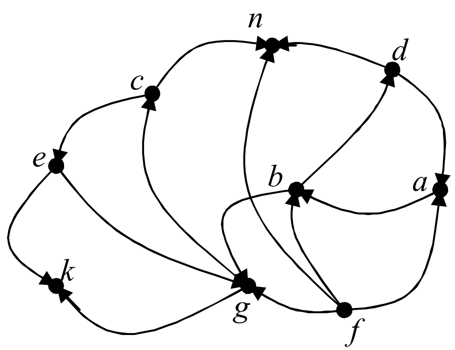
ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორიენტირებული გრაფი $G = (X, \Gamma)$. ავიღოთ ამ გრაფის ნებისმიერი ორი x_i და x_j მწვერვალი. თუ x_i მწვერვალიდან არსებობს გზა x_j მწვერვალში, მაშინ ამბობენ, რომ x_j მწერვალი მიღწევადია x_i მწვერვალიდან და ამ მიღწევადობას აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $x_i > x_j$. ასეთი ტიპის ბინარულ დამოკიდებულებას x_i და x_j მწვერვალებს შორის ეწოდება ჩართვის დამოკიდებულება შესაბამისი G გრაფისათვის, ჩართვის დამოკიდებულება ტრანზიტული დამოკიდებულებაა; თუ $x_i > x_j$ და $x_j > x_k$, მაშინ $x_i > x_k$.

თუ აღვნიშნავთ x_i მწვერვალიდან მიღწევად მწვერვალთა სიმრავლეს $D(x_i)$, ხოლო x_j მწვერვალიდან მიღწევად მწვერვალთა სიმრავლეს $D(x_j)$–თი, მაშინ ჩართვის დამოკიდებულება $x_i > x_j$ შესრულდება მხოლოდ მაშინ, როცა $D(x_j) \subseteq D(x_i)$.

იმ შემთხვევაში, როცა $D(x_i) = D(x_j)$, x_i და x_j მწვერვალებს უწოდებენ მიღწევადობის მიხედვით ექვივალენტურ მწვერვალებს, ანუ: $x_i > x_j$, $x_j > x_i \leftrightarrow x_i \sim x_j$.

თუ $x_i \sim x_j$ მიღწევადობის მიხედვით, ეს იმას ნიშნავს, რომ არსებობს გზა x_i მწვერვალიდან x_j მწვერვალში და იმავე დროს არსებობს გზა x_j-დან x_i მწვერვალში. ასეთი ტიპის მწვერვალებს უწოდებენ ძლიერად დაკავშირებულ, ანუ ურთიერთდაკავშირებულ მწვერვალებს. ახლა ავიღოთ გრაფი $G = (X, \Gamma)$, მოცემულ გრაფს ეწოდება ძლიერად დაკავშირებული, თუ მისი ნებისმიერი ორი x_i და x_j

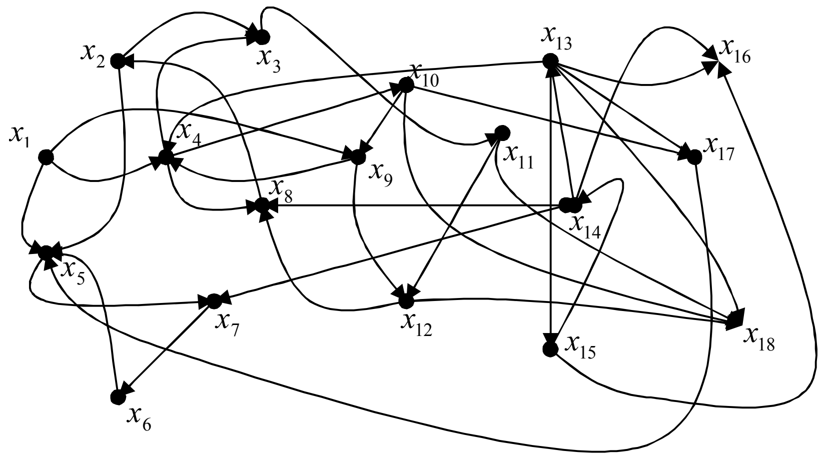
მწვერვალისათვის არსებობს გზა x_i-დან x_j-ში და პირიქით. ორიენტირებულ გრაფში შეიძლება არსებობდეს მწვერვალთა სხვადასხვა ქვესიმრავლე, ისე, რომ თითოეული ქვესიმრავლის საზღვრებში მწვერვალები იყვნენ ურთიერთდაკავშირებული (ბიდაკავშირებული). მწვერვალთა ეს ქვესიმრავლე იძლევა ქვეგრფებს, რომელთაც ეწოდებათ დაკავშირების კომპონენტები ანუ ბიკომპონენტები. მაგალითად. 38-ე ნახ.-ზე მოცემულ გრაფისათვის ადგილი აქვს 5 ბიკომპონენტას, შემდეგ მწვერვალთა სიმრავლეზე: $\{a,b,d\}, \{c,e,g\}, \{k\}, \{n\}, \{f\}$. ერთადერთი მწვერვალი შეიძლება წარმოადგენდეს ბიკომპონენტას, თუ იგი არ მიეკუთვნება არც ერთ ორიენტირებულ ციკლს. ასეთი სახის მწვერვალები შეიძლება იყოს ორი ტიპის: ჩიხური და ანტიჩიხური. ჩიხური ეწიდება მწვერვალს, რომლიდანაც არ გამოდის არც ერთი რკალი, ხოლო ანტიჩიხურია ისეთი მწვერვალი, რომელშიც არ შედის არც ერთი რკალი. მოვიყვანოთ ლეიფმანის ალგორითმი, რომელიც გამოავლენს ორიენტირებული გრაფის ყველა ბიკომპონენტას.



ნახ. 38

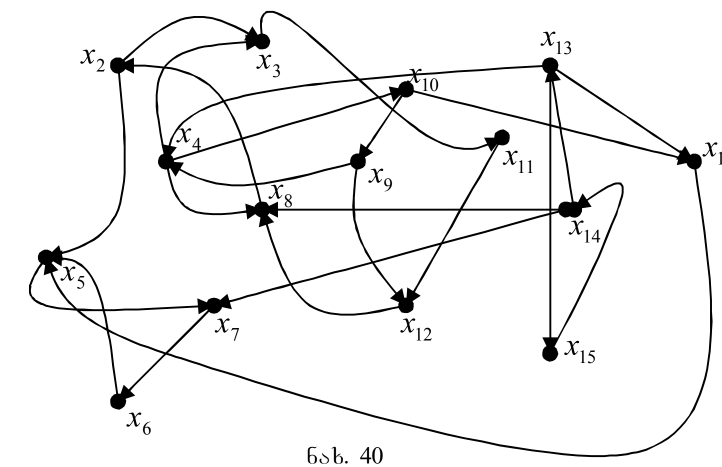
განვიხილოთ ალგორითმის მოქმედება 39-ე ნახ.-ზე მოცემული $G=(X,\ \Gamma)$ ორიენტირებული გრაფისათვის.

ჯერ ვპოულობთ გრაფის ყველა ჩიხურ და ანტიჩიხურ მწვერვალებს, რომლის შემდეგაც ამოვიღებთ მათ გრაფიდან.



ნახ. 39

მოცემულ გრაფში x_1 მწვერვალი ანტიჩიხური მწვერვალია, ხოლო x_{16} და x_{18} – ჩიხური. ეს მწვერვალები წარმოადგენენ სამ ბიკომპონენტას: $\{x_1\},\{x_{16}\},\{x_{18}\}$, დარჩენილი გრაფი (ნახ. 40) იქნება შემდეგი სახის:



ნახ. 40

ხელახლა ვეძებთ მოცემულ გრაფში ჩიხურ და ანტიჩიხურ მწვერვალებს. თუ ასეთები მოიძებნება ამოვწერთ მათ

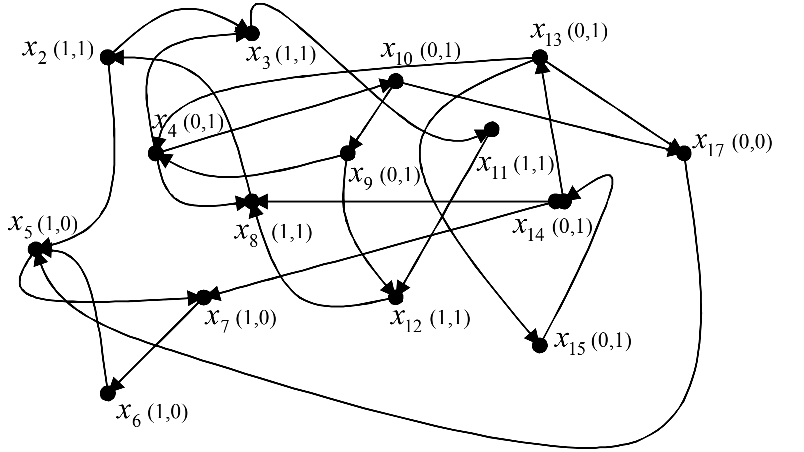
ბიკომპონენტებად და ამოვიღებთ გრაფიდან. ამ პროცედურას ვაგრძელებთ მანამ, სანამ მიღებულ გრაფში აღარ იარსებებს ჩიხური და ანტიჩიხური მწვერვალები. თუ ყველა მწვერვალი აღმოჩნდება ჩიხური და ანტიჩიხური, მაშინ ამოხსნის პროცედურა დამთავრებულად ჩაითვლება და გრაფის ყოველი მწვერვალი სათითაოდ აღმოჩნდება ბიკომპონენტის როლში.

წინააღმდეგ შემთხვევაში დარჩენილ $G_1 = (X_1, \Gamma)$ გრაფში ვიწყებთ მწვერვალთა მონიშვნას, რისთვისაც ავირჩევთ ნებისმიერ x_i მწვერვალს. ყველა იმ მწვერვალს, რომელშიც მიდის რკალი x_i მწვერვალიდან მივანიჭებთ 1–ის ტოლ მონიშვნას. შემდეგ 1-იანით მოინიშნებიან ის მოუნიშნავი მწვერვალები, რომლებშიც მოდიან რკალები მონიშნული მწვერვალებიდან. ეს პროცედურა გრძელდება მანამ, სანამ გრაფში აღარ გვექნება არცერთი მონიშნული მწვერვალი საიდანაც მიდის რკალი მოუნიშნავ მწვერვალებში. იმის შემდეგ, როცა შეუძლებელი გახდება მწვერვალების მონიშვნა ერთიანით, მოუნიშნავ მწვერვალებს მიეწერება ნიშანი 0. შედეგად გრაფის ყველა მწვერვალი მიიღებს 0 ან 1-ის ტოლ ნიშანს. ანუ, ეგრეთწოდებულ, მწვერვალის „მარცხენა“ მონიშვნას.

ამის შემდეგ გრაფის ყველა მწვერვალს მიეწერებათ ნულის ან ერთის ტოლი ნიშანი ანუ, ეგრეთწოდებული, „მარჯვენა“ მონიშვნა. ეს მონიშვნა მიეწერებათ გრაფის მწვერვალებს მისი რკალების ორიენტაციის საწინააღმდეგო მოძრაობის მიხედვით.

საბოლოოდ გრაფის ყველა მწვერვალი იღებს მონიშვნათა (z, y) მოწესრიგებულ წყვილებს და იყოფა მწვერვალთა ოთხ არათანაკვეთად ქვესიმრავლედ: X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11}, ამასთან ერთად, $X_1 = X_{00} \cup X_{01} \cup X_{10} \cup X_{11}$. G გრაფის ყველა ბიკომპონენტი იქნება შესული ერთ-ერთ იმ ქვეგრაფში, რომელიც წარმოიშობა X_{00}, X_{01}, X_{10}, X_{11} მწვერვალთა სიმრავლეზე. ამ დროს, შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები: $X_{11} \neq \varnothing$ ან $X_{11} = \varnothing$. თუ $X_{11} \neq \varnothing$ მაშინ ქვეგრაფი G_{11}, X_{11} მწვერვალთა სიმრავლეზე წარმოადგენს G გრაფის ბიკომპონენტას. იმ შემთხვევაში, როცა

$X_{00} = X_{01} = X_{10} = \varnothing$ ამოცანა ბიკომპონენტების პოვნაზე გადაწყვეტილია. თუ $X_{00} \neq \varnothing$, $X_{01} \neq \varnothing$ და $X_{10} \neq \varnothing$, მაშინ თითოეული G_{00}, G_{01}, G_{10} ქვეგრაფზე უნდა დავიწყოთ ალგორითმის პროცედურა თვიდან ანუ ჩიხური და ანტიჩიხური მწვერვალების განსაზღვრიდან და ა.შ. განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $X_{11} = \varnothing$. ამ დროს, $X_{01} \neq \varnothing$ და $X_{10} = \varnothing$. რადგან დასაწყისში არჩეული x_i მწვერვალი არც ჩიხურია და არც ანტიჩიხური. მწვერვალი $x_i \in X_{00}$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში x_i-ზე გაივლიდა ორიენტირებული ციკლი და $X_{11} \neq \varnothing$. ვინაიდან x_i-ზე არ გადის არავითარი ორიენტირებული ციკლი, ამიტომ x_i უნდა მივაკუთვნოთ ერთმწვერვალიან ბიკომპონენტს. ამის შემდეგ, უნდა განვიხილოთ G_{01} და G_{10} ქვეგრაფები, X_{01} და X_{10} მწვერვალებზე და G_{00} ქვეგრაფი $X_{00} \setminus \{x_i\}$ მწვერვალთა სიმრავლეზე. ახლა დავუბრუნდეთ G_1 გრაფს. x_i მწვერვალად ავირჩიოთ x_2 მწვერვალი და ზემოთაღწერილი მეთოდის თანახმად დავსვათ მონიშვნები G_1 გრაფის ყველა მწვერვალის მიმართ (ნახ. 41).



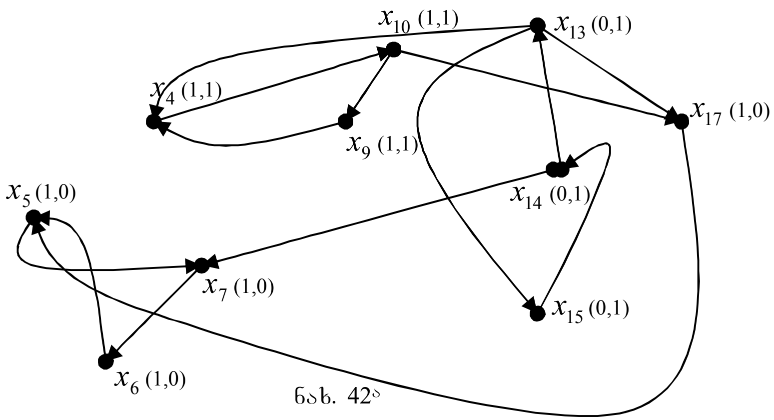
ნახ. 41

შედეგად მივიღებთ მწვერვალთა შემდეგ სიმრავლეს:

$$X_{00} = \{x_{17}\},\ X_{11} = \{x_2, x_3, x_{11}, x_{12}, x_8\},$$

$$X_{01} = \{x_4, x_9, x_{10}, x_{13}, x_{14}, x_{15}\},\ X_{10} = \{x_5, x_6, x_7\}.$$

აქედან, გრაფის კომპონენტებს წარმოადგენენ მწვერვალთა სიმრავლეები: $X_{11} = \{x_2, x_3, x_{11}, x_{12}, x_8\}$, ყველა ეს მწვერვალები ამოვიღოთ G_1 გრაფიდან, რომლის შემდეგაც განვიხილოთ შემდეგი გრაფი (ნახ. 42ა).

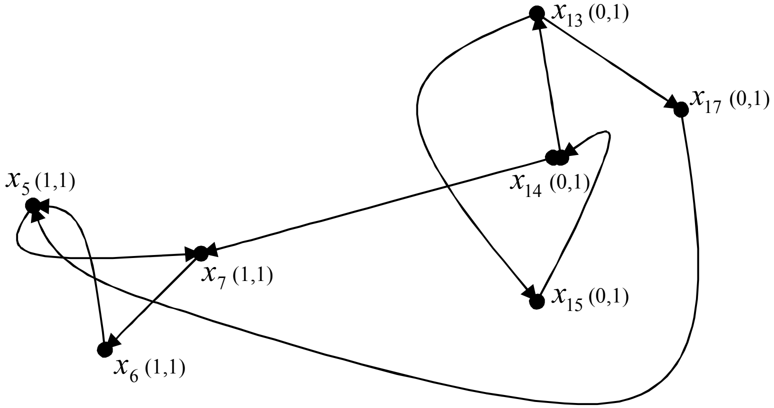


ნახ. 42ა

G_2 ქვეგრაფში (ნახ. 42ა) x_i მწვერვალად ავიღოთ x_4 მწვერვალი და დავსვათ თავიდან 0 და 1 მონიშვნები. შედეგად მივიღებთ შემდეგ მწვერვალთა სიმრავლეს: $X_{11} = \{x_4, x_9, x_{10}\}$, $X_{01} = \{x_{13}, x_{14}, x_{15}\}$ და $X_{10} = \{x_5, x_6, x_7, x_{17}\}$.

მწვერვალთა ეს სიმრავლეები გვაძლევს ბიკომპონენტს $\{x_4, x_9, x_{10}\}$. ყველა ეს მწვერვალები ამოვიღოთ G_2 ქვეგრაფიდან, რომლის შემდეგაც განვიხილოთ შემდეგი G_3 ქვეგრაფი (ნახ. 42ბ).

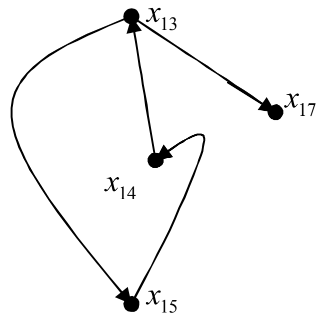
x_i მწვერვალად ავირჩიოთ x_5 და დავსვათ თავიდან 0 და 1 მონიშვნები. შედეგად მივიღებთ შემდეგ მწვერვალთა სიმრავლეს: $X_{11} = \{x_5, x_6, x_7\}$ და $X_{01} = \{x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{17}\}$.



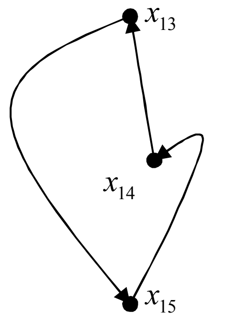
ნახ. 42ბ

მწვერვალთა ეს სიმრავლე გვაძლევს ბიკომპონენტს $\{x_5, x_6, x_7\}$. და ამოვიღებთ G_3 ქვეგრაფიდან. მივიღებთ G_4 ქვეგრაფს (ნახ. 42გ)

G_4 ქვეგრაფიდან ვიღებთ ჩიხურ მწვერვალს $\{x_{17}\}$. რის



ნახ. 42გ



ნახ. 42დ

შედეგადაც მივიღებთ შემდეგ G_5 გრაფს (ნახ 42დ). G_5 გრაფი

იძლევა საწყისი გრაფის ბოლო ბიკომპონენტს: $\{x_{13}, x_{14}, x_{15}\}$ ე. ი. მივიღეთ საწყისი G გრაფის რვა ბიკომპონენტა. ესენია: $\{x_1\}$, $\{x_{16}\}$, $\{x_{17}\}$, $\{x_{18}\}$, $\{x_2, x_3, x_{11}, x_{12}, x_8\}$, $\{x_4, x_9, x_{10}\}$, $\{x_5, x_6, x_7\}$ და $\{x_{13}, x_{14}, x_{15}\}$.

3.12. მანძილები გრაფში

განვიხილოთ არაორიეტირებული დაკავშირებული $G = (X,\ \Gamma)$ გრაფი. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მოცემულ გრაფში ნებისმიერი ორი მწვერვალი შეიძლება დაკავშირებული იყოს მარშრუტით და შესაბამისად მარტივი ან ელემენტარული წრედით. წრედის სიგრძე განისაზღვრება მისი წიბოების რაოდენობით. ავიღოთ გრაფის ორი ნებისმიერი x და y მწვერვალი. x და y მწვერვალების შემაერთებელ უმცირეს (უმოკლეს) მარტივი წრედის სიგრძეს უწოდებენ მანძილს x და y მწვერვალებს შორის. იგი აღინიშნება შემდეგნაირად $d(x, y)$. მანძილი გამოიხატება მთელი არაუარყოფითი რიცხვით. $d(x, y)$ მანძილის ფუნქცია განისაზღვრება გრაფის ყველა წყვილ მწვერვალთა სიმრავლეზე და აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს (ფრიშეს აქსიომები):

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ (სამკუთხედის უტოლობა)

თუ გრაფი ორიენტირებულია, მაშინ $d(x, y) = \infty$, როცა $y \notin \hat{\Gamma} x$ მანძილის ფუნქციის შემოტანა გრაფში იძლევა მის მწვერვალთა სიმრავლის დაყოფას არათანაკვეთად მწვერვალთა კლასებად, ამასთან ერთად, კლასებს ადგენენ ის მწვერვალები, რომლებიც იმყოფებიან ერთი და იმავე დაშორებით რომელიმე $x_0 \in X$ მწვერვალიდან, ანუ ყველა $n \geq 0$-სათვის არსებობს X_n

მწვერვალთა ისეთი სიმრავლე, რომ $d(x_0, x_n) = n$. მაშინ $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$, , სადაც X_i არის მწვერვალების სიმრავლე, რომლებიც დაშორებულია i მანძილით რაიმე x_0-ით ფიქსირებული მწვერვალიდან. ამ შემთხვევაში, X_n სიმრავლის მწვერვალები დაუკავშირდება წიბოებით მხოლოდ X_{n-1}, X_{n+1} და X_n სიმრავლის მწვერვალებს. ვაჩვენოთ ეს. ვთქვათ, მწვერვალები X_n სიმრავლიდან უკავშირდებიან მწვერვალებს X_{n+k} სიმრავლიდან, სადაც $k \geq 2$. ვინაიდან, გრაფზე მოცემულია მანძილის ფუნქცია, ამიტომ X_{n+k} მწვერვალებს შორის აუცილებლად მოიძებნება მწვერვალი, რომელიც დაშორებულია x_0-დან $n+1$ მანძილით. ეს იმას ნიშნავს, რომ $k \geq 2$ შემთხვევა შეუძლებელია. ამიტომ, მწვერვალები X_n სიმრავლიდან იქნებიან შეერთებული წიბოებით X_{n-1}, X_n და X_{n+1} სიმრავლიდან აღებულ მწვერვალებთან.

3.13. გრაფის დიამეტრი, რადიუსი და ცენტრი

გრაფის ორ ნებისმიერ x და y მწვერვალს შორის მაქსიმალურ მანძილს G გრაფის დიამეტრი ეწოდება. აღვნიშნოთ გრაფის დიამეტრი $d(G)$-თი, მაშინ:

$$d(G) = \max_{y \in X} d(x, y), \quad \forall x \in X,$$

სადაც X არის გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე. გრაფში შეიძლება არსებობდეს მინიმალური სიგრძის წრედის სიმრავლე, რომელიც აერთებს ორ ნებისმიერ მწვერვალს და დაშორებული არიან მაქსიმალური მანძილით. ყველა ასეთ წრედს ეწოდება დიამეტრალური მარტივი წრედი.

გრაფის ყველა მწვერვალისათვის მოვძებნოთ ის მწვერვალები, რომლებიც დაშორებული არიან ამ მწვერვალებიდან მაქსიმალური მანძილით. ყველა ამ მაქსიმალური სიგრძის

წრედებიდან ამოვარჩიოთ მინიმალური ანუ $\min_{x\in X}\max_{y\in X} d(x,y)$, მაშინ სიდიდეს $r(G)=\min_{x\in X}\max_{y\in X} d(x,y)$ ეწოდება გრაფის რადიუსი. მწვერვალს, რომელშიც $\max_{y\in X} d(x,y)$ აღწევს მინიმალურ მნიშვნელობას, ეწოდება გრაფის ცენტრი. თუ აღვნიშნავთ გრაფის ცენტრს C_0-ით, მაშინ ის შეიძლება განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$\forall x\in X, \max_{y\in X} d(x,y)\ge \max_{y\in X} d(C_0,y)$$

გრაფში შეიძლება არსებობდეს რადიარული მარტივი წრედების სიმრავლე. გარდა ამისა, გრაფს შეიძლება ქონდეს ერთზე მეტი ცენტრი. ორიენტირებულ გრაფებში შესაძლებელია შემთხვევა, როცა $\max_{y\in X} d(x,y)=\infty$. ამის გამო, გრაფის დიამეტრი შეიძლება იყოს უსასრულო.

3.14. გრაფის მწვერვალთა და წიბოთა საშუალო გადახრა

დაუშვათ, x გრაფის მწვერვალია. სიდიდეს

$$m(x)=\frac{1}{n}\sum_{y\in X} d(x,y) \qquad (1)$$

ეწოდება მწვერვალთა საშუალო გადახრა x მწვერვალიდან, თუ რაიმე x_0 მწვერვალისათვის (1) გამოსახულება წარმოადგენს მინიმალურს, მაშინ მწვერვალს ეწოდება გრაფის საშუალო მწვერვალი.

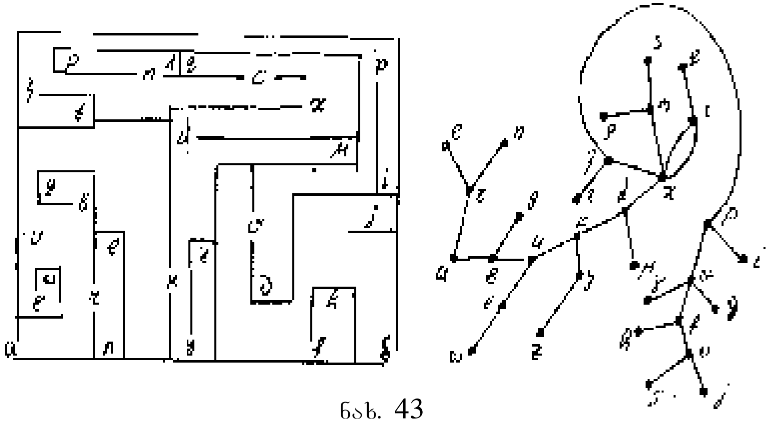
დაუშვათ $p=(x,y)$ წარმოადგენს გრაფის წიბოს; მაშინ საშუალო მანძილი მოცემული წიბოდან მოცემულ მწვერვალამდე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად: $d(z,p)=\frac{1}{2}\left[d(z,x)+d(z,y)\right]$.

სიდიდეს $m(z)=\frac{1}{N}\sum_{P} d(z,p)=\frac{1}{N}\sum_{x\in X} p(x)d(z,x)$

ეწოდება გრაფის წიბოს საშუალო გადახრა მწვერვალიდან.

3.15. გზის განსაზღვრა გრაფში

ძალიან ხშირად გრაფში ისმება ამოცანა მოცემული x მწვერვალიდან y მწვერვალში გზის პოვნის შესახებ. მაგალითად, ლაბირინთისათვის, რომელიც მოცემულია 43-ე ნახ.-ზე, საჭიროა ვიპოვოთ გზა α მდგომარეობიდან, რომელიც შეესაბამება ლაბირინთის შესასვლელს, β მდგომარეობამდე, რომელიც წარმოადგენს გამოსასვლელს.



ნახ. 43

ლაბირინთი შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს გრაფის სახით, რომელშიც მწვერვალები ასახავენ გზაჯვარედინებს, ხოლო წიბოები – დერეფნებს იმ შემთხვევაში, თუ ორი x და y გზაჯვარედინი დაკავშირებულია ამ უკანასკნელით ანუ $y\in\Gamma x$.

იმ შემთხვევაში, როცა მოცემული გრაფი წარმოადგენს ბრტყელ გრაფს, არსებობს მარტივი ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც შეიძლება გზის განსაზღვრა ერთი მწვერვალიდან მეორეში. დაუშვათ მოცემული გრაფი დაკავშირებულია, მაშინ ლაბირინთის შესასვლელიდან გამოსასვლელამდე გზის

პოვნისათვის, უნდა გამოვიყენოთ შემდეგი წესი: იმყოფები რა გზაჯვარედინზე, აუცილებელია აირჩიო ყოველთვის ყველაზე მარცხენა (ან ყოველთვის ყველაზე მარჯვენა) დერეფანი.

ახლა განვიხილოთ ნებისმიერი G გრაფი. x მწვერვალიდან ნებისმიერ y მწვერვალამდე გზის განსაზღვრისათვის გამოიყენება ტარის წესი. ეს წესი შემდეგში მდგომარეობს: არასდროს არ გაიარო ორჯერ ერთი და იგივე დერეფანში, ერთიდაიმავე მიმართულებით; იმყოფები რა x გზაჯვარედინზე, არ აირჩიო ის დერეფანი, რომელმაც მიგვიყვანა x-ში, თუ რა თქმა უნდა, არსებობს შესაძლებლობა სხვა არჩევანის.

3.16. უმოკლესი გზა გრაფში

თავიდან განვიხილოთ გრაფი $G=(X,\ \Gamma)$ დაუტვირთავი წიბოებით, ანუ ისეთი წიბოებით, რომლებზეც არაა ნაჩვენები წონა ან ფასი. მოვიყვანოთ ამ გრაფის ნებისმიერ ორ x და y მწვერვალებს შორის უმოკლესი გზის განსაზღვრის ალგორითმი. ამ ალგორითმს საფუძვლად უდევს გრაფის მწვერვალების მონიშვნის მეთოდი. მწვერვალის ნიშანი წარმოადგენს უმოკლესი გზის სიგრძეს, საწყისი მწვერვალიდან მონიშნულ მწვერვალამდე.

ალგორითმის პირველ ბიჯზე ვაფიქსირებთ α მწვერვალს, საიდანაც იძებნება უმოკლესი გზა. ეს მწვერვალი ღებულობს 0-ის ტოლ ნიშანს α_0.

II ბიჯი. მწვერვალებს, რომლებიც დაშორებული არიან 1-ის ტოლი მანძილით α_0 მწვერვალიდან ვანიჭებთ 1-ის ტოლ ნიშანს. და ა.შ. მწვერვალებს, რომლებიც იმყოფებიან m-ის ტოლ მანძილზე α_0-დან ვანიჭებთ m ნიშანს. ვთქვათ, მოცემული მწვერვალები ადგენენ $X(m)$ სიმრავლეს, მაშინ $X(m+1)$ მწვერვალთა სიმრავლე შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად:

$$X(m+1)=\{x/x\in \Gamma X(m), x\in X(k), k\le m\}$$

III ბიჯი. მოინიშნება თუ არა β მწვერვალი, რომლამდისაც იძებნება უმოკლესი გზა α მწვერვალიდან, მონიშვნის პროცესი დამთავრებულია. β მწვერვალი მიიღებს m ნიშანს ანუ $\beta_m \in X(m)$ ამის შემდეგ ვეძებთ გრაფის იმ მწვერვალებს, რომლებზეც გაივლის უმოკლესი გზა.

$$\begin{array}{ll}
\beta_{m-1}\in X_{(m-1)}, & \beta_{m-1}\in \Gamma^{-1}\beta_m \\
\beta_{m-2}\in X_{(m-2)}, & \beta_{m-2}\in \Gamma^{-1}\beta_{(m-1)}, \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot \\
\beta_2\in X_{(2)}, & \beta_2\in \Gamma^{-1}\beta_3, \\
\beta_1\in X_{(1)}, & \beta_1\in \Gamma^{-1}\beta_2, \\
\beta_0\in X_{(0)}, & \beta_0\in \Gamma^{-1}\beta_1,
\end{array}$$

ამავე დროს, $\beta_0=\alpha_0$.

ახლა განვიხილოთ გრაფი $G=(X,\ \Gamma)$ დატვირთული წიბოებით, ანუ წიბოებით, რომლებზეც მითითებულია მათი წონები, ფასი, სიგრძე და ა.შ. აღვნიშნოთ იმ წიბოს წონა $\ell(x_i,x_j)$-ით, რომლის ბოლოებსაც წარმოადგენენ x_i და x_j მწვერვალები. ამოცანა მდგომარეობს ისეთი გზის პოვნაში, საწყისი მწვერვალიდან მოცემულში, რომლის ჯამური სიგრძე ამ გზაში იქნება მინიმალური ანუ უმოკლესი.

$$\sum_{i,j}\ell(x_i,x_j)\to \min$$

უმოკლესი გზის განსაზღვრისათვის დატვირთულ წიბოებიან გრაფში გამოიყენება ფორდის ალგორითმი. მოვიყვანოთ ამ ალგორითმის ბიჯები:

I ბიჯი. გრაფის ყველა მწვერვალებს მიეწერება მონიშვნა λ_i. ამავე დროს საწყისი x_0 მწვერვალი ღებულობს $\lambda_0 = 0$ ნიშანს, ხოლო გრაფის ყველა დანარჩენი მწვერვალები იღებენ $\lambda_i = \infty$ ნიშანს.

II ბიჯი. გრაფის ყველა წიბოებს შორის ამოირჩევა (x_i, x_j) წიბო, რომლისთვისაც $\lambda_i - \lambda_i > \ell(x_i, x_j)$. თუ ასეთი წიბო მოიძებნება, მაშინ x_j მწვერვალს წაეშლება ძველი λ_j მონიშვნა და მიენიჭება ახალი $\lambda'_j = \lambda_i + \ell(x_i, x_j)$ ნიშანი. ეს პროცესი გრძელდება მანამდე, სანამ გრაფში იარსებებს თუნდაც ერთი წიბო, რომლისთვისაც შესაძლებელი იქნება λ_j-ს შემცირება.

III ბიჯი. როცა უკვე აღარ იქნება შესაძლებელი გრაფის მწვერვალების ნიშნების შეცვლა, მონიშვნის პროცესი წყდება, ამის შემდეგ, მოიძებნება ისეთი x_n მწვერვალი, რომლისათვისაც $\lambda_n - \lambda_{n-1} = \ell(x_{n-1}, x_n)$ ეს არსებითად ასეა, რადგან მონიშვნის პროცესი ყოველთვის მცირდება, ხოლო x_{n-1} მწვერვალი იქნება უკანასკნელი მწვერვალი, რომლის მონიშვნამაც გამოიწვია λ_n-ის შემცირება.

ანალოგიურად ვპოულობთ მწვერვალებს:

x_{n-1}, რომლისთვისაც $\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2} = \ell(x_{n-2}, x_{n-1})$,

x_{n-2}, რომლისთვისაც $\lambda_{n-2} - \lambda_{n-3} = \ell(x_{n-3}, x_{n-1})$ და ა.შ. საწყისი x მწვერვალისათვის: $\lambda_1 - \lambda_0 = \ell(x_0, x_1)$.

უმოკლესი გზა გაივლის მწვერვალებზე: $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

3.17. გრაფში მოცემული სიგრძის გზის განსაზღვრა

ვთქვათ, მოცემულია გრაფი $G = (X, \Gamma)$. იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ორ ნებისმიერ მწვერვალს შორის მოცემული სიგრძის გზის რიცხვი, ვისარგებლოთ მისი მწვერვალების მოსაზღვრეობის A მატრიცით. ავიყვანოთ A მატრიცა λ ხარისხში და აღვნიშნოთ P-თი. ასეთი გზით მიღებული მატრიცა:

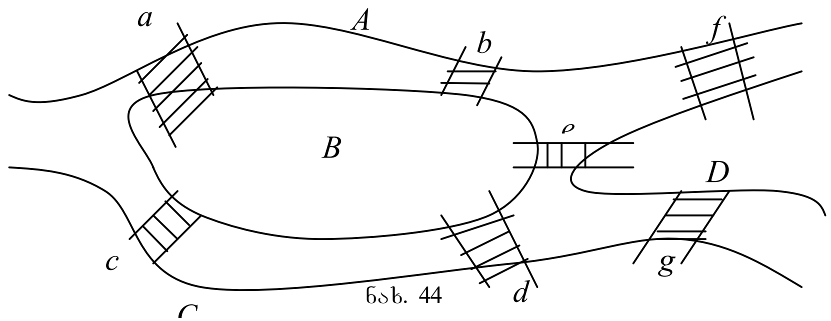
$$P = A^{\lambda},$$

მაშინ P მატრიცის P_{ij} ელემენტი წარმოადგენს λ სიგრძის სხვადასხვა გზების რიცხვს, რომელიც მიდის x_i მწვერვალიდან x_j მწვერვალში.

3.18. ეილერისა და ჰამილტონის ციკლები

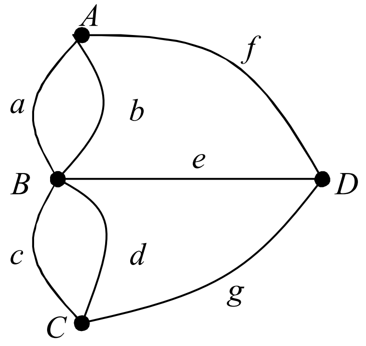
გრაფების მათემატიკური თეორია თავის საწყისს იღებს კენისბერგის ხიდების ამოცანიდან, რომელიც პირველად ეილერმა დააყენა.

ვთქვათ, A, B, C, D არის ქალაქის ნაწილები (კუნძულები), ხოლო $\{a, b, c, d, e, f, g\}$ ხიდები. ამოცანა შემდეგში მდგომარეობს: უნდა გამოხვიდე ქალაქის ნებისმიერი ნაწილიდან, მაგალითად A-დან, გადაიარო ყველა ხიდზე თითოჯერ და დაბრუნდე ისევ საწყის A ნაწილში. 44-ე ნახაზზე მოცემული სიტუაცია შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი გრაფის საშუალებით (ნახ. 45).



ნახ. 44

ეს ამოცანა შეიძლება (ნახ. 45) გრაფისათვის შემდეგნაირად გამოითქვას: ნებისმიერი მწვერვალიდან მაგ. A-დან გამოსვლის შემდეგ, საჭიროა გაიარო გრაფის ყველა წიბო თითოჯერ და დაბრუნდე ისევ A მწვერვალში. გრაფის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ ასეთი ციკლური შემოვლა მოცემლ გრაფში არ არსებობს. ეილერმა მოცემული ამოცანა გრაფებისათვის დააყენა შემდეგნაირად: რა პირობებში იარსებებს გრაფში ისეთი ციკლი, რომელიც შეიცავს ყველა წიბოს თითოჯერ? თუ გრაფში არსებობს ციკლი, რომელიც შეიცავს გრაფის ყველა წიბოს თითოჯერ, მაშინ ასეთ ციკლს ეილერის ციკლს უწოდებენ. თუ გრაფი შეიცავს ეილერის ციკლს, მაშინ ასეთ გრაფს ეილერის გრაფი ეწოდება. გრაფში შეიძლება არსებობდეს ეილერის წრედიც. ეს ისეთი წრედია, რომლეიც შეიცავს გრაფის ყველა წიბოს თითოჯერ. ეილერის ციკლისა და ეილერის წრედის ცნებას ადგილი აქვს ორიენტირებულ გრაფებისათვისაც, სადაც მათ შესაბამისად ეილერის კონტური და ეილერის გზა ეწოდება. მოვიყვანოთ ეილერის თეორემა, რომელიც განსაზღვრავს გრაფში ეილერის ციკლის არსებობას: იმისათვის, რომ გრაფი შეიცავდეს ეილერის ციკლს, ანუ გრაფი რომ იყოს ეილერის გრაფი, აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი პირობების შესრულება: 1. გრაფი უნდა იყოს დაკავშირებული; 2. გრაფის ყველა მწვერვალს უნდა ჰქონდეს ლუწი ლოკალური ხარისხი.



ნახ. 45

დავამტკიცოთ თეორემა. პირველი პირობა წარმოადგენს აუცილებელს, ვინაიდან, თუ გრაფი არადაკავშირებულია, მაშინ მასში საერთოდ არ იარსებებს შემოვლა. მეორე პირობაც ასევე წარმოადგენს აუცილებელს, ვინაიდან გრაფის წიბოების ციკლური

შემოვლის შემთხვევაში, მოცემული ციკლი უნდა შევიდეს ნებისმიერ მწვერვალში ერთი წიბოდან და გამოვიდეს ამ მწვერვალიდან მეორე (სხვა) წიბოთი.

ამავე დროს, ორთავე ეს პირობა წარმოადგენს საკმარის პირობას. მართლაც, განვიხილოთ გრაფში რაიმე წრედი, რომელიც იწყება ნებისმიერი x მწვერვალიდან. გავაგრძელოთ მოცემული წრედი ისე, რომ თითოეულ შემთხვევაში ჩავრთოთ მასში ახალი წიბო. რადგან ყველა მწვერვალს აქვს ლუწი ხარისხი, ბოლოს და ბოლოს, მოცემული წრედი დაბრუნდება x მწვერვალში. თუ ამ შემთხვევაში გრაფის ყველა მწვერვალი გავლილია, მაშინ ეილერის ციკლი მიღებულია. დაუშვათ, რომ მოცემული ციკლი არ მოიცავს გრაფის ყველა წიბოს და მწვერვალს, მაშინ გრაფში აუცილებლად მოიძებნება ისეთი y მწვერვალი, რომელიც იქნება უკვე აგებული ციკლის წიბოს ინციდენტური და ამავე დროს, ისეთი წიბოს ინციდენტურიც, რომელიც არ შედის მოცემულ ციკლში.

უნდა ავაგოთ ახალი წრედი y-დან, რომელიც მოიცავს ყველა შესაძლო ახალ წიბოებს. როგორც წინათ, ასევე ახლაც, ეს წრედი დაბრუნდება y მწვერვალში. ამ წრედების გაერთიანება მოგვცემს ისეთ ციკლს, რომელიც მოიცავს უფრო მეტ წიბოთა რიცხვს, ვიდრე პირველი. თუ გავაგრძელებთ ანალოგიურ აგებას, საბოლოო ჯამში მივიღებთ ეილერის ციკლს.

განვიხილოთ გრაფი, რომელიც არ წარმოადგენს ეილერის გრაფს. მოვიყვანოთ შემდეგი თეორემა: იმისათვის რომ $P(x,y)$ წრედი დაკავშირებულ გრაფში იყოს ეილერის წრედი, აუცილებელი და საკმარისია, რომ x და y მწვერვალები იყოს ერთადერთი, რომელთა ლოკალური ხარისხები კენტია.

დავამტკიცოთ თეორემა: ვთქვათ, საწყისი გრაფი არაა ეილერის გრაფი, ხოლო $P(x,y)$ წრედი წარმოადგენს ეილერის წრედს; მაშინ ყველა მწვერვალის ლოკალური ხარისხი, გარდა x და y მწვერვალისა, იქნება ლუწი. დავამატოთ ამ გრაფში (x,y) წიბო. ამის შემდეგ, გრაფის ყველა მწვერვალს ექნება

ლუწი ლოკალური ხარისხი. აქედან გამომდინარეობს, რომ გრაფი გახდება ეილერის. ეილერის გრაფში კი არსებობს ეილერის ციკლი. ამის შემდეგ, თუ გრაფიდან ამოვიღებთ (x, y) წიბოს, ცხადია, დარჩენილი $P(x, y)$ წრედი იქნება ეილერის წრედი.

დაუშვათ, რომ გრაფი შეიცავს K მწვერვალებს კენტი ლოკალური ხარისხით. მოცემული გრაფისათვის შეიძლება დავაყენოთ შემდეგი ამოცანა: აუცილებელია განისაზღვროს წიბოების მიხედვით არათანაკვეთადი წრედების მინიმალური რიცხვი, რომელიც ფარავდა საწყისი გრაფის ყველა წიბოს. ამ ამოცანის ამოხსნას იძლევა შემდეგი თეორემა: წიბოების მიხედვით არათანაკვეთადი წრედების მინიმალური რიცხვი, რომელიც ფარავს გრაფის ყველა წიბოს, K რაოდენობის კენტი ლოკალური ხარისხის მქონე გრაფისათვის, ტოლია $K/2$.

დავამტკიცოთ თეორემა. განვიხილოთ გრაფი K რაოდენობის კენტი ლოკალური ხარისხით. როგორც ვიცით, K ლუწია (გრაფში კენტი მწვერვალების რიცხვი ლუწია), K-დან აღებული ყოველი მწვერვალი იქნება საბოლოო მწვერვალი თუნდაც ერთი ისეთი წრედისა, რომელიც ფარავს გრაფის წიბოებს. აქედან გამომდინარე, ასეთი წრედების რიცხვი იქნება, არაუმცირეს, $K/2$-ისა. დავუმატოთ K მწვერვალებს $K/2$ რაოდენობის ახალი წიბოები. ამის შემდეგ, გრაფის ყველა მწვერვალის ლოკალური ხარისხი იქნება ლუწი, ანუ გრაფი გახდება ეილერის გრაფი. ამის შემდეგ, ამოვიღოთ დამატებული წიბოები. ცხადია, ამ დროს გრაფი დაიყოფა $K/2$ რაოდენობის წიბოების მიხედვით არათანაკვეთად წრეებად, რომელიც ფარავს გრაფის ყველა წიბოს.

გრაფში ეილერის ციკლის გამოვლენის ალგორითმი. გრაფში ეილერის ციკლის გამოსავლენად გამოიყენება შემდეგი ალგორითმი, რომელიც შეიცავს ორ წესს:

1. გამოვდივართ რომელიმე x მწვერვალიდან. წიბოს, რომელიც გავიარეთ გადაუსვამთ ხაზს. არასდროს არ

გაივლით იმ წიბოს, რომელიც მაშინვე მიგიყვანს x მწვერვალში, თუ რა თქმა უნდა, არსებობს სხვა შესაძლებლობა;
2. არასდროს არ გავივლით იმ წიბოს, რომელიც ამ შემთხვევაში წარმოადგენს ხიდს, ანუ ისეთს, რომლის გრაფიდან ამოღების შემდეგ გრაფში დარჩენილი გადაუხაზავი წიბოები დაიყოფა ორ ისეთ დამაკავშირებელ კომპონენტად, რომლების შეიცავენ ერთ წიბოს მაინც.

ჰამილტონის წრედი, ციკლი, გზა, კონტური.

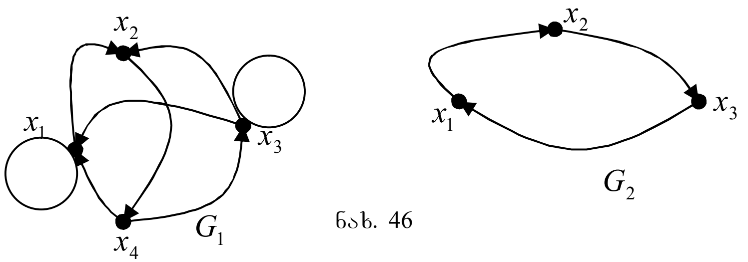
თუ გრაფში არსებობს წრედი, რომელიც შეიცავს გრაფის ყველა მწვერვალს თითოჯერ, მაშინ ასეთ წრედს ეწოდება ჰამილტონის წრედი. თუ გრაფში არსებობს ციკლი, რომელიც შეიცავს გრაფის ყველა მწვერვალს თითოჯერ, მაშინ მას ეწოდება ჰამილტონის ციკლი. ორიენტირებულ გრაფში შემოაქვთ ანალოგიური ცნება, ჰამილტონის გზა და კონტური.

ოპერაციები გრაფებზე

3.19. გრაფების გაერთიანება

ვთქვათ, მოცემულია ორი გრაფი $G_1=(X_1,\Gamma_1)$ და $G_2=(X_2,\Gamma_2)$ ამ გრაფების გაერთიანება ეწოდება ახალ G გრაფს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $G=G_1\bigcup G_2$ ამავე დროს, თუ $G=(X,\ \Gamma)$ მაშინ $X=X_1\bigcup X_2$, $\Gamma x=\Gamma_1 x\bigcup\Gamma_2 x$, სადაც X არის G გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე, ხოლო Γ ამ სიმრავლის თავის თავზე მრავალსახა ასახვა. იმ შემთხვევაში, როცა $x\notin X_1$, მაშინ $\Gamma_1 x=\varnothing$ და თუ $x\notin X_2$ მაშინ $\Gamma_2 x=\varnothing$.

გაერთიანების ოპერაცია ვაჩვენოთ შემდეგ მაგალითზე. ვთქვათ, გვაქვს ორი გრაფი G_1 და G_2 (ნახ. 46).



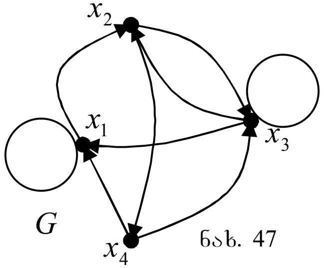
ნახ. 46

როგორც ნახაზიდან ჩანს $X_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $X_2=\{x_1,x_2,x_3\}$. გარდა ამისა $\Gamma_1x_1=\{x_1,x_2\}$, $\Gamma_1x_2=\{x_4\}$, $\Gamma_1x_3=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\Gamma_1x_4=\{x_1,x_3\}$, $\Gamma_2x_1=\{x_2\}$, $\Gamma_2x_2=\{x_3\}$, $\Gamma_2x_3=\{x_1\}$.

გრაფის $G=(X,\ \Gamma)$ მწვერვალთა სიმრავლე იქნება: $X=X_1\bigcup X_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\bigcup\{x_1,x_2,x_3\}=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, ხოლო მრავალსახა ასახვა Γ.

$$\Gamma x_1=\Gamma_1x_1\bigcup\Gamma_2x_1=\{x_1,x_2\}\bigcup\{x_2\}=\{x_1,x_2\}$$
$$\Gamma x_2=\Gamma_1x_2\bigcup\Gamma_2x_2=\{x_4\}\bigcup\{x_3\}=\{x_3,x_4\}$$
$$\Gamma x_3=\Gamma_1x_3\bigcup\Gamma_2x_3=\{x_1,x_2,x_3\}\bigcup\{x_1\}=\{x_1,x_2,x_3\}$$
$$\Gamma x_4=\Gamma_1x_4\bigcup\varnothing=\{x_1,x_3\}\bigcup\varnothing=\{x_1,x_3\}$$

მაშინ $G=(X,\ \Gamma)$ გრაფს ექნება 47-ე ნახ.ზე მოცემული სახე.



ნახ. 47

გრაფთა გაერთიანების ოპერაცია შეიძლება გავავრცელოთ n რაოდენობის გრაფზე. ვთქვათ, მოცემულია გრაფთა ერთიანობა: $G_1=(X_1,\Gamma_1)$, $G_2=(X_2,\Gamma_2)$,..., $G_n=(X_n,\Gamma_n)$

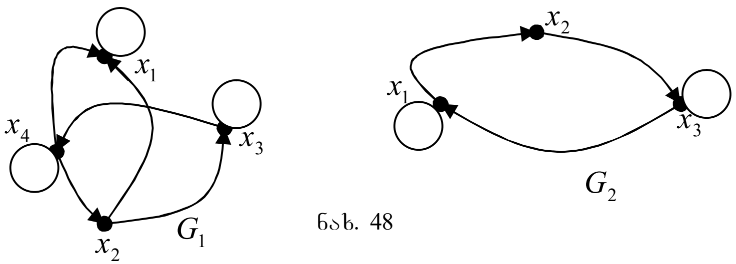
ამ გრაფთა გაერთიანება

იქნება ახალი $G=(X,\ \Gamma)$ გრაფი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $G=G_1\bigcup G_2\bigcup\ldots\bigcup G_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}G_i$.

ამავე დროს, $X=X_1\bigcup X_2\bigcup\ldots\bigcup X_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}X_i$, ხოლო $\Gamma_x=\Gamma_1x\bigcup\Gamma_2x\bigcup\ldots\bigcup\Gamma_nx=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\Gamma_ix$, თუ $x\notin X_i$, მაშინ $\Gamma_ix=\varnothing$.

3.20. გრაფების თანაკვეთა

განვიხილოთ ორი გრაფი: $G_1=(X_1,\Gamma_1)$ და $G_2=(X_2,\Gamma_2)$. მოცემულ გრაფთა თანაკვეთა ეწოდება ახალ $G=(X,\ \Gamma)$ გრაფს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $G=G_1\bigcap G_2$ ამასთან ერთად, $X=X_1\bigcap X_2$, ხოლო $\Gamma x=\Gamma_1x\bigcap\Gamma_2x$ სადაც $x\in X$. ვთქვათ, G_1 და G_2 გრაფს აქვს შემდეგი სახე (ნახ. 48).



ნახ. 48

განვსაზღვროთ ამ გრაფების თანაკვეთა. ახალი G გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე იქნება:

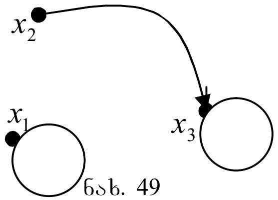
$$X=X_1\bigcap X_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\bigcap\{x_1,x_2,x_3\}=\{x_1,x_2,x_3\}$$

მწვერვალთა ასახვა იქნება: $\Gamma_1x_1=\{x_1\}$, $\Gamma_1x_2=\{x_1,x_3\}$, $\Gamma_1x_3=\{x_3,x_4\}$, $\Gamma_1x_4=\{x_1,x_2,x_3\}$, $\Gamma_2x_1=\{x_1,x_2\}$,

$\Gamma_2 x_2 = \{x_2, x_3\}$, $\Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_3\}$. მაშინ მწვერვალთა მრავალსახა Γ ასახვა ახალი გრაფისა იქნება:

$$\Gamma x_1 = \Gamma_1 x_1 \cap \Gamma_2 x_1 = \{x_1\} \cap \{x_1, x_2\} = \{x_1\}$$
$$\Gamma x_2 = \Gamma_1 x_2 \cap \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_3\} \cap \{x_2, x_3\} = \{x_3\}$$
$$\Gamma x_3 = \Gamma_1 x_3 \cap \Gamma_2 x_3 = \{x_3, x_4\} \cap \{x_1, x_3\} = \{x_3\}$$

ხოლო გრაფს ექნება შემდეგი სახე(ნახ. 49).



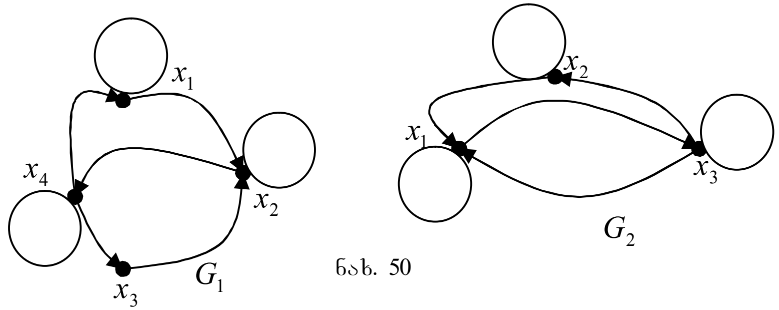
ნახ. 49

გრაფთა თანაკვეთის ოპერაცია ვრცელდება n რაოდენობის გრაფზე. ვთქვათ, მოცემულია შემდეგ გრაფთა სიმრავლე $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$, $G_2 = (X_2, \Gamma_2), \dots, G_n = (X_n, \Gamma_n)$ მოცემულ გრაფთა თანაკვეთა ეწოდება ახალ $G = (X, \Gamma)$ გრაფს, რომელიც ტოლია $G = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_n = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$, თუ $X = X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n = \bigcap_{i=1}^{n} X_i$,, $\Gamma x = \Gamma_1 x \cap \Gamma_2 x \cap \dots \cap \Gamma_n x = \bigcap_{i=1}^{n} \Gamma_i x$, სადაც $x \in X$ და, თუ $x \notin X_i$ მაშინ $\Gamma_i x = \varnothing$.

3.21. გრაფების სხვაობა

სხვაობის ოპერაცია განისაზღვრება მხოლოდ ორი გრაფისათვის. განვიხილოთ ორი გრაფი $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ მოცემულ გრაფთა სხვაობა ეწოდება $Q = G_1 \setminus G_2$ გრაფს, რომელიც შემდეგნაირად განისაზღვრება: $Q = G_1 \cap \overline{G}_2$, სადაც $\overline{G}_2$ წარმოადგენს G_2 გრაფის დამატებას ასახვით L უნივერსალურ გრაფამდე. ასევე შეიძლება განისაზღვროს G_2 და G_1 გრაფის სხვაობაც. აღვნიშნოთ იგი K-თი. მაშინ

$K = G_2 \setminus G_1$ და განისაზღვრება შემდეგნაირად $K = G_2 \cap \overline{G}_1$ სადაც $\overline{G}_1$ წარმოადგენს გრაფის დამატებას ასახვით L გრაფამდე. საერთოდ $G_1 \setminus G_2 \neq G_2 \setminus G_1$. განვიხილოთ სხვაობის ოპერაცია $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ გრაფების მაგალითზე (ნახ. 50).



ნახ. 50

ჯერ განვიხილოთ $Q = G_1 \setminus G_2$ სხვაობა. L გრაფად ავირჩიოთ სრული გრაფი Gx ოთხ მწვერვალზე. ანუ $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ განვსაზღვროთ $\overline{G}_2 = (X_1, \overline{\Gamma}_2)$ გრაფი. G_1 და G_2 გრაფებისათვის ადგილი აქვს შემდეგ ასახვებს:

$\Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_1 x_2 = \{x_2, x_4\}$, $\Gamma_1 x_3 = \{x_2\}$, $\Gamma_1 x_4 = \{x_1, x_3, x_4\}$, $\Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_3\}$, $\Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2\}$, $\Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$,

მაშინ

$$\overline{\Gamma}_2 x_1 = X \setminus \Gamma_2 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_3\} = \{x_2, x_4\}$$
$$\overline{\Gamma}_2 x_2 = X \setminus \Gamma_2 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4\}$$
$$\overline{\Gamma}_2 x_3 = X \setminus \Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_2, x_3\} = \{x_4\}$$
$$\overline{\Gamma}_2 x_4 = X \setminus \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \varnothing$$

ეხლა ვიპოვოთ გრაფი $Q = G_1 \bigcap \overline{G}_2$. დაუშვათ, $Q = (A, \Gamma')$ მაშინ $A = X_1 \bigcap X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, ხოლო ასახვა $\Gamma' x = \Gamma_1 x \bigcap \overline{\Gamma}_2 x$ იქნება:

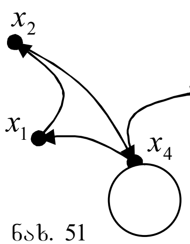
$$\Gamma' x_1 = \Gamma_1 x_1 \bigcap \overline{\Gamma}_2 x_1 = \{x_1, x_2\} \bigcap \{x_2, x_4\} = \{x_2\},$$

$$\Gamma' x_2 = \Gamma_1 x_2 \bigcap \overline{\Gamma}_2 x_2 = \{x_2, x_4\} \bigcap \{x_3, x_4\} = \{x_4\},$$

$$\Gamma' x_3 = \Gamma_1 x_3 \bigcap \overline{\Gamma}_2 x_3 = \{x_2\} \bigcap \{x_4\} = \varnothing,$$

$$\Gamma' x_4 = \Gamma_1 x_4 \bigcap \overline{\Gamma}_2 x_4 = \{x_1, x_3, x_4\} \bigcap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_1, x_3, x_4\}.$$

ამგვარად, Q გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 51).



ნახ. 51

ახლა განვიხილოთ $K_2 = G_2 \setminus G_1$ – სხვაობა, $K = G_2 \setminus \overline{G}_2$ – განსაზღვრის საფუძველზე. ვიპოვოთ $\overline{G}_1 = (X, \Gamma_1)$ გრაფი. მწვერვალთა X სიმრავლე იქნება $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, ხოლო $\Gamma_1 x$ ასახვები იქნება:

$$\overline{\Gamma}_1 x_1 = X \setminus \Gamma_1 x_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_2\} = \{x_3, x_4\},$$

$$\overline{\Gamma}_1 x_2 = X \setminus \Gamma_1 x_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_2, x_4\} = \{x_1, x_3\},$$

$$\overline{\Gamma}_1 x_3 = X \setminus \Gamma_2 x_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_2\} = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$\overline{\Gamma}_1 x_4 = X \setminus \Gamma_2 x_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \setminus \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_2\}.$$

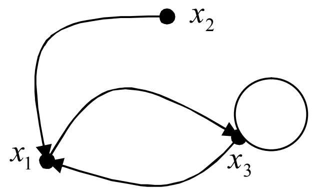
დაუშვათ, $K = (B, \Gamma'')$ მაშინ $B = X_2 \bigcap X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ხოლო $\Gamma'' x = \Gamma_2 x \bigcap \overline{\Gamma}_1 x$ ტოლი იქნება:

$$\Gamma'' x_1 = \Gamma_2 x_1 \bigcap \overline{\Gamma}_1 x_1 = \{x_1, x_3\} \bigcap \{x_3, x_4\} = \{x_3\},$$

$$\Gamma'' x_2 = \Gamma_2 x_2 \bigcap \overline{\Gamma}_1 x_2 = \{x_1, x_2\} \bigcap \{x_1, x_3\} = \{x_1\},$$

$$\Gamma'' x_3 = \Gamma_2 x_3 \bigcap \overline{\Gamma}_1 x_3 = \{x_1, x_3, x_2\} \bigcap \{x_1, x_3, x_4\} = \{x_1, x_3\}.$$

ე.ი. $K = G_2 \setminus G_1$ გრაფს ექნება სახე (ნახ. 52).



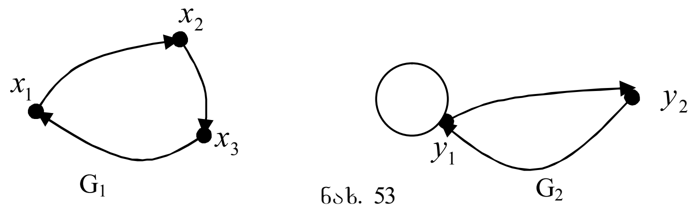
ნახ. 52

3.22. გრაფების დიზიუნქციური ჯამი

განვიხილოთ ორი გრაფი G_1 და G_2. მათი დიზიუნქციური ჯამი ეწოდება ისეთ G გრაფს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $G = G_1 \oplus G_2$ ანუ $G = G_1 \oplus G_2 = (G_1 \bigcup G_2) \setminus (G_1 \bigcap G_2)$.

3.23. გრაფების ნამრავლი

ვთქვათ, მოცემულია გრაფები $G_1 = (X, \Gamma_1)$ და $G_2 = (Y, \Gamma_2)$ მოცემულ გრაფთა ნამრავლი (დეკარტული) ეწოდება $G = (Z, \Gamma)$ გრაფს, სადაც $Z = X \times Y$ ხოლო $\Gamma z = \Gamma_1 x \times \Gamma_2 y$, ამასთანავე $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ და $z = (x, y)$. გრაფების ნამრავლი აღინიშნება შემდეგნაირად: $G = G_1 \times G_2$ მოვიყვანოთ მაგალითი: $G_1 = (X, \Gamma_1)$ და $G_2 = (Y, \Gamma_2)$ გრაფების ნამრავლისა (ნახ. 53).



ნახ. 53

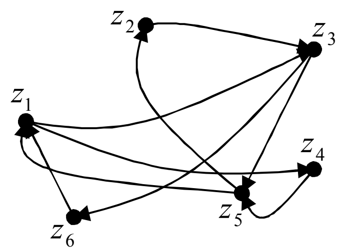
მოცემული გრაფების ნამრავლი იქნება $G=(Z,\Gamma)$ გრაფი. განვსაზღვროთ Z:

$$Z=X\times Y=\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_1,y_2\}=$$
$$=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_1),(x_3,y_2)\}=$$
$$=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}.$$

ახლა განვსაზღვროთ ასახვები Γ:

$$\Gamma z_1=\Gamma_1 x_1\times\Gamma_2 y_1=\{x_2\}\times\{y_1,y_2\}=\{(x_2,y_1),(x_2,y_2)\}=\{z_3,z_4\},$$
$$\Gamma z_2=\Gamma_1 x_1\times\Gamma_2 y_2=\{x_2\}\times\{y_1\}=\{(x_2,y_1)\}=\{z_3\},$$
$$\Gamma z_3=\Gamma_1 x_2\times\Gamma_2 y_1=\{x_3\}\times\{y_1,y_2\}=\{(x_3,y_1),(x_3,y_2)\}=\{z_5,z_6\},$$
$$\Gamma z_4=\Gamma_1 x_2\times\Gamma_2 y_2=\{x_3\}\times\{y_1\}=\{(x_3,y_1)\}=\{z_5\},$$
$$\Gamma z_5=\Gamma_1 x_3\times\Gamma_2 y_1=\{x_1\}\times\{y_1,y_2\}=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2)\}=\{z_1,z_2\},$$
$$\Gamma z_6=\Gamma_1 x_3\times\Gamma_2 y_2=\{x_1\}\times\{y_1\}=\{(x_1,y_1)\}=\{z_1\}.$$

მიღებულ გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 54).



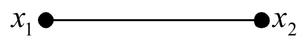
ნახ. 54

გამრავლების ოპერაცია განიხილება n რაოდენობის გრაფებისათვის. თუ მოცემულია გრაფები $G_1=(X_1,\Gamma_1)$, $G_2=(X_2,\Gamma_2)$,..., $G_n=(X_n,\Gamma_n)$ მაშინ ამ გრაფების ნამრავლი იქნება $G=(X,\ \Gamma)$, $G=G_1\times G_2\times\ldots\times G_n=\prod_{i=1}^{n}G_i$ ამავე

დროს, $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\prod_{i=1}^{n}X_i$ ხოლო მრავალსახა ასახვა Γ იქნება $\Gamma x=\Gamma_1x_1\times\Gamma_2x_2\times\ldots\times\Gamma_nx_n=\prod_{i=1}^{n}\Gamma_ix_i$ სადაც $x_1\in X_1$, $x_2\in X_2$,..., $x_n\in X_n$.

როგორც ცნობილია X სიმრავლის თავისთავზე n-ჯერ დეკარტული ნამრავლი გვაძლევს n დეკარტულ ხარისხს.

$$\mathrm{X}^{\mathrm{n}}=\underbrace{\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times\mathrm{X}\times\ldots\times\mathrm{X}}_{\mathrm{n}-\text{ჯერ}}$$

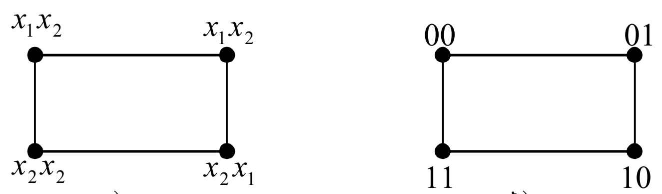


ნახ. 55

ეს ოპერაცია საშუალებას გვაძლევს განვსაზღვროთ გრაფების სპეციფიკური ტიპები, რომელთაც კუბები ეწოდება. ვთქვათ, $\mathrm{G}_2=(\mathrm{X},\Gamma)$ წარმოადგენს სრულ გრაფს ორ მწვერვალზე (ნახ. 55). სიმარტივისათვის მწვერვალებში მარყუჟებს არ განვიხილავთ. ვიპოვოთ ნამრავლი $\mathrm{K}_2=\mathrm{G}_2\times\mathrm{G}_2$ დაუშვათ, $\mathrm{K}_2=(\mathrm{Z},\Gamma)$ მაშინ

$$Z=X\times X=\{x_1,x_2\}\times\{x_1,x_2\}=\{(x_1,x_1),(x_1,x_2),(x_2,x_1),(x_2,x_2)\}=$$
$$=\{z_1,z_2,z_3,z_4\}.$$

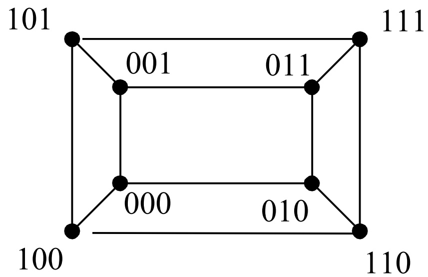
ადვილად შეიძლება მოიძებნოს Γ ასახვებიც K_2 გრაფისათვის. შედეგად მიღებულ K_2 გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 56).



ა) ბ)

ნახ. 56

K_2 გრაფს, რომელიც მოცემულია 56-ე ნახ.-ზე ეწოდება ორგანზომილებიანი კუბი. როგორც ვხედავთ, კუბის თითოეული მწვერვალი წარმოადგენს (x_i, x_j) ანაკრებს, სადაც x_i და x_j ტოლია ანუ მოცემული გრაფის მწვერვალები წარმოდგენილია ორობითად. კუბის ორ მწვერვალს ეწოდება მოსაზღვრე, თუ მათი ორობითი წარმოდგენა ერთმანეთისაგან განსხვავდება მხოლოდ ერთი თანრიგით.



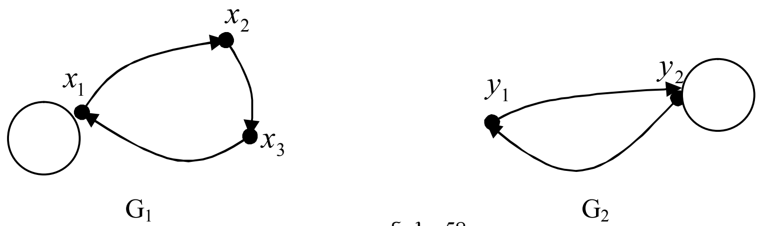
ნახ. 57

ანალოგიურად შეიძლება აიგოს სამგანზომილებიანი K_2 კუბი (ნახ. 57). საერთოდ, განიხილავენ n განზომილებიან კუბს, რომლის თითოეული მწვერვალი წარმოადგენს $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ანაკრებს. აღვნიშნოთ n განზომილებიანი კუბი K_n-ით. მას ექნება 2^n მწვერვალი. სხვადასხვა ხარისხის კუბები შეიძლება განისაზღვროს რეკურსიულად: $K_1 = G_2$, $K_2 = G_2 \times K_1$, $K_3 = G_2 \times K_2$ და $K_n = G_2 \times K_{n-1}$.

3.24. გრაფების ჯამი

ავიღოთ ორი გრაფი $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ ამ გრაფების ჯამი ეწოდება $G = G_1 + G_2$ გრაფს, სადაც თუ $G = (Z, \Gamma z)$ მაშინ $Z = X \times Y$ ხოლო $\Gamma z = (\Gamma_1 x \times \{y\}) \cup (\{x\} \times \Gamma_2 y)$, $x \in X,\ y \in Y,\ z \in Z$ და

$z = (x, y)$. მოვიყვანოთ გრაფების შეკრების მაგალითი. 58-ე ნახ.-ზე მოცემული $G_1 = (X_1, \Gamma_1)$ და $G_2 = (X_2, \Gamma_2)$ გრაფებისათვის.



ნახ. 58

ვთქვათ, ამ გრაფების ჯამი არის $G = (Z, \Gamma)$ გრაფი, მაშინ:

$Z = X \times Y = \{x_1, x_2, x_3\} \times \{y_1, y_2\} = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1),$
$(x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2)\} = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}$

ახლა განვსაზღვროთ ასახვა Γ:

$\Gamma z_1 = (\Gamma_1 x_1 \times \{y_1\}) \cup (\{x_1\} \times \Gamma_2 y_1) = ((x_1, x_2) \times \{y_1\}) \cup (\{x_1\} \times \{y_2\}) =$
$= \{(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2)\} = \{z_1, z_2, z_3\},$

$\Gamma z_2 = (\Gamma_1 x_1 \times \{y_2\}) \cup (\{x_1\} \times \Gamma_2 y_2) = ((x_1, x_2) \times \{y_2\}) \cup (\{x_1\} \times \{y_1, y_2\}) =$
$= \{(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_1, y_1)\} = \{z_1, z_2, z_4\},$

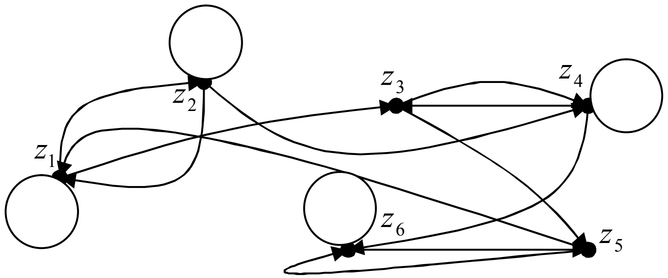
$\Gamma z_3 = (\Gamma_1 x_2 \times \{y_1\}) \cup (\{x_2\} \times \Gamma_2 y_1) = \{(x_3, y_1), (x_2, y_2)\} = \{z_4, z_5\},$

$\Gamma z_4 = (\Gamma_1 x_2 \times \{y_2\}) \cup (\{x_2\} \times \Gamma_2 y_2) = (x_3, y_2) \cup (\{x_2\} \times \{y_1, y_2\}) =$
$= \{(x_3, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2)\} = \{z_3, z_4, z_6\},$

$\Gamma z_5 = (\Gamma_1 x_3 \times \{y_1\}) \cup (\{x_3\} \times \Gamma_2 y_1) = \{(x_1, y_1), (x_3, y_2)\} = \{z_1, z_6\},$

$\Gamma z_6 = (\Gamma_1 x_3 \times \{y_2\}) \cup (\{x_3\} \times \Gamma_2 y_2) = (x_3, y_2) \cup (\{x_3\} \times \{y_1, y_2\}) =$
$= \{(x_3, y_2), (x_3, y_1)\} = \{z_5, z_6\}.$

მიღებულ გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ. 59).



ნახ. 59

შეკრების ოპერაცია შეიძლება ჩავატაროთ n რაოდენობის გრაფზე. თუ მოცემულია გრაფები $G_1=(X_1,\Gamma_1)$, $G_2=(X_2,\Gamma_2)$,..., $G_n=(X_n,\Gamma_n)$ მაშინ მათი ჯამი იქნება, $G=(X,\Gamma)$ რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$G=G_1+G_2+\ldots+G_n=\sum_{i=1}^{n}G_i\ .$$

ამასთან ერთად:

$$X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\prod_{i=1}^{n}X_i,,$$

ხოლო

$$\Gamma z=\left(\Gamma_1x_1\times\{x_2\}\times\{x_3\}\times\ldots\times\{x_n\}\right)\cup\left(\{x_1\}\times\Gamma_2x_2\times\ldots\times\{x_n\}\right)\cup\ldots\cup$$
$$\cup\{x_1\}\times\{x_2\}\times\ldots\times\{x_{n-1}\}\times\Gamma_nx_n$$

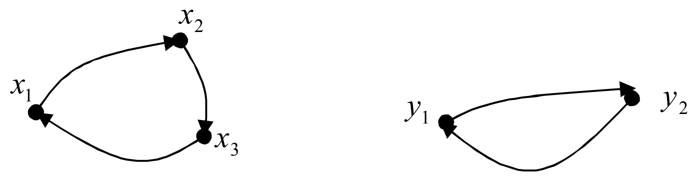
სადაც $x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\ldots x_n\in X_n$.

3.25. გრაფების კომპოზიცია

ვთქვათ, მოცემულია გრაფები $G_1=(X_1,\Gamma_1)$ და $G_2=(X_2,\Gamma_2)$. დაუშვათ, გრაფი $G=(Z,\Gamma)$ მიღებულია G_1 და G_2 გრაფების კომპოზიციის შედეგად. აღვნიშნოთ გრაფთა კომპოზიცია შემდეგნაირად $G=G_1\oplus G_2$. G გრაფის Z

მწვერვალები და Γ ასახვები განისაზღვრება შემდეგნაირად, $Z=X\times Y$, ხოლო $\Gamma z=\left(\Gamma_1x\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y\right)$.

განვიხილოთ მაგალითი. ვთქვათ, $G_1=(X,\Gamma_1)$ და $G_2=(X,\Gamma_2)$ აქვთ შემდეგი სახე (ნახ. 60).



G_1 G_2

ნახ. 60

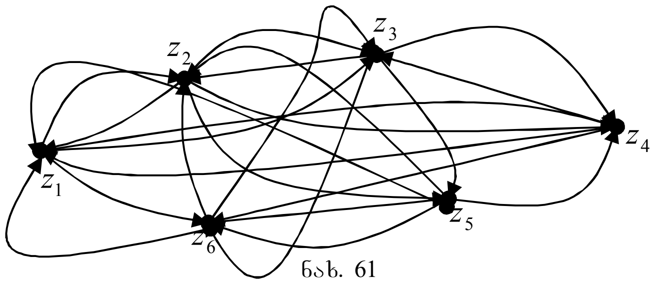
ვიპოვოთ მოცემული გრაფების კომპოზიცია. განვსაზღვროთ

$$Z=X\times Y=\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_1,y_2\}=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),$$
$$(x_2,y_2),(x_3,y_1),(x_3,y_2)\}=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}.$$

განვსაზღვროთ ასახვები:

$$\Gamma z_1=\left(\Gamma_1x_1\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y_1\right)=(\{x_2\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_2\})=$$
$$=\{(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_1,y_2),(x_3,y_2)\}=\{z_3,z_4,z_2,z_6\},$$
$$\Gamma z_2=\left(\Gamma_1x_1\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y_2\right)=(\{x_2\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_1\})=$$
$$=\{(x_2,y_1),(x_2,y_2),(x_1,y_1),(x_3,y_1)\}=\{z_1,z_3,z_4,z_5\},$$
$$\Gamma z_3=\left(\Gamma_1x_2\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y_1\right)=(\{x_3\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_2\})=$$
$$=\{(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_1,y_2),(x_2,y_2)\}=\{z_2,z_4,z_5,z_6\},$$
$$\Gamma z_4=\left(\Gamma_1x_2\times y\right)\cup\left(x_2\times\Gamma_2y_2\right)=(\{x_3\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_1\})=$$
$$=\{(x_3,y_1),(x_3,y_2),(x_1,y_1),(x_2,y_1)\}=\{z_1,z_3,z_5,z_6\},$$
$$\Gamma z_5=\left(\Gamma_1x_3\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y_1\right)=(\{x_1\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_2\})=$$
$$=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_2),(x_3,y_2)\}=\{z_1,z_2,z_4,z_6\},$$
$$\Gamma z_1=\left(\Gamma_1x_3\times y\right)\cup\left(x\times\Gamma_2y_2\right)=(\{x_1\}\times\{y_1,y_2\})\cup(\{x_1,x_2,x_3\}\times\{y_1\})=$$
$$=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_2,y_1),(x_3,y_1)\}=\{z_1,z_2,z_3,z_5\}.$$

ავაგოთ მიღებული გრაფი (ნახ.61).



ნახ. 61

კომპოზიციის ოპერაცია ვრცელდება n რაოდენობის გრაფებზე. დაუშვათ, გვაქვს $G_1=(X_1,\Gamma_1)$, $G_2=(X_2,\Gamma_2)$,...,$G_n=(X_n,\Gamma_n)$ გრაფთა ერთიანობა. მოცემულ გრაფთა კომპოზიცია იქნება $G=(X,\Gamma)$ გრაფი, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$G=G_1\oplus G_2\oplus\ldots\oplus G_n=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}}G_1,$$

თუ $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_n=\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$, ხოლო

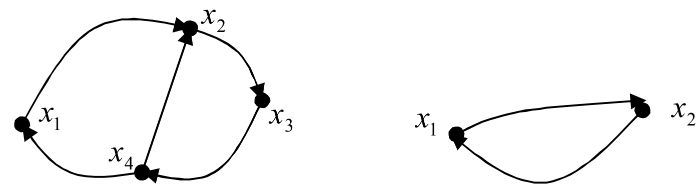
$$\Gamma x=\left(\Gamma_1 x\times X_2\times X_3\times\ldots\times X_n\right)\bigcup\left(X\times\Gamma_2 x_2\times X_3\times\ldots\times X_n\right)\bigcup$$
$$\bigcup\ldots\bigcup(X_1\times X_2\times\ldots\times X_{n-1}\times\Gamma_n X_n).$$

3.26. გრაფების შეერთება

ამ ოპერაციას საფუძვლად უდევს სიმრავლეთა ჯამის ოპერაცია. განვიხილოთ ორი გარფი $G_1=(X\ ,\Gamma_1)$ და $G_2=(Y,\Gamma_2)$. G_1 და G_2 გრაფის შეერთება ეწოდება $G=(A,\Gamma)$ გრაფს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგი სახით: $A=(\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times Y)$ ხოლო $\Gamma(i,z)=((\{1\}\times\Gamma_1 z)\bigcup(\{2\}\times Y))\bigcup((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 z))$

სადაც $i=(1,2),(i,z)\in A.$ თუ $z\notin X$ მაშინ $\Gamma_1 z=\varnothing$ და ითვლება, რომ $((\{1\}\times\Gamma_1 z)\bigcup(\{2\}\times y)=\varnothing$ და ასევე, თუ

$z\notin Y$, მაშინ $\Gamma_2 z=\varnothing$ და ითვლება, რომ $((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 z)=\varnothing$ გრაფების შეერთება აღინიშნება შემდეგნაირად: $G=G_1\otimes G_2$. განვიხილოთ გრაფების შეერთების ოპერაცია შემდეგი გრაფების მაგალითზე (ნახ. 62).



G_1 ნახ. 62 G_2

ვთქვათ, მოცემულია გრაფები $G_1=(X\ ,\Gamma_1)$ და $G_2=(Y,\Gamma_2)$ (ნახ. 42). განვსაზღვროთ:

$A=(\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times Y)=(\{1\}\times\{x_1,x_2,x_3,x_4\})\bigcup(\{2\}\times\{y_1,y_2\})=$
$=\{(1,x_1),(1,x_2),(1,x_3),(1,x_4)(2,x_1)(2,x_2)\}=\{z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6\}$

შემდეგში განვსაზღვროთ Γ ასახვა:

$\Gamma(1,x_1)=(\{1\}\times\Gamma_1 x_1)\bigcup(\{2\}\times Y)\bigcup((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 x_1))=$
$=((\{1\}\times\{x_2\})\bigcup(\{2\}\times(x_1,x_2\})\bigcup\varnothing=\{(1,x_2),(2,x_1)(2,x_2)\}=$
$=\{z_2,z_5,z_6\}$

ვინაიდან, $\Gamma_2 x_1=\varnothing$ და $((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 x_1)=\varnothing$

ანალოგიურად:

$\Gamma(1,x_2)=(\{1\}\times\Gamma_1 x_2)\bigcup(\{2\}\times Y)\bigcup((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 x_2))=$
$=\{(1,x_3),(2,x_1)(2,x_2)\}=\{z_3,z_5,z_6\}$

$\Gamma(1,x_3)=(\{1\}\times\Gamma_1 x_3)\bigcup(\{2\}\times Y)\bigcup((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 x_3))=$
$=\{(1,x_4),(2,x_1)(2,x_2)\}=\{z_4,z_5,z_6\}$

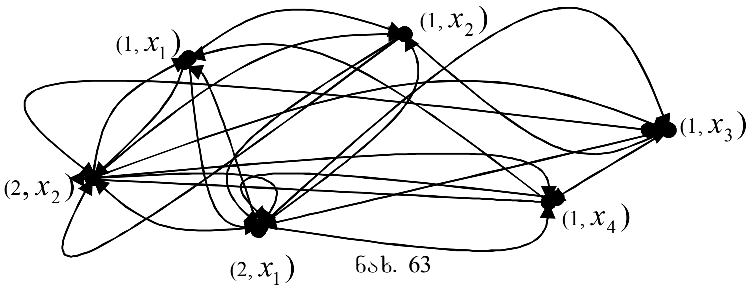
$\Gamma(1,x_4)=(\{1\}\times\Gamma_1 x_4)\bigcup(\{2\}\times Y)\bigcup((\{1\}\times X)\bigcup(\{2\}\times\Gamma_2 x_4))=$
$=\{(1,x_1),(2,x_1)(2,x_2)\}=\{z_1,z_5,z_6\}$

$$\Gamma(2,x_1) = (\{1\}\times\Gamma_1 x_1)\cup(\{2\}\times Y)\cup((\{1\}\times X)\cup(\{2\}\times\Gamma_2 x_1)) =$$
$$= \varnothing\cup((\{1\}\times\{x_1,x_2,x_3,x_4\})\cup(\{2\}\times(x_2\}) = \{(1,x_1),(1,x_2),(1,x_3),$$
$$(1,x_4),(2,x_2)\} = \{z_1,z_2,z_3,z_4,z_6\}$$

რადგან $\Gamma_1 x_1 = \varnothing$ და $((\{1\}\times\Gamma_1 x_1)\cup(\{2\}\times Y) = \varnothing$,

$$\Gamma(2,x_2) = (\{1\}\times\Gamma_2 x_2)\cup(\{2\}\times Y)\cup((\{1\}\times X)\cup(\{2\}\times\Gamma_2 x_2)) =$$
$$= \{(1,x_1),(1,x_2),(1,x_3),(1,x_4),(2,x_1)\} = \{z_1,z_2,z_3,z_4,z_6\}$$

მიღებულ გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ.63).



ნახ. 63

შეერთების ოპერაცია შეიძლება განვახორციელოთ n რაოდენობის გრაფზეც. ვთქვათ, მოცემულია გრაფები $G_1 = (X_1,\Gamma_1), G_2 = (X_2,\Gamma_2),..., G_n = (X_n,\Gamma_n)$ მოცემული გრაფების შეერთება იქნება $G=(X,\Gamma)$ გრაფი, რომელიც ტოლია $G = G_1\otimes G_2\otimes\ldots\otimes G_n$ ამავე დროს: $X = (\{1\}\times X_1)\cup(\{2\}\times X_2)\cup\ldots\cup(\{n\}\times X_n)$, ხოლო

$$\Gamma(i,x_i) = ((\{1\}\times\Gamma_1 x_i)\cup(\{2\}\times X_2)\cup\ldots\cup(\{n\}\times X_n))\cup(\{1\}\times X_1)\cup$$
$$\cup(\{2\}\times\Gamma_2 x_1)\cup\ldots\cup(\{n\}\times X_n))\cup\ldots\cup((\{1\}\times X_1)\cup(\{2\}\times X_2\cup$$
$$\cup\ldots\cup(\{n\}\times\Gamma_n x_i)),$$

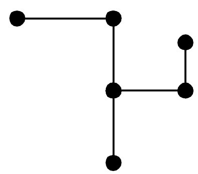
სადაც, $(i,x_i)\in X$. თუ $x_i\in X_i$, მაშინ $\Gamma_i x_i \neq 0$ და ითვლება, რომ

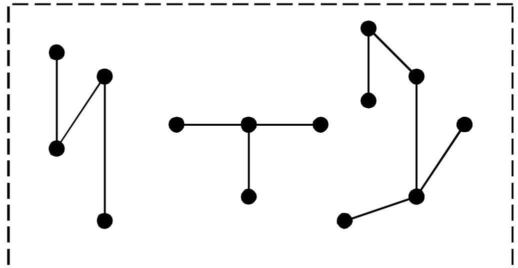
$$((\{1\}\times X_1)\cup\ldots\cup(\{i\}\times\Gamma_i x_i)\cup\ldots\cup(\{n\}\times X_n)) = \varnothing.$$

ხეები და ტყე

3.27. ხის განსაზღვრა. ორიენტირებული ხე

გრაფთა თეორიაში განიხილება გრაფის სპეციალური ტიპი, რომელსაც ხე ეწოდება (ნახ 64). ხე ეს არის არაორიენტირებული გრაფი, რომელიც არ შეიცავს ციკლს. ხეში ასევე არ არსებობს მარყუჟი. თუ გრაფი შეიცავს ხეებს, როგორც თავის დამაკავშირებელ კომპონენტს, მაშინ ასეთ გრაფს ეწოდება ტყე. (ნახ 65).


ნახ. 64

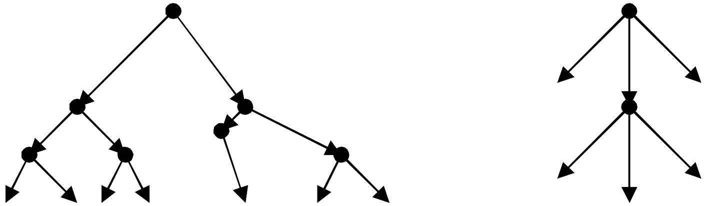

ნახ. 65

საერთოდ, ხე შეიძლება აგებული იქნას შემდეგნაირად. ავიღოთ რაიმე x_0 მწვერვალი და მისგან გავატაროთ წიბო x_1 მწვერვალში, რომელიც დაშორებულია ერთის ტოლი მანძილით x_0-დან. x_1 მწვერვალიდან გავატაროთ წიბო ისეთ x_2 მწვერვალში, რომელიც x_0-დან დაშორებულია 2-ის ტოლი მანძილით. თუ გავაგრძელებთ ასეთი სახის აგებას, დავალთ x_n მწვერვალამდე, რომელიც დაშორებულია x_0 მწვერვალიდან n-ის ტოლი მანძილით.

მწვერვალს, რომლიდანაც იწყება გრაფის აგება, ეწოდება ხის ფესვი.

ვთქვათ, x_0 არის ხის ფესვი. თუ x_0-ში არ შედის არცერთი რკალი, ხოლო დანარჩენ ყველა მწვერვალში შედის

მხოლოდ ერთი რკალი, მაშინ ასეთ გრაფს ეწოდება ორიენტირებული ხე-გრაფი (ნახ. 66).



ნახ. 66

3.28. გრაფის ციკლომატური რიცხვი

განვიხილოთ დაკავშირებული გრაფი. ვთქვათ, იგი შეიცავს ციკლების რიგს. დავსვათ ასეთი კითხვა: რამდენი უმცირესი რაოდენობის წიბოს ამოღებაა საჭირო, რომ გრაფი აღარ შეიცავდეს ციკლს და, ამავე დროს იგი დარჩეს დაკავშირებული? ამოვიღოთ საწყისი გრაფიდან ისეთი წიბოები, რომლებიც ადგენენ ციკლს მანამ, სანამ მასში აღარ დარჩება არც ერთი ციკლი; ცხადია, შედეგად მიღებული გრაფი იქნება ხე.

ასეთი გზით მიღებულ ხეს ეწოდება კერძო ხე-გრაფი ანუ გადამფარავი ხე. ან საწყისი გრაფის კარკასი.

ვთქვათ, საწყისი გრაფის წიბოთა რიცხვია N, ხოლო მწვერვალთა რიცხვი n. მიღებული ხე-გრაფის წიბოთა რიცხვი იქნება $(n-1)$. მაშინ იმ წიბოთა რაოდენობა, რომელიც ამოღებულია საწყისი გრაფიდან, ტოლი იქნება N-$(n-1)$. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი $\delta(G)$-თი, მაშინ $\delta(G)=N$-$(n-1)$. $\delta(G)$-ს ეწოდება გრაფის ციკლომატური რიცხვი, ანუ ციკლური რანგი.

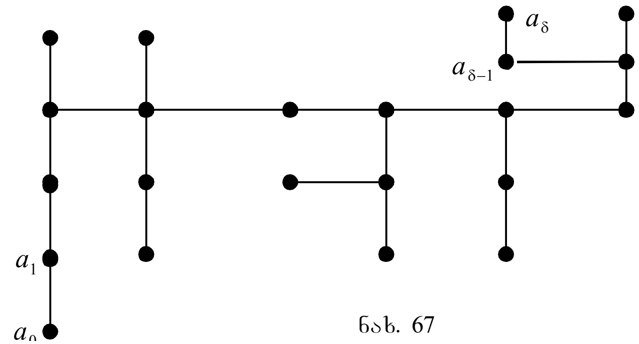
გრაფის ციკლომატური რიცხვი $\delta(G)\geq 0$. თუ გრაფი ხეა, მაშინ $\delta(G)=0$; ხოლო თუ გრაფი ადგენს ელემენტარულ ციკლს, მაშინ $\delta(G)=1$. არსებითად, ხე-გრაფის ციკლომატური რიცხვი ტოლი იქნება: $\delta(G)=(n-1)-(n-1)=0$ ხოლო

ელემენტარულ ციკლში საჭიროა მხოლოდ ერთი წიბოს ამოღება, რომ ციკლი აღარ არსებობდეს.

თუ გრაფი შეიცავს K დამაკავშირებელ კომპონენტას, მაშინ მისი ციკლომატური რიცხვი განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\delta(G)=N-n+k$.

3.29. ხის დიამეტრი, რადიუსი, ცენტრი

განვიხილოთ რომელიმე ხე. მაქსიმალური სიგრძის წრედს ხეში ეწოდება დიამეტრალური, ხოლო მის სიგრძეს ხის დიამეტრი. აღვნიშნოთ ხის დიამეტრი δ-თი (ნახ.67). თუ ხის დიამეტრი ლუწია, მაშინ ხეს აქვს ერთადერთი ცენტრი, რომელიც იმყოფება c_0 მწვერვალში.



ნახ. 67

c_0 მწვერვალიდან ნებისმიერ მწვერვალამდე მაქსიმალურ მანძილს ეწოდება ხის r რადიუსი და ტოლი იქნება $\delta/2$ თუ $r(a,c_0)=\delta/2$; მაშინ a წარმოადგენს c_0-ზე გამავალ დიამეტრალური წრედის ბოლოს. ხის c_0 ცენტრი იქნება $a_{\delta/2}$ მწვერვალში: $c_0=a_{\delta/2}$.

თუ ხის δ დიამეტრი კენტია, მაშინ ხეს ექნება ორი c_1 და c_2 ცენტრი, რომლებიც იქნებიან $a_{\delta+1/2}$ და $a_{\delta-1/2}$ მწვერვალებში, ანუ: $c_1=a_{\delta+1/2}$, $c_2=a_{\delta-1/2}$. c_1 და c_2

მწვერვალებიდან ნებისმიერ მწვერვალამდე მაქსიმალური მანძილი იქნება ხის რადიუსი: $r(a,c_i)=(\delta+1)/2,\ i=\overline{(1,2)}$. ანალოგიურად a მწვერვალი იქნება c_1 და c_2 მწვერვალზე გამავალი დიამეტრალური წრედის ბოლო.

ე. ი. თუ ხეში დიამეტრი ლუწია, მაშინ ყველა დიამეტრალური წრედი გადის ხის ერთადერთ c_0 ცენტრზე, თუ ხის დიამეტრი კენტია, მაშინ ყველა დიამეტრალური წრედი გადის c_1 და c_2 ცენტრებზე და ცენტრალურ წიბოს წარმოადგენს $P=(c_1,c_2)$.

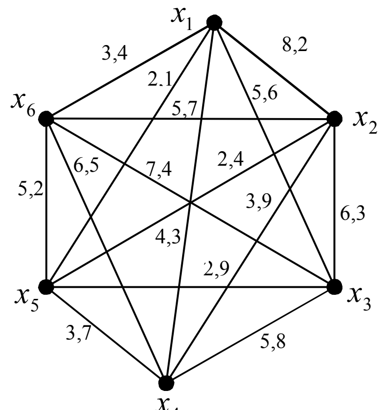
3.30. გრაფში მინიმალური გადამფარავი ხის (კარკასის) მოძებნის ალგორითმი

ვთქვათ, მოცემულია გრაფი. დავუშვათ, იგი არის სრული. ვთქვათ, მის ყველა წიბოს გააჩნია განსაზღვრული წონა ან ფასი, რომელიც გამოსახულია რიცხვებით. აღვნიშნოთ ეს რიცხვი c_i - თი. გრაფთა თეორიაში მტკიცდება, რომ, თუ $G=(X,\Gamma)$ არის სრული გრაფი და მისი წიბოების c_i წონა განსხვავებულია ერთმანეთისაგან, მაშინ არსებობს საწყისი გრაფისათვის ერთადერთი გადამფარავი ხე (კარკასი). ისეთი, რომ მისი ყველა წიბოს ჯამური წონა C იქნება მინიმალური ანუ $C_{\min}=\sum_{i=1}^{N} c_i$, სადაც N არის გადამფარავი ხის წიბოთა რიცხვი.

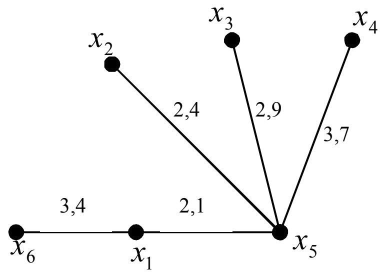
მინიმალური გადამფარავი ხის განსაზღვრისათვის დამუშავებულია რამდენიმე ალგორითმი (კრასკალის, პრიმას). განვიხილოთ პირველ რიგში კრასკალის ალგორითმი.

საწყის გრაფში გამოვყოფთ მინიმალური წონის P_1 წიბოს. ამის შემდეგ, გამოვყოფთ P_2 წიბოს, რომელსაც გააჩნია მინიმალური წონა ისე, რომ $P_1 \ne P_2$ და, ამავე დროს, P_1 და P_2 არ უნდა ადგენდეს ციკლს საწყის გრაფში. შემდეგ, თავიდან ამოირჩევა P_3 წიბო უმცირესი წონით.

ანალოგიურად $P_1 \ne P_2 \ne P_3$ და P_1,P_2,P_3 არ ადგენენ ციკლს საწყის გრაფში და ა. შ. თუ საწყისი გრაფის მწვერვალთა რიცხვი ტოლია n -ის, მაშინ პროცესი დამთავრდება $(n-1)$ ბიჯზე. წიბოთა მიღებული თანმიმდევრობა $P_1,P_2,...,P_{n-1}$ განსაზღვრავს მინიმალურ გადამფარავ ხეს. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, მოცემულია გრაფი (ნახ. 68).



ნახ. 68



ნახ. 69

ამოვირჩიოთ ამ გრაფში $P_1=(x_1,x_5)$ წიბო 2,1, მინიმალური წონით. დარჩენილი წიბოებიდან თავიდან ვირჩევთ $P_2=(x_2,x_5)$ წიბოს, რომლის წონა ტოლია 2,4. შემდგომში ვირჩევთ $P_3=(x_3,x_5)$ წიბოს მინიმალური 2,9 წონით და ანალოგიურად $P_4=(x_1,x_6)$ წიბოს 3,4 წონით და $P_5=(x_4,x_5)$ წიბოს 3,7 წონით. ამის შემდეგ, ავაგებთ მიღებულ ხეს წიბოთა მინიმალური ჯამური წონით (ნახ.69).

მოვიყვანოთ პრიმას ალგორითმი. ალგორითმის მოქმედება განვიხილოთ წინამდებარე სრული გრაფის მაგალითზე. ავაგოთ მოცემული გრაფისათვის მწვერვალთა მისაზღვრეობის მატრიცა, იმ განსხვავებით, რომ (0,1) ელემენტების მაგივრად მატრიცაში ჩავსვათ შესაბამისი წიბოს წონა.

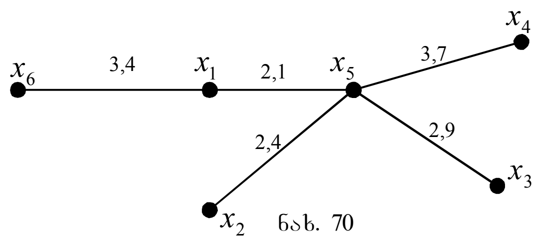
$$
A=\begin{array}{c|cccccc}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\hline
x_1 & - & 8,2 & 5,6 & 4,3 & 2,1 & 3,4 \\
x_2 & 8,2 & - & 6,3 & 3,9 & 2,4 & 5,7 \\
x_3 & 5,6 & 6,3 & - & 5,8 & 2,9 & 7,4 \\
x_4 & 4,3 & 3,9 & 5,8 & - & 3,7 & 6,5 \\
x_5 & 2,1 & 2,4 & 2,9 & 3,7 & - & 5,2 \\
x_6 & 3,4 & 5,7 & 7,4 & 6,5 & 5,2 & -
\end{array}
$$

ალგორითმი გულისხმობს სპეციალური ცხრილის შევსებას:

ბიჯის №	საშუალედო ცხრილი A					საშუალედო ცხრილი B				ხის სტრუქტურა	
										წიბო	წიბოს წონა
I ბიჯი	x_2 8,2 x_1	x_3 5,6 x_1	x_4 4,3 x_1	x_5 2,1 x_1	x_6 3,4 x_1	x_2 2,4 x_5	x_3 2,9 x_5	x_4 3,7 x_5	x_6 5,2 x_5	$x_1 - x_5$	2,1
II ბიჯი	x_2 2,4 x_5	x_3 2,9 x_5	x_4 3,7 x_5	x_6 3,4 x_1		x_3 6,3 x_2	x_4 3,9 x_2	x_6 5,7 x_2		$x_5 - x_2$	2,4
III ბიჯი	x_3 2,9 x_5	x_4 3,7 x_5	x_6 3,4 x_1			x_4 5,8 x_3	x_6 7,4 x_3			$x_5 - x_3$	2,9
IV ბიჯი	x_4 3,7 x_5	x_6 3,4 x_1				x_4 7,4 x_6				$x_1 - x_6$	3,4
V ბიჯი	x_4 3,7 x_5									$x_5 - x_4$	3,7

ალგორითმის პირველ ბიჯზე საშუალედო ცხრილში შეგვაქვს ნებისმიერი მწვერვალის ინციდენტური წიბოს წონა. ამ შემთხვევაში ამორჩეულია მწვერვალი x_1. ამასთან ერთად 1 ბიჯის A საშუალედო ცხრილის ქვედა და ზედა განყოფილებაში ჩაიწერება მწვერვალები, რომლებიც წიბოს განსაზღვრავენ მაგ: (x_1, x_4) ხოლო მის შუა ნაწილში იწერება წიბოს წონა. ყველა წიბოთა შორის ამოირჩევა (x_1, x_5) წიბო უმცირესი წონით-2,1. ამის შემდეგ მოცემული წიბო A საშუალედო ცხრილში შემოიფარგლება ჩარჩოთი და ჩაიწერება თავისივე წონით საწყისი ცხრილის ორ მარჯვენა სვეტში. ამავე ბიჯზე B საშუალედო ცხრილში შეგვაქვს ყველა წიბო, რომელიც ინციდენტურია ადრე არჩეული მინიმალური წონის წიბოს ბოლო მწვერვალის. ჩვენ შემთხვევაში, ეს წიბოები იქნება x_5 მწვერვალის ინციდენტური ვინაიდან ჩვენს მიერ არჩეულია მინიმალური წონის წიბო (x_1, x_5). ამის შემდეგ, საჭიროა მეორე ბიჯზე გადასვლა. ამ ბიჯზე ხდება A საშუალედო ცხრილის წიბოთა წონების შედარება B საშუალედო ცხრილის შესაბამისი წიბოების (სვეტების მიხედვით) წონებთან. II ბიჯის A საშუალედო ცხრილის შესაბამის სვეტში შეგვაქვს მინიმალური წონის წიბო. ჩვენი მაგალითისათვის შედარება იძლევა: (x_5, x_1) წიბოს წონა ნაკლებია (x_1, x_2) წიბოს წონაზე, ამიტომ II ბიჯის A საშუალედო ცხრილის I სვეტში შეგვაქვს (x_5, x_2) წიბო, რომლის წონაა 2,4. მეორე სვეტში შეგვაქვს (x_5, x_3) წიბო. ვინაიდან მისი წონა ნაკლებია (x_1, x_3)-ის წონაზე. ანალოგიურად შეივსება II ბიჯის A საშუალედო ცხრილის დანარჩენი სვეტებიც. II ბიჯის A საშუალედო ცხრილში თავიდან აირჩევა წიბო (x_5, x_2), რომლის წონა მინიმალურია და ტოლია 2,4. ამის შემდეგ, მას შემოვავლებთ ჩარჩოს და ჩავწერთ თავისი წონით საწყისი ცხრილის მარჯვენა განაპირა სვეტში. შემდგომში ჩავატარებთ პროცედურას, რომელიც

ანალოგიურია ზემოთ აღწერილის, რომლის შედეგად 5 ბიჯის შემდეგ, საწყისი ცხრილის მარჯვენა განაპირა სვეტში მივიღებთ საძიებელი გადამფარავი ხის სტრუქტურას, წიბოთა მინიმალური ჯამური წონით. ამ გრაფს ექნება შემდეგი სახე (ნახ.70).

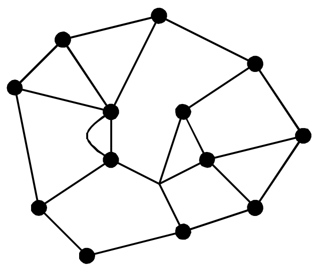


ნახ. 70

ბრტყელი გრაფები

3.31. ბრტყელი გრაფის განსაზღვრა

ბრტყელი გრაფი შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთმანეთთან მომიჯნავე რამდენიმე მრავალკუთხედთა ერთიანობა. ამავე დროს, არაა აუცილებელი, რომ მრავალკუთხედის წიბო იყოს სწორი წრფე (ნახ. 71).

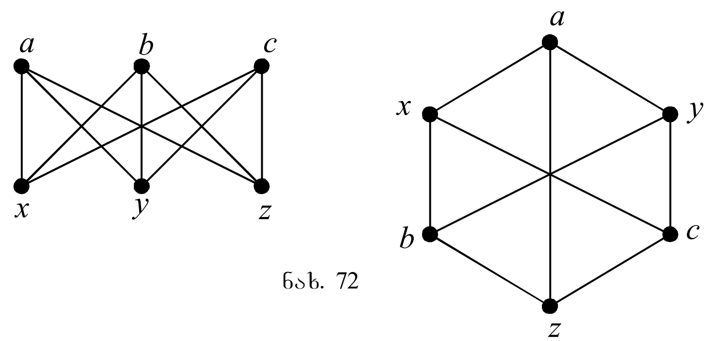


ნახ. 71

გრაფის იმ არეს, რომელიც შემოსაზღვრულია მრავალკუთხედის წიბოებით და არ შეიცავს შიგნით არავითარ წიბოს და მწვერვალს, ეწოდება ბრტყელი გრაფის წახნაგი. მრავალკუთხედის სასაზღვრო წიბოებს ეწოდებათ წახნაგის ნაპირები ანუ მინიმალური ციკლი. ბრტყელ გრაფში განიხილება, აგრეთვე, მაქსიმალური ციკლი, რომელიც შეიცავს წიბოებს; ისინი შემოსაზღვრავენ მთლიან გრაფს მთელი თავისი წახნაგებით. იმ არის ყველა წერტილები,

რომლებიც მდებარეობენ მაქსიმალური ციკლის გარეთ, ადგენენ ბრტყელი გრაფის არაშემოსაზღვრულ წახნაგს. ბრტყელ გრაფში ორ წახნაგს ეწოდება მოსაზღვრე, თუ მათ გააჩნიათ ერთი საერთო წიბო მაინც.

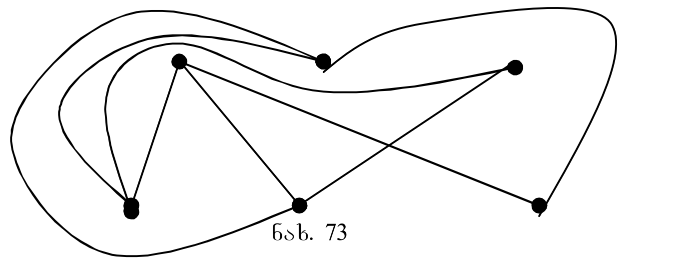
უმრავლეს შემთხვევაში, გრაფის მოცემული კონფიგურაცია არ იძლევა საშუალებას განვსაზღვროთ წარმოადგენს თუ არა ეს გრაფი ბრტყელ გრაფს. მოვიყვანოთ შემდეგი ცნობილი ამოცანა სამი სახლისა და სამი ჭის შესახებ. იგი შემდეგნაირად ყალიბდება: არსებობს 3 სახლი და 3 ჭა. საჭიროა ყველა სახლიდან გავიყვანოთ გზა ყველა ჭისაკენ ისეთნაირად, რომ მათ ერთმანეთი არსად არ გადაკვეთონ. მოცემული სიტუაცია შეიძლება გამოვსახოთ შემდეგი გრაფის სახით (ნახ. 72).



ნახ. 72

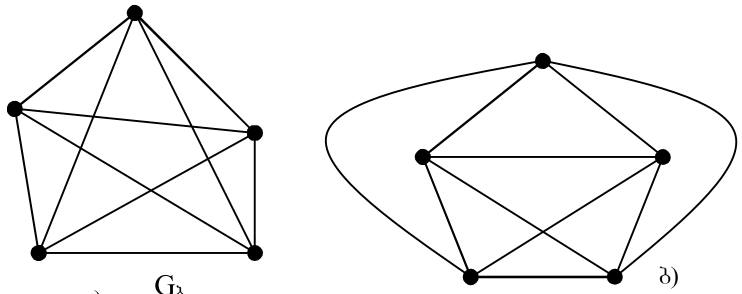
ამ ნახაზზე a, b, c, მწვერვალები გამოსახავენ სახლებს, x, y, z მწვერვალები ჭებს, ხოლო წიბოები გზებს მათ შორის.

მოცემულ წიბოთა გადაკვეთა შეიძლება დავიყვანოთ მინიმალურზე (ნახ. 73) მაგრამ უფრო მეტის მიღწევა შეუძლებელია.



ნახ. 73

აქვე აღვნიშნოთ, რომ 72-ე ნახ-ზე მოცემული გრაფები წარმოადგენენ იზომორფულ გრაფებს. იგივე შეიძლება ითქვას 73-ე ნახ-ზე მოცემული გრაფისათვისაც, იგი იზომორფულია 72 ნახაზზე მოცემული გრაფების.



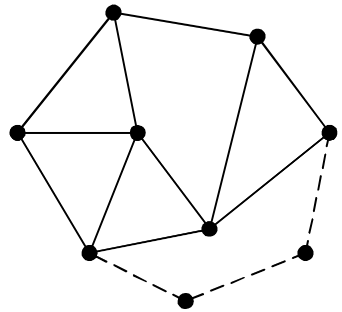
ნახ. 74

როგორც $74^{\text{ბ}}$ ნახ-დან ჩანს, გრაფი $G_{\text{ზ}}$ შეუძლებელია ვაქციოთ ბრტყელ გრაფად. საერთოს, წარმოადგენს თუ არა მოცემული გრაფი ბრტყელ გრაფს? მოვიყვანოთ პონტრიაგინ-კურატოვსკის თეორემა: იმისათვის, რომ გრაფი იყოს ბრტყელი, აუცილებელი და საკმარისია იგი არ შეიცავდეს თავის ქვეგრაფში $74^{\text{ა}}$ და $74^{\text{ბ}}$ ნახაზზე მოცემულ ქვეგრაფებს.

3.32. ეილერის ფორმულა

განვიხილოთ $G=(X,\Gamma)$ ბრტყელი გრაფი. დაუშვათ, მისი მწვერვალების რიცხვია n, წიბოების რიცხვი N, ხოლო წახნაგების f. მოცემული გრაფისათვის სამართლიანია შემდეგი ფორმულა $n-N+f=2$ (1) ამ ფორმულას ეილერის ფორმულა ეწოდება.

დაუშვათ, რომ ბრტყელი გარფი შეიცავს ერთ მინიმალურ ციკლს. მისთვის $n=N$ და $f=2$ ე. ი. ფორმულა (1) სრულდება. დაუშვათ (1) სრულდება იმ შემთხვევისათვის, როდესაც წახნაგთა რიცხვი ტოლია f-ის. დაუმატოთ ასეთ ბრტყელ გრაფს კიდევ ერთი წახნაგი (ნახ. 75). დაუშვათ, ამ დროს დაემატა R წიბო, ე.ი. R-1 მწვერვალი. დავწეროთ



ნახ. 75

ეილერის ფორმულა ახალი გრაფისათვის $n'-N'+f'=2$ (2). ამავე დროს, $n'=n+(R-1)$, $N'=N+R$ და $f'=f'+1$. თუ ჩავსვამთ (2)-ში მივიღებთ:

$$n+(R-1)-(N+R)+(f+1)$$

ანუ $n-N+f=2$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ ეილერის ფორმულა სამართლიანია ნებისმიერი ბრტყელი გრაფისათვის.

ბრტყელი გრაფის წიბოთა რაოდენობა შეიძლება განსაზღვრული იყოს შემდეგნაირადაც.

აღვნიშნოთ k კუთხიანი წახნაგების რიცხვი f_k-თი. 72-ე ნახაზისათვის $f_2=1$, $f_3=4$, $f_4=3$, $f_5=1$, $f_6=1$, $f_7=0$, $f_8=0$, $f_9=1$. ნებისმიერი კუთხიანი წახნაგი შემოსაზღვრულია წიბოთი. ამავე დროს, თითოეული წიბო შედის ორ მოსაზღვრე წახნაგში. შესაბამისად ბრტყელი გრაფის წიბოთა გაორმაგებული რიცხვი ტოლი იქნება:

$$2N=2f_2+3f_3+4f_4+\ldots+ef_e=\sum_{k=2}^{e}k\cdot f_k$$

აქედან

$$N=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{e}k\cdot f_k$$

სადაც e არის მაქსიმალური ციკლის წიბოთა რიცხვი.

გრაფების ძირითადი რიცხვები

3.33. გრაფის ქრომატული რიცხვი

განვიხილოთ არაორიენტირებული დაკავშირებული გრაფი $G=(X,\Gamma)$, რომელიც არ შეიცავს ჯერად წიბოებს და მარყუჟებს. ვთქვათ, K არის არაუარყოფითი მთელი რიცხვი. თუ მოცემული გრაფის ყველა მწვერვალი შეიძლება გაფერადდეს K საღებავით ისეთნაირად, რომ არცერთი ორი მოსაზღვრე მწვერვალი არ იქნება გაფერადებული ერთნაირი ფერის საღებავით, მაშინ გრაფს ეწოდება K ქრომატული ანუ K-თი გაფერადებული. K მინიმალურ რიცხვს, რომლითაც გრაფი იქნება K გაფერადებული, ეწოდება გრაფის ქრომატული რიცხვი. აღვნიშნოთ იგი $K(G)$-თი. გრაფისათვის გაფერადების ფუნქციის შემოტანას მივყავართ გრაფის მწვერვალთა დაყოფასთან არაგადამკვეთ მწვერვალთა კლასამდე: $C_1,C_2,\ldots,C_k$. თუ გრაფის მწვერვალთა სიმრავლე არის X, მაშინ $X=\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ და $C_i\bigcap C_j=\varnothing$.

ამ შემთხვევაში წიბოებით იქნებიან დაკავშირებული სხვადასხვა კლასის მწვერვალები. ერთიდაიმავე კლასის საზღვრებში მყოფი მწვერვალების ფერი იქნება ერთიდაიგივე. თუ გრაფის ყველა მწვერვალი შეიძლება გაფერადდეს ორი ფერის საღებავით, ასეთ გრაფს ეწოდება ბიქრომატული. ცხადია, სრული გრაფისათვის $K(G)=n$, სადაც n მწვერვალთა რიცხვია. განვიხილოთ შემდეგი თეორემა: გრაფი იქნება ბიქრომატული, თუ იგი არ შეიცავს კენტი სიგრძის ციკლებს. ამ თეორემას კენიგის თეორემა ეწოდება. დავამტკიცოთ ეს თეორემა: ავიღოთ გრაფის რაიმე a მწვერვალი და გავაფერადოთ იგი α ფერით. შემდეგ ავიღოთ ნებისმიერი x მწვერვალი. დაუშვათ, იგი გაფერადებულია α ფერით, მაშინ ცხადია x-ის ყველა მოსაზღვრე მწვერვალები უნდა იყოს გაფერადებული β (სხვა) ფერით, ახლა ავიღოთ ნებისმიერი y მწვერვალი. ვთქვათ, იგი გაფერადებულია β

ფერით, მაშინ მისი მოსაზღვრე ყველა მწვერვალები უნდა იყოს გაფერადებული α ფერით. თუ გავაგრძელებთ ამ პროცედურას, საბოლოოდ გავაფერადებთ ყველა მწვერვალს. ამავე დროს არ იქნება ისეთი შემთხვევა, რომ ერთი და იმავე მწვერვალს, მაგალითად x, რომელიც გაფერადებულია α ფერით მოუწიოს გაფერადება მეორე β ფერით, რადგან ამ შემთხვევისათვის x და a მწვერვალები მიეკუთვნებიან კენტი სიგრძის ციკლს. მაგრამ თეორემის პირობის თანახმად გრაფში ასეთი ციკლები არ არსებობს. შესაბამისად მოცემული გრაფი იქნება ბიქრომატული. ამავე დროს, თუ გრაფი ბიქრომატულია, მაშინ მასში არ იარსებებს კენტი სიგრძის ციკლები, ვინაიდან ამ შემთხვევაში გრაფის მწვერვალთა გასაფერადებლად საჭირო იქნება ორზე მეტი საღებავი.

3.34. მადომინირებელი სიმრავლე

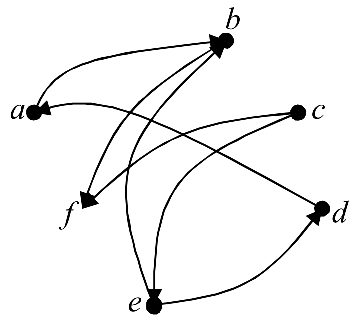
განვიხილოთ ნებისმიერი (ორიენტირებული, არაორიენტირებული) დაკავშირებული გარფი $G=(X,\Gamma)$. X მწვერვალთა სიმრავლიდან გამოვყოთ მწვერვალთა რაიმე ქვესიმრავლე $T\subseteq X$. T სიმრავლეს ვუწოდით მადომინირებელი, თუ გრაფის ნებისმიერი $x\notin T$ მწვერვალი წარმოადგენს იმ წიბოს ბოლოს, რომლის მეორე მწვერვალი მდებარეობს T სიმრავლეში. თუ T მადომინირებელი სიმრავლეა, მაშინ ნებისმიერი $x\notin T:\Gamma x\bigcap T=\varnothing$. გრაფში შეიძლება არსებობდეს მადომინირებელ მწვერვალების სიმრავლეთა ოჯახი.

ამ სიმრავლეთა ოჯახს შორის შეიძლება არსებობდეს მინიმალური მადომინირებელი სიმრავლე. ეს არის ისეთი სიმრავლე, რომლის არცერთი მისი ქვესიმრავლე არ ფლობს დომინირების თვისებას. მინიმალურ მადომინირებელ სიმრავლის მწვერვალთა რაოდენობას ეწოდება დომინირების რიცხვი და აღინიშნება $\beta(G)$-თი. ამავე დროს, $\beta(G)=\min(T)$, $T\in M$ სადაც M წარმოადგენს გრაფის მადომინირებელ სიმრავლის ოჯახს.

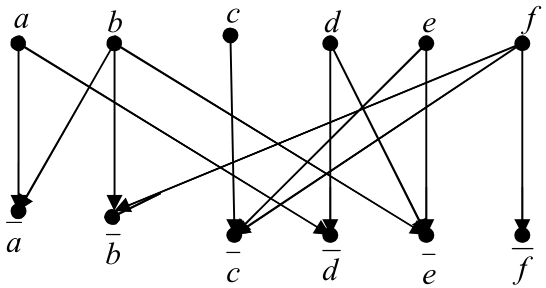
ვთქვათ, G არის ორიენტირებული გარფი, ხოლო G^* მისი უკუგრაფი. G^* უკუგრაფისათვის ადგილი აქვს

უკუმადომინირებული ანუ გარეგან მდგრადობის სიმრავლის ცნებას. არაორიენტირებული გრაფისათვის მადომინირებელი და უკუმადომინირებელი სიმრავლეები ერთი და იგივეა.

მადომინირებელ სიმრავლის მაგალითად შეიძლება გამოვიყენოთ ამოცანა 5 ლაზიერის შესახებ: რა უმცირესი რაოდენობის ლაზიერია საჭირო, რომელიც ისეთნაირად უნდა განვალაგოთ საჭადრაკო დაფის უჯრებზე, რომ ყველა უჯრა იყოს თუნდაც ერთერთი მათგანის დარტყმის ქვეშ? მოვიყვანოთ მინიმალური შიდა მდგრადი სიმრავლის გამოკვლევის ალგორითმი მოცემული გრაფის მაგალითზე (ნახ. 76). მოცემული გრაფის $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ მწვერვალთათვის ვიპოვოთ F ასახვა ახალ $\overline{X}=\{\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d},\overline{e},\overline{f}\}$ სიმრავლეზე ანუ $\overline{x}\in Fx$. F ასახვას ვიპოვით შემდეგნაირად: $\overline{x}=x$ ან $\overline{x}\in\Gamma x$ საწყისი გრაფის მწვერვალთა სიმრავლეს ამოვწერთ სტრიქონის საშუალებით და მის ქვევით მოვათავსებთ $\overline{X}$ მწვერვალთა სიმრავლეს (ნახ. 77).



ნახ. 76



ნახ. 77

ასეთი სახით მიღებულ გრაფს ეწოდება მარტივი გრაფი და აღინიშნება შემდეგნაირად $(X,\overline{X},F)$.

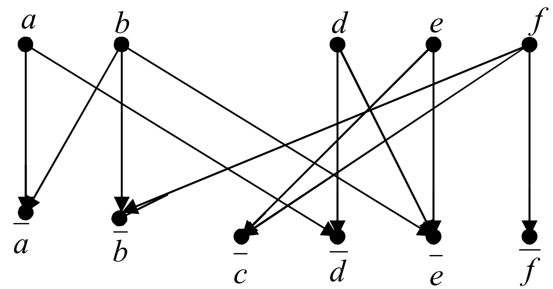
ვთქვათ, T არის საწყისი გრაფის გარეგანმდგრადი სიმრავლე, მაშინ $FT=\overline{X}$, რაც უშუალოდ გამომდინარეობს მადომინირებელი სიმრავლის განსაზღვრიდან. მოვიყვანოთ ალგორითმის ბიჯები.

I ბიჯი. მარტივ გრაფში $(X,\overline{X},F)$ განისაზღვრება ისეთი x მწვერვალები, რომელთათვისაც $Fx\subset Fy$. თუ მარტივ გრაფში ისეთი მწვერვალები მოიძებნება, მაშინ ისინი ამოიღება ამ გრაფიდან. ამ მწვერვალების ამოღება გამართლებულია მადომინირებელი მწვერვალების განსაზღვრის საფუძველზე, ვინაიდან x მწვერვალი იცვლება y მწვერვალით. გრაფისათვის (ნახ. 77) განვსაზღვროთ ყველა მწვერვალთა ასახვები:

$$Fa=\{\overline{a},\overline{d}\},\ Fb=\{\overline{a},\overline{b},\overline{e}\},\ Fc=\{\overline{c}\},\ Fd=\{\overline{e},\overline{d}\},$$

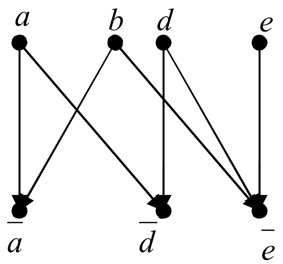
$Fe=\{\overline{c},\overline{e}\}, Ff=\{\overline{b},\overline{c},\overline{f}\}$. რადგან, $Fc\subset Fe$ ამიტომ c მწვერვალი ამოვიღოთ გრაფიდან, შედეგად მივიღებთ ახალ გრაფს (ნახ. 78).

II ბიჯი: მიღებულ გრაფში განისაზღვრება დაკიდებული წიბო – $(x,\overline{x})$. თუ ასეთი მოიძებნება, მაშინ x მწვერვალი მიეკუთვნება T-ს. (ნახ. 78) გრაფისთვის $(f,\overline{f})$ წიბო წარმოადგენს დაკიდებულ წიბოს, ამიტომ $f\in T$.

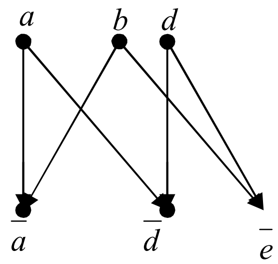


ნახ. 78

III ბიჯი: ამოვიღებთ მარტივი გრაფიდან $x \in T$ მწვერვალს და მის ასახვებს. ჩვენი მაგალითისათვის გრაფიდან ამოვიღებთ f მწვერვალს და მის ასახვებს, რომლის შედეგად მივიღებთ ახალ გრაფს (ნახ. 79).



ნახ. 79



ნახ. 80

IV ბიჯი: როგორც I ბიჯზე აქაც განვსაზღვრავთ ისეთ x მწვერვალებს, რომელთათვისაც $Fx \subset Fy$. თუ ასეთები მოიძებნება, მაშინ ამოვიღებთ მათ $(X,\overline{X},F)$-იდან. ამის შემდეგ როგორც მეორე ბიჯზე, განვსაზღვრავთ დაკიდებულ წიბოს $(x,\overline{x})$. თუ ასეთი მოიძებნება მივაკუთვნებთ $x \in T$-ს და ამოვიღებთ x-ს თავისი ასახვებით $(X,\overline{X},F)$-დან.

თუ $(X,\overline{X},F)$-ში არ მოიძებნება ისეთი x მწვერვალი, რომ $Fx \subset Fy$ ან დაკიდებული წიბო, მაშინ გრაფს ეწოდება დაუყვანელი. დაუყვანელ გრაფში დროებით ნებისმიერ მწვერვალს მიაკუთვნებენ T-ს.

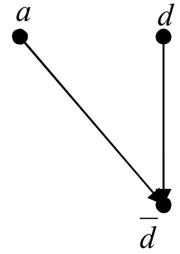
ჩვენი მაგალითისათვის $Fe=\{e\}$ (ნახ. 79) და იგი წარმოადგენს $Fd=\{\overline{d},\overline{e}\}$-ს ქვესიმრავლეს: $Fe \subset Fd$ ამიტომ გრაფიდან ამოვიღებთ e მწვერვალს, რის შედეგადაც მივიღებთ ახალ გრაფს (ნახ. 80).

მიღებულ გრაფში ვეძებთ დაკიდებულ წიბოს. ვინაიდან ასეთი წიბო არ არსებობს, ამიტომ გრაფი წარმოადგენს დაუყვანელ გრაფს. მივაკუთვნოთ b მწვერვალი T-ს.

V ბიჯი: წინა ბიჯზე T-ზე მიკუთვნებული მწვერვალი თავისი ასახვებით ამოიღება $(X,\overline{X},F)$ გრაფიდან.

ჩვენი მაგალითისათვის ამოვიღებთ გრაფიდან b-ს (ნახ. 80), რომლის საფუძველზე მივიღებთ ახალ გრაფს (ნახ. 81).

VI ბიჯი: თავიდან ვუბრუნდებით პირველ ბიჯს და ა.შ.



ნახ. 81

(ნახ. 81) გრაფისთვის, $Fd \subset Fa$, ვინაიდან, $Fa=\{\overline{a},\overline{d}\}$ ხოლო $Fd=\{\overline{d}\}$ ამოვიღოთ d მწვერვალი გრაფიდან, რომლის შემდეგ ბოლო a მწვერვალს მივაკუთვნებთ T-ს. ე. ი. $T=\{f,b,a\}$ მაგრამ, ვინაიდან, b მწვერვალი ნებისმიერად იყო მიკუთვნებული T-ს, ამიტომ აუცილებელია დავუბრუნდეთ IV ბიჯსა და მივაკუთვნოდ T-ს სხვა მწვერვალი, მაგალითად a. მაგრამ ამ შემთხვევაში T-ს აუცილებლად უნდა მივაკუთვნოთ b და d მწვერვალიც ანუ $T=\{f,a,b,d\}$. როგორც ვხედავთ, ეს შედეგი წინა შედეგთან შედარებით უარესია, ვინაიდან ჩვენ ვეძებთ მინიმალურ T-ს.

და ბოლოს, მივაკუთვნოთ d მწვერვალი T-ს, მაშინ $T=\{f,d,b\}$. ეს შედეგი იმეორებს $T=\{f,b,a\}$ შედეგს; ვინაიდან ჩვენ გვაინტერესებს T-ს მწვერვალთა რაოდენობა, ამიტომ $T=\{a,b,f\}$ შეიძლება მივიღოთ საბოლოო შედეგად ანუ გარეგანმდგრად სიმრავლედ.

3.35. გრაფის შიდა მდგრადობის რიცხვი

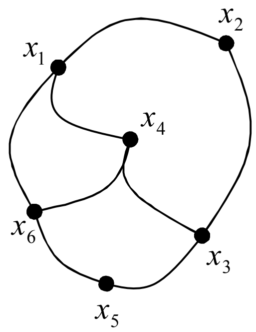
განვიხილოთ ნებისმიერი $G=(X,\Gamma)$ გრაფი. X მწვერვალთა სიმრავლიდან გამოვყოთ რაიმე $f \subset X$ ქვესიმრავლე. f სიმრავლეს ეწოდება დამოუკიდებელი ანუ გრაფის მწვერვალთა შიდამდგრადობის სიმრავლე, თუ ამ სიმრავლის არცერთი ნებისმიერი ორი მწვერვალი არ იქნება მოსაზღვრე ე. ი. $\Gamma f \bigcap f = \emptyset$. გრაფში შეიძლება არსებობდეს შიდამდგრად მწვერვალთა სიმრავლის ოჯახი. აღვნიშნოთ იგი F-ით. ამ F ოჯახის სიმრავლეზე შეიძლება არსებობდეს მაქსიმალური შიდა მდგრადი სიმრავლე; მაშინ გრაფის შიდა მდგრადობის ან დამოუკიდებელ მწვერვალთა რიცხვი ეწოდება $\alpha(G)$ რიცხვს, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად $\alpha(G)=\max\limits_{f\in F}|f|$.

შიდა მდგრადობის სიმრავლის მაგალითად შეიძლება გამოგვადგეს ამოცანა 8 ლაზიერის შესახებ, რომელიც შემდეგნაირად არის ჩამოყალიბებული: რა მაქსიმალური რაოდენობის ლაზიერის განლაგება შეიძლება ჭადრაკის დაფაზე ისე, რომ არცერთი მათგანი არ იყოს მეორის დარტყმის ქვეშ?

3.36. ცარიელი ქვეგრაფების გამოვლენის ალგორითმი

ადრე პარაგრაფში განსაზღვრული იყო სრული და ნული გრაფი. ნულ გრაფს ანუ უწიბოებო გრაფს მეორენაირად ეწოდება ცარიელი გრაფი. განვიხილოთ გრაფის ყველა ცარიელი G გრაფის გამოვლენის ალგორითმი.

ვთქვათ, მოცემულია გრაფი $G=(X,\Gamma)$. გრაფის x_0 მწვერვალის მოსაზღვრე $X_0 \subset X$ მწვერვალებს ვუწოდოთ x_0-ის მიდამო. x_0 მწვერვალის არამოსაზღვრე მწვერვალებს ეწოდებათ $\overline{X}_0$ მიდამოს გარე მწვერვალები. ცარიელი ქვეგრაფების გამოვლენის ალგორითმი განვიხილოთ 81 ნახ-ზე. წარმოდგენილი გრაფისათვის.



$$B=\begin{array}{c} \\ x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ავაგოთ მოცემული გრაფისთვის B მოსაზღვრეობის მატრიცა, რომლის ელემენტებიც იქნება 1, თუ x_i და x_j მწვერვალები მოსაზღვრეა. წინააღმდეგ შემთხვევაში მატრიცის ელემენტი ტოლია ნულის. ალგორითმის თანახმად G გრაფის ცარიელი ქვეგრაფები განისაზღვრება მატრიცის სვეტებიდან. ვინაიდან, მოცემული მატრიცა სიმეტრიულია მთავარი დიაგონალის მიმართ, ამიტომ შეიძლება განვიხილოთ მისი სამკუთხა ქვემატრიცა, რომელიც მოთავსებულია მთავარი დიაგონალის ზემოთ.

აგება დავიწყოთ x_i-დან და ა.შ. x_n მწვერვალამდე. თითოეული ამ მწვერვალებისათვის აიგება ცარიელი გრაფები. განვიხილოთ ნებისმიერი x_j მწვერვალი, სადაც $j=\overline{1,k}$. ვთქვათ, ნაპოვნია მისი მონაწილეობით ყველა ცარიელი ქვეგრაფი. ამის შემდეგ, უნდა ვეძებოთ ცარიელი ქვეგრაფები X_{k+1} მწვერვალების მონაწილეობით. ამისთვის, ქვემატრიციდან ვპოულობთ X_{k+1} მწვერვალების $\overline{X}_{k+1}$ გარე მიდამოს, რის შემდეგ ვიხილავთ $\overline{X}_{k+1}$ მწვერვალების მონაწილეობით ცარიელ ქვეგრაფებს, რასაც ვიწყებთ მაღალი ნომრიდან და ვუმატებთ ამ ცარიელ ქვეგრაფებს X_{k+1}

მწვერვალს. თუ ამ დროს x_j მწვერვალები არ შედიან $\overline{X}_{k+1}$ გარე მიდამოში, მაშინ ისინი გამოირიცხებიან ცარიელი ქვეგრაფიდან.

იმ შემთხვევაში, თუ $\overline{X}_{k+1}$ მიდამოს გარე არეში შედის ორი x_i და x_j მწვერვალი, სადაც $j > i$ და ცარიელი ქვეგრაფი x_j-ს მონაწილეობით შეიცავს ცარიელ ქვეგრაფს x_i-ს მონაწილეობით, მაშინ X_{k+1} მწვერვალი დაემატება მხოლოდ ქვეგრაფს, x_j-ს მონაწილეობით.

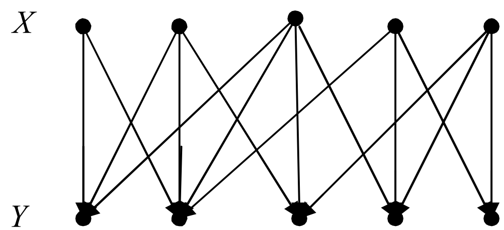
ჩვენი მაგალითისათვის, ცარიელი ქვეგრაფი x_1-ის მონაწილეობით იქნება თვითონ ეს მწვერვალი. ანალოგიურად ცარიელი ქვეგრაფი x_2-ით იქნება x_2. x_3 მწვერვალის გარე არე $\overline{X}_3$ შეიცავს x_1 მწვერვალს. ამიტომ დავუმატოთ x_3 ცარიელ ქვეგრაფს x_1 რის საფუძველზე მივიღებთ $\{x_3, x_1\}$-ს შემდეგ ავიღებთ x_4 მწვერვალს. ამ მწვერვალისათვის გარე მიდამო იქნება x_2. დავუმატოთ x_4 ცარიელ ქვეგრაფს x_2-ის მონაწილეობით, მივიღებთ ცარიელ ქვეგრაფს $\{x_4, x_2\}$. x_5 მწვერვალისათვის გარე მიდამოს წარმოადგენს მწვერვალები x_1, x_2, x_4. დავუმატოთ x_5, $\{x_3, x_1\}$ ქვეგრაფს. რადგან x_3 არ შედის x_5-ის გარე მიდმოში. ამიტომ გამოვრიცხოთ x_3 ცარიელი ქვეგრაფიდან. საბოლოოდ მივიღებთ $\{x_5, x_1\}$ ქვეგრაფს. შემდეგ, დავუმატოთ $\{x_4, x_2\}$ ცარიელ ქვეგრაფს x_5 მწვერვალი. რადგან x_4, x_2 მწვერვალები შედიან $\overline{X}_5$-ში, ამიტომ მივიღებთ ცარიელ ქვეგრაფს $\{x_5, x_4, x_2\}$. x_5 მწვერვალს არ დავუმატებთ ცარიელ ქვეგრაფს x_2-ით ვინაიდან ის შედის ცარიელ ქვეგრაფში x_4-ის მონაწილეობით.

და ბოლოს, ავიღებთ x_6 მწვერვალს. ამ მწვერვალისთვის $\overline{X}_6$-ის გარე მიდამოს წარმოადგენს x_2, x_3 მწვერვალები. დავუმატოთ

x_6 მწვერვალი $\{x_3, x_1\}$ ცარიელ ქვეგრაფს. რადგან x_1 არ შედის $\overline{X}_6$-ში, ამიტომ გამოვრიცხოთ იგი ცარიელი ქვეგრაფიდან. შედეგად, მივიღებთ $\{x_6, x_3\}$ ქვეგრაფს. შემდეგ, დავუმატოთ $\{x_5, x_4, x_2\}$ ცარიელ ქვეგრაფს x_6; რადგან x_4 და x_5 მწვერვალები არ ეკუთვნიან $\overline{X}_6$-ს; ამიტომ გამოვრიცხავთ მათ, მივიღებთ $\{x_6, x_2\}$ ცარიელ ქვეგრაფს. ე. ი. მოცემული გრაფის ცარიელი ქვეგრაფები შემდეგია: $\{x_3, x_1\}$, $\{x_4, x_2\}$, $\{x_5, x_4, x_2\}$, $\{x_6, x_3\}$, $\{x_6, x_2\}$. აქედან გამომდინარე მოცემული გარფის მაქსიმალური ცარიელი ქვეგრაფია $\{x_5, x_4, x_2\}$; შესაბამისად $\alpha(G) = 3$.

3.37. ორგვარი გრაფის წყვილთშეუღლება

თუ გრაფში არსებობს ორ არგადამკვეთ X და Y მწვერვალთა სიმრავლე, და ამავე დროს მოცემული გრაფის წიბოები აერთებენ X მწვერვალებს მხოლოდ Y მწვერვალებთან, ასეთ გრაფს უწოდებენ ორგვარ გრაფს ანუ მარტივ გრაფს (ნახ. 82).



ნახ. 82

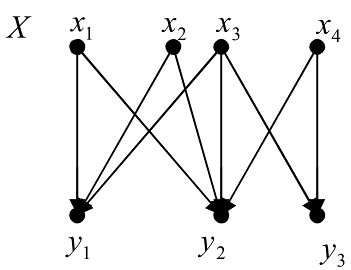
გამოვყოთ ორმაგი გრაფიდან რკალთა რაიმე W სიმრავლე. ვუწოდოთW-ს წყვილთშეუღლება ორპირი გრაფისათვის, თუ არცერთი მისი ორი რკალი არ არის მოსაზღვრე.

არსებობს კენიგ-ჰოლის შემდეგი თეორემა:

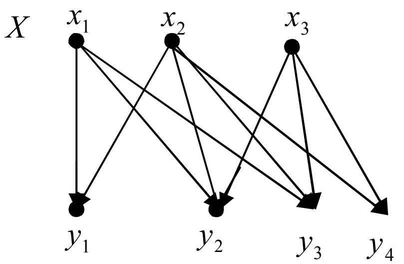
წყვილთშეუღლება რომელიც X ასახავს Y-ში, არსებობს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ნებისმიერი $A \subseteq X$

სიმრავლისათვის სამართლიანია $|\Gamma A| \ge |A|$. მაგალითად, ნახ. 82-ზე მოცემული გრაფისათვის არსებობს წყვილთშეუღლება რომელიც X-ს ასახავს Y-ში. 43-ე ნახაზზე მოცემული გრაფისათვის არ არსებობს X-ის Y-ში ამსახველი წყვილთშეუღლება, მაგრამ არსებობს წყვილთშეუღლება, რომელიც $A=\{x_2, x_3, x_4\}$ სიმრავლეს ასახავს Y-ში, სადაც $A \subset X$. იმ დროს როცა 44-ე ნახაზზე მოცემული გრაფისათვის ყოველთვის არსებობს წყვილთშეუღლება, რომელიც ასახავს X-ს Y-ში.

ორგვარ გრაფებში ისმება ამოცანა წყვილთშეუღლების რკალთა მაქსიმალური რიცხვის გამოვლენისათვის.



ნახ. 83



ნახ. 84

მოცემული გრაფისათვის განვსაზღვროთ d_0 შემდეგნაირად: $d_0 = \max(|A| - |\Gamma A|), \quad A \subseteq X$. ამ რიცხვს უწოდებენ $G=(X,Y,\Gamma)$ გრაფის დეფიციტს ამასთანავე $d_0 \ge 0$. კენიგ-ჰოლის თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ორგვარ გრაფში X-ის Y-ში ამსახველი წყვილთშეუღლების არსებობისათვის აუცილებელია და საკმარის პირობას წარმოადგენს შემდეგი: $d_0 = 0$.

არსებობს კენიგ-ჰოლის შემდეგი თეორემა: ორგვარ გრაფში წყვილთშეუღლების რკალთა უდიდესი რიცხვი ტოლია $|X| - d_0$.

ვთქვათ, მაცემულია გრაფი $G=(X,Y,\Gamma)$ რომლის წყვილთშეუღლებაა W. მიღებულია, რომ წყვილთშეუღლებათა რკალებს ვუწოდოთ ძლიერი რკალები და აღვნიშნოთ იგი სქელი

ხაზებით, გრაფის დანარჩენ რკალებს ეწოდებათ სუსტი რკალები და იგი აღინიშნება წვრილი ხაზებით.

შემოვიტანოთ მონაცვლეობითი წრედის ცნება, რომლის ქვეშაც იგულისხმება მარტივი წრედი, რომელშიც ერთმანეთს რიგრიგობით მისდევს (ენაცვლება) წვრილი და სქელი წიბოები. თუ მწვერვალები $x \in X$ და $y \in Y$ ინციდენტურია სქელი წიბოების, მაშინ მას უწოდებენ ქსელს. თუ $x \in X$ და $y \in Y$ მწვერვალები არ არის ინციდენტური სქელი წიბოების, მაშინ მას უწოდებენ წვრილს.

მონაცვლეობით წრედს ეწოდება წვრილი, თუ მისი საწყისი საბოლოო მწვერვალი წვრილია. ასეთი წრედის საწყისი მწვერვალი იმყოფება X სიმრავლეში, ხოლო საბოლოო მწვერვალი Y სიმრავლეში. წვრილი მონაცვლეობითი წრედის სიგრძე ყოველთვის დადებითია.

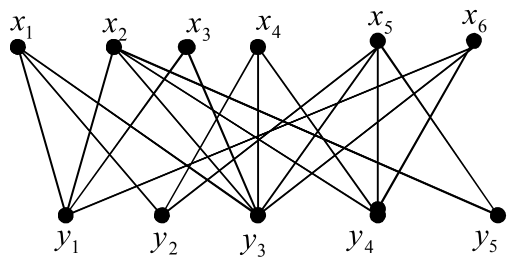
$G=(X,Y,\Gamma)$ გრაფში წვრილი მონაცვლეობითი წრედის ძებნა ხორციელდება შემდეგნაირად. დასაწყისში, X-ის ყველა მწვერვალს რიგრიგობით ავსახავთ Y-ში, რის შედეგადაც ვღებულობთ რაიმე წყვილთშეუღლების შემდეგ ვეძებთ წვრილ მონაცვლეობით წრედს. ამისათვის, სიმრავლეზე ვირჩევთ ნებისმიერ წვრილ მწვერვალს და ავაგებთ ამ მწვერვალიდან მონაცვლეობით წრედს: ამასთანავე, გავლილ წიბოს მოვნიშნავთ შტრიხით (შემდგომში ისინი აღარ აირჩევენ). თუ მოცემული წრედის აგებისას მოვხვდებით განვლილ მწვერვალში, მაშინ აუცილებელია დავბრუნდეთ უკან ერთი ნაბიჯით და გავაგრძელოთ აგება სხვა წიბოთი. ანალოგიურად უნდა ვიმოქმედოთ, თუ ჩვენ მოვხვდებით X-დან იმ მწვერვალში, რომლის ინციდენტურიც არ არის ჯერ კიდევ გაუვლელი არცერთი წვრილი წიბო. თუ მონაცვლეობითი წრედის აგების პროცესი მთავრდება Y სიმრავლის რომელიმე წვრილ მწვერვალში, მაშინ საძიებელი წრედი აგებულია. თუ ჩვენ დავბრუნდებით საწყის მწვერვალში, მაშინ წვრილი მონაცვლეობითი წრედი აუცილებელია ავაგოთ X სიმრავლიდან აღებული სხვა წვრილი მწვერვალიდან.

იმის შემდეგ, როცა წვრილი მონაცვლეობითი წრედი მიღებულია, აუცილებელია ამ წრედის ყველა სქელი წიბო

ვაქციოთ წვრილ წიბოთ, ხოლო წვრილი წიბო –სქელ წიბოთ. შედეგად მივიღებთ ახალ წყვილთშეუღლებას, რომლის წიბოთა რიცხვი იქნება ერთით მეტი ვიდრე საწყის წყვილთშეუღლებაში. ამის შემდეგ, ყველა ზემოთ მოყვანილი პროცედურა უნდა ჩავატაროთ თავიდან. თუ წვრილი მონაცვლეობითი წრედის აგება არ ხერხდება, მაშინ ამ დროს მიღებულ წყვილთშეუღლება წარმოადგენს უდიდესს.

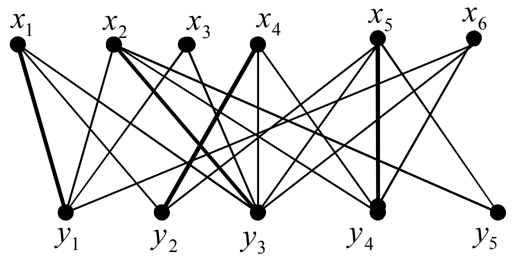
მოყვანილი ალგორითმი შემოთავაზებულია ეგერვარის მიერ და მის საპატივცემულოდ მას „უნგრული ალგორითმი" უწოდეს.

ვაჩვენოთ ამ ალგორითმის განხორციელება მოცემული გრაფისათვის ნახ. 85.



ნახ. 85

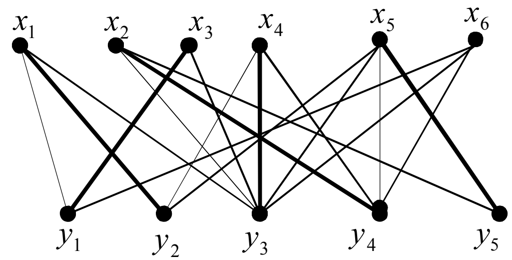
ავსახოთ მოცემული გრაფის $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ მწვერვალები $\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ მწვერვალთა სიმრავლეზე. მივიღებთ რომელიმე წყვილთშეუღლებას ნახ. 86.



ნახ. 86

ამ გრაფში (ნახ. 86) ავარჩიოთ წვრილი მწვერვალი და ავაგოთ აქედან წვრილი მონაცვლეობითი წრედი. თუ გვაქვს წიბოთა შორის არჩევანის საშუალება, მაშინ შევთანხმდეთ ყოველთვის ავირჩიოთ ყველაზე მარცხენა წიბო. აგების შედეგად მივიღებთ წვრილ მონაცვლეობით წრედს შემდეგ მწვერვალებზე: $\{x_3, y_1, x_1, y_2, x_4, y_3, x_2, y_4, x_5, y_5\}$

ამის შემდეგ, ყველა წვრილ წიბოს გავასქელებთ, ხოლო სქელ წიბოს გავაწვრილებთ. მივიღებთ ახალ წყვილთშეუღლებას, რომელსაც გააჩნია ერთით მეტი წიბო, ვიდრე საწყისს (ნახ. 87).



ნახ. 87

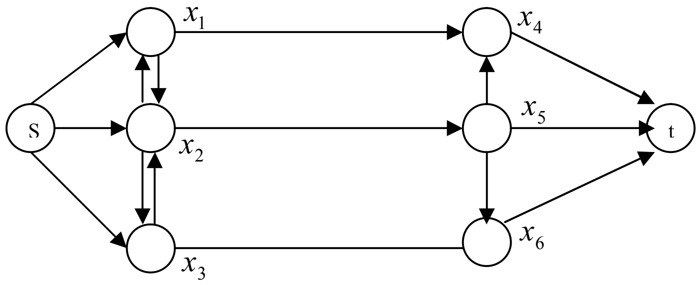
ნახ. 45-ზე მოცემული გრაფისათვის უკვე შეუძლებელია აიგოს წვრილი მონაცვლეობითი წრედი. ამიტომ, მიღებული წყვილთშეუღლება არის უდიდესი.

ნაკადი ქსელში

3.38. სატრანსპორტო ქსელი

სატრანსპორტო ქსელი ეწოდება $G = (N, A)$ ორიენტირებულ გრაფს, სადაც N არის კვანძთა (მწვერვალთა) სიმრავლე, ხოლო A წარმოადგენს N-დან აღებულ (x, y) წყვილთა მოწესრიგებულ სიმრავლეს ან ქსელის რკალთა სიმრავლეს. სატრანსპორტო ქსელი შეიძლება შეიცავდეს, როგორც ორიენტირებულ, ასევე არაორიენტირებულ წიბოებს. ასეთ შემთხვევაში მას უწოდებენ შერეულ ქსელებს. სატრანსპორტო ქსელი შეიძლება

შეიცავდეს, მხოლოდ, მარტო ორიენტირებულ წიბოებს. 88-ე ნახ-ზე მოცემულია სატრანსპორტო ქსელი 7 კვანძით:



ნახ. 88

$N=\{S_1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,t\}$ სატრანსპორტო ქსელისათვის $n\ge 2$. განვიხილოთ $x_1,x_2,...,x_n$ კვანძთა თანმიმდევრობა. ვთქვათ, (x_i,x_{i+1}) წყვილი წარმოადგენს რკალს, სადაც $i=1,2,...,n-1$, მაშინ ასეთი თვისებების კვანძთა და რკალთა თანმიმდევრობას ეწოდება სატრანსპორტო ქსელის წრედი. მაგალითად: $x_1,(x_1,x_2),x_2(x_2x_3),x_3,...,x_{n-1}(x_{n-1},x_n),x$. თუ წრედის რკალები ორიენტირებულია, მაშინ ასეთ წრედს ეწოდება მიმართული წრედი, იმ შემთხვევაში, თუ წრედში არსებობს (x_n,x_1) რკალი, მაშინ ასეთ წრედს ეწოდება მიმართული ციკლი. 88-ე ნახ-ზე მოცემული ქსელისათვის მიმართულ წრედს წარმოადგენს $S,(S,x_1),x_1(x_1x_4),x_4,(x_4,t),t$, ხოლო მიმართულ ციკლს $x_1,(x_1,x_2),x_2(x_2x_1),x_1$.

თუ კვანძთა მოცემული მიმდევრობისათვის $x_1,x_2,...,x_n(x_i,x_{i+1})$ წყვილი წარმოადგენს რკალს და (x_{i+1},x_i) ასევე რკალია, მაშინ ასეთი თვისების კვანძთა და რკალთა თანმიმდევრობას ეწოდება გზა ქსელში. სატრანსპორტო ქსელში გზა განსხვავდება მიმართული წრედისაგან იმით, რომ გზაში

რკალები შეიძლება გადიოდეს მათი ორიენტაციის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ისეთ რკალებს გზაში, რომლებსაც გადიან მათი ორიენტაციის საწინააღმდეგოდ ეწოდება უკურკალები. დანარჩენ რკალებს ეწოდება გზის პირდაპირი რკალები. თუ გზაში არსებობს (x_n,x_1) ტიპის რკალი, მაშინ ასეთ გზას ციკლს უწოდებენ. ნახაზ 82-ზე მოცემული ბადისათვის $S,(S,x_1)$, $x_1(x_2x_1)$, $x_2,(x_2,x_3)$, $x_3,(x_3,x_6),x_6$ წარმოადგენს გზას. მოცემულ გზაში (x_2,x_1) რკალი წარმოადგენს უკურკალს.

სატრანსპორტო ქსელში შემოაქვთ კვანძთა სპეციალური სიმრავლე $A(x)$ და $B(x)$. $A(x)$ სიმრავლე აღნიშნავს „x-ის შემდეგ“, ხოლო $B(x)$ „x-ის წინ“. ამავე დროს $A(x)=\{y\in N/(x,y)\in A\}$, ხოლო $B(x)=\{y\in N/(y,x)\in A\}$ სატრანსპორტო ქსელის ანალიზისათვის ფართოდ გამოიყენება გრაფის რკალთა ინციდენციის მატრიცა, რომელსაც ქსელში უწოდებენ კვანძთა და რკალთა ინციდენციის მატრიცას.

3.39. სტაციონალური ნაკადი ქსელში

განვიხილოთ $G=(N,A)$ სატრანსპორტო ქსელი, მოცემული ბადის რკალებისათვის შემოვიტანოთ გამტარუნარიანობის ცნება და აღვნიშნოთ იგი $C(x,y)$. დაუშვათ, იგი არის არაუარყოფითი ნამდვილი რიცხვი. გამოვყოთ ქსელში ორი კვანძი S და t და შემოვიტანოთ სტანციონალური ნაკადის განსაზღვრა.

v სიდიდის სტანციონალური ნაკადი ქსელის S კვანძიდან t კვანძში ეწოდება f ფუნქციას, რომელიც ასახავს ქსელში რკალთა სიმრავლეს არაუარყოფით ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეში და აკმაყოფილებს შემდეგი განტოლებები და უტოლობები:

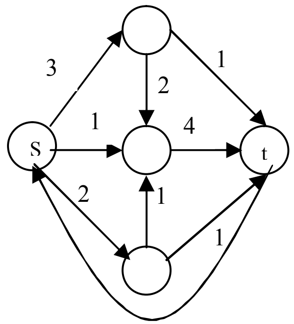
$$\sum_{y\in A(x)} f(x,y)-\sum_{y\in B(x)} f(y,x)=\begin{cases} v, x=s \\ 0, x\neq S,t \\ -v, x=t \end{cases} \qquad (1)$$

$$f(x,y)\le c(x,y)\forall(x,y)\in A$$

მოცემული სისტემა წარმოადგენს შეზღუდვებს, რომელიც თან ერთვის ნაკადს ქსელში. ამ შემთხვევაში S კვანძს ეწოდება ქსელის წყარო, t კვანძს მიმღები, ხოლო ქსელის დანარჩენ კვანძებს საშუალედო კვანძები. თითოეულ x კვანძში შეიძლება განისაზღვროს ეგრეთწოდებული სუფთა ნაკადი, რომელიც ტოლი იქნება:

$$\sum_{y\in A(x)} f(x,y)-\sum_{y\in B(x)} f(y,x)$$

მაშინ სუფთა ნაკადი წყაროდან ტოლი იქნება v-სი, მიმღებიდან v-სი, ხოლო დანარჩენი საშუალედო კვანძებში სუფთა ნაკადი იქნება 0-ის ტოლი. (1) შეზღუდვათა სისტემების განტოლებებს კვანძებში, სადაც სუფთა ნაკადი 0-ის ტოლია, ეწოდება „შენახვის“ განტოლებები. (x,y) რკალში f ნაკადს უწოდებენ $f(x,y)$ რკალურ ნაკადს. ქსელში f ნაკადის სიდიდე აღვნიშნოთ $v(f)$-ით ნახაზ 89-ზე მოცემული ქსელისათვის ნაკადის სიდიდე $v(f)$=6.



ნახ. 89

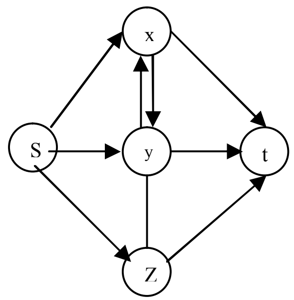
სატრანსპორტო ქსელში შეიძლება არსებობდეს განსაკუთრებული (t,S) რკალი. მოცემულ რკალში ნაკადს უწოდებენ დაბრუნებულ ნაკადს. დაბრუნებული ნაკადის სიდიდე ტოლია ბადეში ნაკადის სიდიდის, აღებულს შებრუნებული ნიშნით. ბადეში (t,S) რკალის არსებობის შემთხვევაში სუფთა ნაკადი

ყველა კვანძში იქნება ნულის ტოლი და (1) შეზღუდვათა ყველა განტოლება იქნება „შენახვის“ განტოლება.

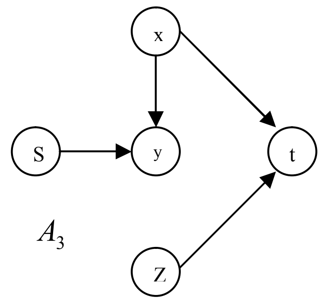
3.40. კვეთა ქსელში

განვიხილოთ სატრანსპორტო ქსელი $G=(N,A)$. მოცემულ ქსელში S წყაროსა და t მიმღების განმაცალკევებელი კვეთა ეწოდება $(X,\overline{X})$ რკალთა სიმრავლეს, სადაც $S\in X$ და $t\in\overline{X}$. ამავე დროს, $\overline{X}$ წარმოადგენს X სიმრავლის დამატებას.

აღვნიშნოთ კვეთის გამტარუნარიანობა $C(X,\overline{X})$-ით. მოვიყვანოთ მაგალითი. ვთქვათ, 90 ნახ-ზე მოცემული ქსელისათვის $X=\{S,y\}$, ხოლო $\overline{X}=\{x,z,t\}$, მაშინ კვეთას შეადგენს შემდეგი.



ნახ. 90



ნახ. 91

რკალები $\{(S,x),(S,z),(y,z),(y,t)\}$. ქსელში შეიძლება არსებობდეს კვეთათა სიმრავლე. თუ ქსელში განვსაზღვრავთ ყველა მიმართულ წრედს S-დან t-ში, შემდეგ განვსაზღვრავთ რომელიმე კვეთას და ამოვიღებთ ქსელიდან კვეთის ყველა რკალს, მაშინ მასში შეწყვეტს არსებობას ყველა მიმართული წრედი S-

დან t-ში. მაგალითად, 90 ნახ.-ზე მოცემული ბადისათვის კვეთის რკალთა ამოღებით მივიღებთ 91 ნახ.-ს.

ე.ი. თუ ქსელში მოცემულია კვეთა, მაშინ კვეთის რკალები აბლოკირებენ ყველა მიმართულ წრედს S-დან t–ში. აქედან გამომდინარეობს, რომ ქსელის რკალის სიდიდე არ აღემატება კვეთის გამტარუნარიანობას. მოვიყვანოთ შემდეგი ლემა: თუ ბადეში მოცემულია $(X,\overline{X})$ კვეთა, მაშინ ნაკადის სიდიდე იქნება $v = f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X) \le C(X,\overline{X})$, სადაც $f(X,\overline{X})$ ნაკადია კვეთაში, ხოლო $f(\overline{X},X)$-წარმოადგენს ნაკადს ქსელის უკურკალებში.

3.41. ქსელში მაქსიმალური ნაკადისა და მინიმალური კვეთის განსაზღვრის მაგალითი

ამ ალგორითმს საფუძვლად უდევს ფორდ ფალკესონის შემდეგი თეორემა.

თეორემა: ნებისმიერი ბადისათვის ნაკადის მაქსიმალური სიდიდე, s-დან t-ში ტოლია s-ისა და t-ს გამყოფი კვეთის მინიმალური გამტარუნარიანობის.

ზემოთ მოყვანილი ლემის თანახმად: $v(f) = f(X,\overline{X}) - f(\overline{X},X) \le C(X,\overline{X})$. აქედან გამომდინარე ქსელში ნაკადი $v(f)$ იქნება მაქსიმალური, როდესაც $v(f) = f(X,\overline{X})$ და $f(X,\overline{X}) = C(X,\overline{X})$, ხოლო $f(\overline{X},X)$ იქნება 0-ის ტოლი.

ამ თეორემიდან გამომდინარეობს მაქსიმალური ნაკადის და მინიმალური კვეთის შემდეგი ალგორითმი.

მოცემული ალგორითმი მოიცავს ორ ოპერაციას: ქსელის კვანძებში მონიშვნათა დასმას და ბადეში ნაკადის ცვლილების ოპერაციას.

პირველი ოპერაციის დროს ყველა კვანძში ისმება $[x^{\pm},\varepsilon(y)]$ ტიპის ნიშნები, სადაც, $x \in N$, ხოლო $\varepsilon(y)$ არის ნატურალური რიცხვი ან ∞. განვიხილოთ მონიშვნის ოპერაცია. ამ ოპერაციის დროს თითოეული კვანძი შეიძლება იყოს შემდეგ მდგომარეობაში.

1) არ არის მონიშნული; 2) მონიშნულია და არ განხილულა; 3) მონიშნულია და განხილული.

პროცესის დასაწყისში მონიშვნა მიეცემა S წყაროს. ამ დროს, S იღებს $[-,\varepsilon(s)=\infty]$ ნიშანს. ქსელის ნებისმიერი x კვანძი იღებს $[z^{\pm},\varepsilon(x)]$ მონიშვნას. ამის შემდეგ, ავიღებთ ნებისმიერ კვანძს და მოვნიშნავთ მას, უკვე მონიშმული x კვანძიდან გამომდინარე. y კვანძი მიიღებს $[x^{\pm},-\varepsilon(y)]$ ნიშანს. ამავე დროს y მიიღებს $[x^{+},\varepsilon(y)]$ მონიშვნას, თუ $f(x,y) < c(x,y)$ და $\varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), c(x,y) - f(x,y)]$. ამ დროს, y მონიშნულია და არ არის განხილული. y კვანძი მიიღებს, $[x^{-},\varepsilon(y)]$ მონიშვნას, თუ $f(y,x) > 0$, სადაც $f(y,x)$ არის ნაკადი უკურკალში. ხოლო $\varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), f(y,x)]$. ამ დროს, y კვანძი მონიშნულია და არ განხილულა, ხოლო x კვანძი მონიშნულია და განხილული.

ანალოგიურად მოინიშნება ქსელის ყველა დანარჩენი კვანძებიც. მონიშვნის პროცესი გრძელდება მანამ, სანამ არ მოინიშნება მიმღები. თუ მონიშვნის პროცესში t მიმღები მოინიშნება, მაშინ ამბობენ, რომ მოხდა „გარღვევა“, რომლის შემდეგ აუცილებელია გადავიდეთ ნაკადის შეცვლის ოპერაციაზე.

თუ მონიშვნის პროცესში t მიმღები არ მოინიშნება, მაშინ მონიშვნის პროცესი წყდება და ამ დროს ქსელში მიღებული ნაკადი იქნება მაქსიმალური.

ახლა გადავიდეთ ნაკადის შეცვლის ოპერაციაზე. ვთქვათ, t მიმღებმა მიიღო $[\overset{+}{y}{}^{-},\varepsilon(t)]$ მონიშვნა. თუ მიმღებმა მიიღო $[y^{+},\varepsilon(t)]$ ნიშანი, მაშინ იცვლება ნაკადი (y,t) რკალში შემდეგნაირად: $f(y,t)+\varepsilon(t)$ და გადავდივართ y კვანძში. თუ მიმღებმა მიიღო $[y^{-},\varepsilon(t)]$ მონიშვნა, მაშინ ვცვლით ნაკადს (t,y) რკალში შემდეგნაირად: $f(t,y)-\varepsilon(t)$ და გადავდივართ y კვანძში.

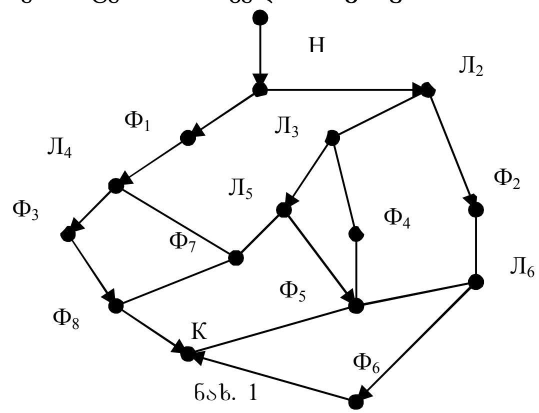
განვიხილოთ ქსელის ნებისმიერი x კვანძი. ვთქვათ, მან მიიღო $[\overset{+}{y}{}^{-},\varepsilon(x)]$ ნიშანი. თუ x კვანძმა მიიღო $[y^{+},\varepsilon(x)]$ ნიშანი, მაშინ იცვლება ნაკადი (y,x) რკალში შემდეგნაირად: $f(y,x)+\varepsilon(t)$ და გადავდივართ y კვანძში. თუ x კვანძმა მიიღო $[y^{-},\varepsilon(x)]$ ნიშანი, მაშინ ვცვლით ნაკადს (x,y) რკალში შემდეგნაირად: $f(x,y)-\varepsilon(t)$ და გადავდივართ y კვანძში. ეს პროცესი გრძელდება მანამდე, სანამ არ დავბრუნდებით S წყაროში. ამის შემდეგ, ყველა ძველი მონიშვნები გადაიშლება და მონიშვნის პროცესი იწყება თავიდან. განისაზღვრება თუ არა ბადეში მაქსიმალური ნაკადი იწყება მინიმალური კვეთის განსაზღვრა. მინიმალურ კვეთაში აღებული იქნება ის რკალები, რომლებიც მიემართებიან მონიშნული კვანძებიდან მოუნიშნავ კვანძებში.

IV თავი

ლოგიკური ქსელები და სასრული ავტომატები

4.1. ლოგიკური ქსელის განსაზღვრა

ელექტრონული გამოთვლითი მანქანების დახმარებით რეალური ობიექტების სამართავად მუშავდება მართვის მოდელები, რომლებიც ასახავენ დამოკიდებულებას ობიექტის მახასიათებელ შემავალ და გამომავალ პარამეტრებს შორის. ობიექტების მართვის მოდელის მისაღებად, რომლებსაც გააჩნიათ მოქმედების დისკრეტული ხასიათი ფართოდ გამოიყენება ლოგიკური ქსელები. ვთქვათ, მოცემულია რაიმე პროცესის ამსახველი G გრაფი. ნახ 1.



ნახ. 1

შევთანხმდეთ, რომ ამ გრაფის მწვერვალები ასახავენ ამა თუ იმ ოპერაციების რეალიზების ოპერატორებს, ხოლო რკალები შესრულების თანმიმდევრობას. მოცემულ გრაფში ძირითადად გამოიყოფა ორი მწვერავალი: H – საწყისი და K – საბოლოო, რომლებიც გამოსახავენ საწყის და საბოლოო ოპერატორებს.

საწყის მწვერვალში არ შედის არცერთი რკალი და გამოდის მხოლოდ ერთი. საბოლოო მწვერვალიდან არ გამოდის არცერთი რკალი, ხოლო შედის რკალთა სიმრავლე. მოცემული გრაფის სხვა მწვერვალები ასახავენ ორი ტიპის ოპერატორს. ფუნქციურს და ლოგიკურს. λ_i ლოგიკური ოპერატორები ამოწმებენ განსაზღვრული პირობების

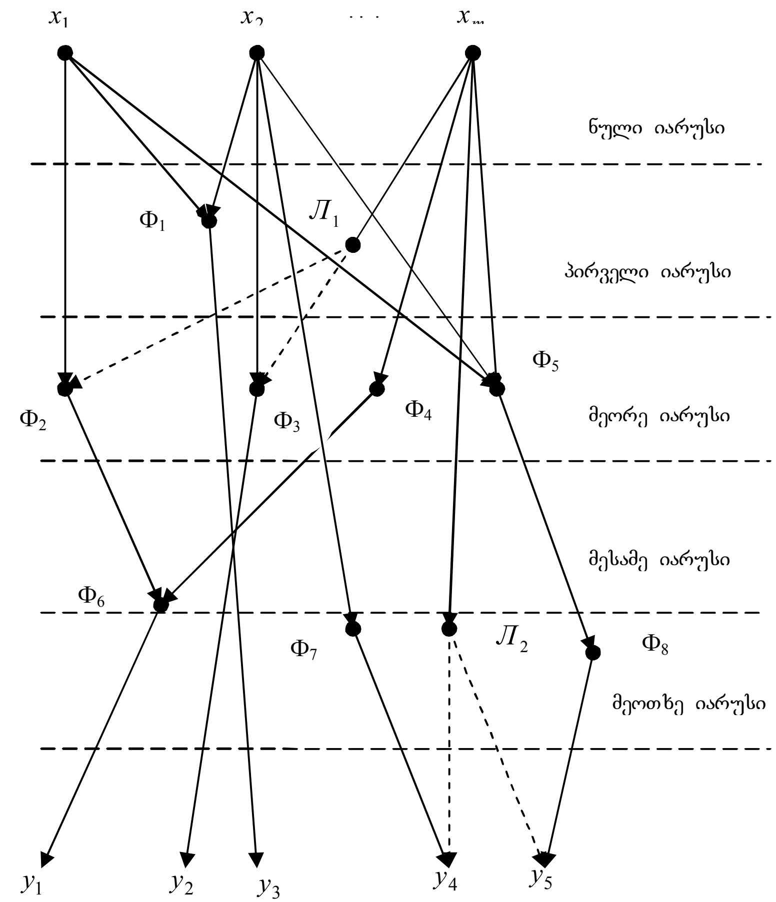
შესრულებას. თუ მოცემული პირობები სრულდება, მაშინ შემდეგ ოპერატორზე გადასვლა ხორციელდება რკალით 1-იანის სიმბოლოთი, წინააღმდეგ შემთხვევაში გადასვლა ხორციელდება 0 სიმბოლოიანი რკალით. ϕ_j –ფუნქციონალური ოპერატორები ახორციელებენ ამა თუ იმ ოპერაციებს და მათგან გამოდის ერთადერთი რკალი, რომლიდანაც ხორციელდება გადასვლა შემდეგ მწვერვალზე (ოპერატორზე).

ვთქვათ, მოცემულია გადამრთველი ანუ ბულის ფუნქციის რაიმე სიმრავლე $F=\{f_1,f_2,...,f_n\}$ დაუშვათ, რომ λ_i – ოპერატორების რეალიზება ხდება ℓ_i გადამრთველი ფუნქციებით და თუ $\ell_i=1$, მაშინ λ_i – ჭეშმარიტია, ხოლო თუ $\ell_i=0$, λ_i – მცდარი. დაუშვათ $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$ – მართვის ობიექტის შემავალი პარამეტრების სიმრავლეა. ამ ცნების საფუძველზე, ზემოთ მოყვანილი გრაფი (ნახ.1). შეიძლება აიგოს შემდეგნაირად. გრაფის მწვერვალები განვალაგოთ დონეების მიხედვით, ნულ დონეზე განლაგდებიან მწვერვალები, რომლებიც ასახავენ შემავალ $x_1,x_2,...,x_m$ პარამეტრებს (ნახ.2). ამ დონეს უწოდებენ ლოგიკური ქსელის ნულოვან იარუსს.

ლოგიკური ქსელის მეორე იარუსზე განლაგდებიან მწვერვალები, რომლებიც ასახავენ იმ ოპერატორებს, რომლებიც თავის მოქმედებაში გამოიყენებენ $x_1,x_2,...,x_m$ შემავალ პარამეტრებს და პირველი იარუსის გამოსავალზე მიღებული რომელიმე ოპერატორის ერთ პარამეტრს მაინც. ნული იარუსის და პირველი იარუსის შესაბამისი მწვერვალებიდან გადადიან რკალები მეორე იარუსის შესაბამის მწვერვალებზე. ანალოგიურად იგება ლოგიკური ქსელის დანარჩენი იარუსებიც. საბოლოო იარუსზე განლაგდებიან მწვერვალები, რომლებიც ასახავენ $y_1,y_2,...,y_k$ ობიექტის გამომავალ პარამეტრებს. მწვერვალებიდან გამომავალ და შემავალ, ყველა ოპერატორის შესატყვის რკალებზე მითითებულია ოპერატორების შემავალი და გამომავალი პარამეტრები. იმ შემთხვევაში თუ ქსელის არცერთი ოპერატორი არ გამოიყენებს გამომავალ პარამეტრს, მაშინ მას მიაკუთვნებენ ქსელის რეზულტირებულ ცვლადს. რეზულტირებულ ცვლადებს განეკუთვნება, აგრეთვე, ქსელის ყველა

გამომავალი პარამეტრი. ცხადია, რეზულტირებული ცვლადები განლაგდებიან ლოგიკური ქსელის ბოლო იარუსზე.

ზოგ შემთხვევაში, მართვის ობიექტის ფუნქციონირების აღწერის დროს, შეიძლება აღიძრას ციკლური კავშირები. ლოგიკურ ქსელებში ეს კავშირები აისახება შესაბამის ოპერატორებს შორის უკუკავშირის რკალების საშუალებით.



ნახ. 2

რკალები, რომლებიც გამოდიან ლოგიკური ოპერატორებიდან, ლოგიკურ ქსელებში განსაზღვრავენ სამართავ კავშირებს და გამოისახებიან პუნქტირებით, ხოლო დანარჩენი რკალები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფუნქციონალურ კავშირებს, აღინიშნებიან უწყვეტი წირებით.

ასეთი სახით აგებული გრაფი წარმოადგენს ლოგიკურ ქსელს. ნახ. 2-ზე მოცემულია ოთხიარუსიანი ლოგიკური ქსელის მაგალითი.

4.2. ბულის ფუნქცია

განვიხილოთ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია. ვიგულისხმოთ, რომ ამ ფუნქციის $x_1, x_2, ..., x_n$ არგუმენტები ღებულობენ მხოლოდ ორ 1-ის და 0-ის ტოლ მნიშვნელობას. ასევე, თვით ფუნქციაც ამ დროს ღებულობს ორ 0-ის და 1-ის ტოლ მნიშვნელობას; მაშინ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქციას ეწოდება გადამრთველი ანუ ბულის ფუნქცია.

გადამრთველ ფუნქციაზე მოქმედება ხორციელდება ბულის ალგებრის $A_ბ$ – საშუალებით, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე: $A_ბ = \{H, \vee, \wedge, -\}$, სადაც H მატარებლის ელემენტი ღებულობს ორ მნიშვნელობას: 0 ან 1-ს. ხოლო $\vee$ და $\wedge$ მოქმედებებს განსაზღვრავენ დიზიუნქციისა $\vee$ და კონიუნქციის $\wedge$ ოპერაციები.

გადამრთველი ფუნქციის $x_1, x_2, ..., x_n$ არგუმენტების განსაზღვრული მნიშვნელობები იძლევა მათ ერთობლიობას (ანაკრებს). რადგან თითოეული არგუმენტი იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას, ამიტომ $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ფუნქცია შეიძლება განსაზღვრული იქნას 2^n ანაკრების სახით. მაგალითად, $F(x_1, x_2)$ ფუნქცია შეიძლება განისაზღვროს 4 ანაკრებზე, ხოლო $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 16 ანაკრებზე. მოცემულ ანაკრებზე F_1 და F_2 ფუნქცია მიიღებს 0 ან 1 მნიშვნელობას. გადამრთველი ფუნქცია შეიძლება მოცემული იქნას ჭეშმარიტების ცხრილით, რომლის თითოეული ანაკრების მნიშვნელობებს ფუნქციის განსაზღვრული მნიშვნელობა შეესაბამება. მაგალითად, $F_1(x_1, x_2)$ და $F_2(x_1, x_2)$ ფუნქციის ცხრილური მოცემით მიიღება, რომ $F_1(x_1, x_2)$ ფუნქცია უდრის 1 შემდეგ ანაკრებზე (0,0), (0,1), (1,0), ხოლო ფუნქცია $F_2(x_1, x_2)$ უდრის 1 მხოლოდ ერთ – (1,1) ანაკრებზე:

ცხრილი 1

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
$F_1(x_1, x_2)$	1	1	1	0
$F_2(x_1, x_2)$	0	0	0	1

ვინაიდან გადამრთველი ფუნქცია ღებულობს მნიშვნელობას $\{0,1\}$ სიმრავლეზე, ამიტომ ნათელია, რომ სხვადასხვა გადამრთველი ფუნქციის რაოდენობა არგუმენტთა სასრულ რაოდენობაზე იქნება სასრული.

როგორც ზემოთ იყო მითითებული, გადამრთველი ფუნქცია განსაზღვრულია 2^n ანაკრებზე. ამავე დროს თითოეულ ამ ანაკრებზე მას შეუძლია მიიღოს 0 ან 1-ის ტოლი მნიშვნელობა. შესაბამისად გადამრთველი ფუნქციების რაოდენობა იქნება 2^{2^n}. თუ $n=1$, მაშინ გვექნება ერთი არგუმენტის ოთხი გადამრთველი ფუნქცია. მოვიყვანოთ იგი (ცხრილი 2).

ცხრილი 2

x	0	1	ფუნქციის სიმბოლური აღნიშვნა	ფუნქციის დასახელება
$F_0(x)$	0	0	0	ნულის კონსტანტა
$F_1(x)$	0	1	x	ცვლადი ანუ გამეორება
$F_2(x)$	1	0	$\overline{x}$	ინვენსია
$F_3(x)$	1	1	1	ერთიანის კონსტანტა

ფუნქცია „ნულის კონსტანტა“ არგუმენტის ყოველი მნიშვნელობისათვის ტოლია ნულის. ფუნქცია „ერთიანის კონსტანტა“ არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის ტოლია ერთის. $F_1(x)$ ფუნქცია იმეორებს თავის x არგუმენტის მნიშვნელობას, ამიტომ, მას უწოდებენ „x ცვლადს“ ანუ „x გამეორებას“ და ბოლოს, ფუნქცია

„ინვერსია x“ $x=0$-ისათვის უდრის 1, ხოლო $x=1$ ტოლია 0. ხშირად ამ ფუნქციას უწოდებენ x-ის უარყოფას.

$n=2$-სათვის არსებობს ორი არგუმენტის 16 გადამრთველი ფუნქცია. ყველა ეს ფუნქცია მოცემულია ცხრილი 3-ით.

ცხრილი 3

ანაკრები	0	1	2	3		
x	0	0	1	1	ფუნქციის დასახელება	ფუნქციის სიმბოლური აღნიშვნა
y	0	1	0	1		
1	2	3	4	5	6	7
$F_0(x,y)$	0	0	0	0	ნულის კონსტანტა	0
$F_1(x,y)$	0	0	0	1	კონიუნქცია (ნამრავლი)	$x\wedge y$
$F_2(x,y)$	0	0	1	0	აკრძალვის ფუნქცია y-ით	$x\Delta y$
$F_3(x,y)$	0	0	1	1	ცვლადი (გამეორება) x	x
$F_4(x,y)$	0	1	0	0	აკრძალვის ფუნქცია x –ით	$y\Delta x$
$F_5(x,y)$	0	1	0	1	ცვლადი (გამეორება) y	y
$F_6(x,y)$	0	1	1	0	ჯამი 2-ის მოდულით	$x+y$
$F_7(x,y)$	0	1	1	0	დიზიუნქცია	$x\vee y$
$F_8(x,y)$	1	0	0	0	პირსის ოპერაცია (ისარი)	$x\downarrow y$
$F_9(x,y)$	1	0	0	1	ლოგიკური ტოლმნიშვნელობა	x “ y
$F_{10}(x,y)$	1	0	1	0	y-ის ინვენსია	$\bar{y}$
$F_{11}(x,y)$	1	0	1	1	იმპლიკაცია y –დან x-სკენ	$y\to x$
$F_{12}(x,y)$	1	1	0	0	x-ის ინვერსია	$\bar{x}$
1	2	3	4	5	6	7
$F_{13}(x,y)$	1	1	0	1	იმპლიკაცია x –დან y-საკენ	$x\to y$
$F_{14}(x,y)$	1	1	1	0	შეფერის ოპერაცია (შეფერის შტრიხი)	x/y
$F_{15}(x,y)$	1	1	1	1	ერთიანის კონსტანტა	1

$F_0(x,y)$ და $F_{15}(x,y)$ როგორც ერთი არგუმენტის შემთხვევაში, აქაც წარმოადგენს „ნულის კონსტანტას“ და „ერთიანის კონსტანტას“. $F_1(x,y)$ ფუნქცია ტოლია 1 მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ერთდროულად ტოლია 1. ეს ფუნქცია წარმოადგენს x და y ცვლადის კონიუნქციას ანუ ნამრავლს. კონიუნქციისათვის (ლოგიკური გამრავლება) სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულება.

$$x\wedge 0=0,\quad x\wedge 1=1,\quad x\wedge x=x,\quad x\wedge x\wedge\ldots\wedge x=x,$$

$$\bar{x}\wedge x=0,\quad x\wedge(y+z)=x\wedge y+x\wedge z$$

სადაც, ნიშანი + აღნიშნავს ჯამს 2-ის მოდულით. $F_2(x,y)$ ფუნქცია არის აკრძალვა y-ით, ხოლო $F_4(x,y)$ – ფუნქცია აკრძალვა x-ით. $F_3(x,y)$ ფუნქცია ეს არის „x ცვლადი“ ანუ „x გამეორებას“, ხოლო $F_5(x,y)$ ფუნქცია – „y ცვლადი“ ანუ „y გამეორება“. $F_6(x,y)$ ფუნქცია წარმოადგენს „ჯამს 2-ის მოდულით“, ან „ლოგიკურ არატოლმნიშვნელოვანს“. ორის მოდულის ჯამისათვის – $x+y$; სამართლიანია შემდეგი დამოკიდებულება:

$$x+0=x,\quad x+1=\bar{x},\quad x+x=0,\quad x+y=y+x,$$

$$\underbrace{x+x+\ldots+x}_{n-\text{ჯერ}}=\begin{cases}x, & \text{თუ } n-\text{კენტია}\\ 0, & \text{თუ } n-\text{ლუწია}\end{cases}$$

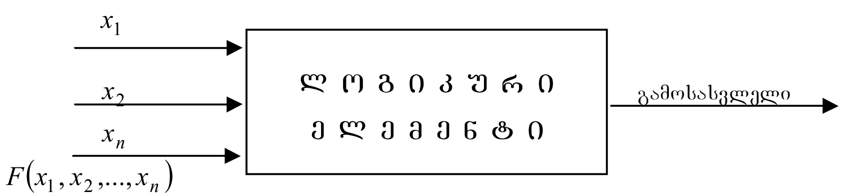
$F_7(x,y)$ ფუნქცია არის ნულის ტოლი მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ტოლია 0. ეს ფუნქცია წარმოადგენს დიზიუნქციას. $F_8(x,y)$ ფუნქცია ტოლია ერთის მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ტოლია 0. $F_8(x,y)$ წარმოადგენს $F_7(x,y)$-ის ინვენსიას. $F_8(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება პირსის ოპერაცია ანუ პირსის ისარი. პირსის ოპერაცია გამოიხატება ლოგიკის შემდეგი ცნობილი ოპერაციის საშუალებით:

$x\downarrow y=\overline{x\vee y}$ („არც x არც y“). $F_9(x,y)$ ფუნქციას ეწოდება „ლოგიკური ტოლმნიშვნელობა“ (ეკვივალენტურობა). $F_{10}(x,y)$ და $F_{12}(x,y)$ ესენია შესაბამისად, „y-ის ინვერსია“ და

„x-ის ინვერსია“. ფუნქცია $F_{11}(x,y)$ არის – „იმპლიკაცია y-დან x-სკენ“, ხოლო ფუნქცია $F_{13}(x,y)$ არის „იმპლიკაცია x-დან y-სკენ“. და ბოლოს, ფუნქციას $F_{14}(x,y)$ ეწოდება შეფერის ოპერაცია ანუ შეფერის შტრიხი. ის ნულის ტოლია მხოლოდ მაშინ, როცა x და y ერთდროულად ტოლია 1. შეფერის ოპერაცია გამოისახება ლოგიკის ცნობილი ოპერაციის დახმარებით შემდეგნაირად: $x/y=\overline{x\wedge y}$ (არასწორია x და y).

თუ $n=3$ გადამრთველი ფუნქციის რაოდენობა ტოლია 256. ცხადია n-ის ზრდასთან ერთად სწრაფად იზრდება გადამრთველი ფუნქციის რაოდენობაც.

გადამრთველი ფუნქცია ფართოდ გამოიყენება კომბინატორული სქემების ანალიზისა და სინთეზის დროს, რომელშიც იგულისხმება დისკრეტული ინფორმაციის გარდამსახი ტექნიკური მოწყობილობა. დისკრეტულ ინფორმაციაში იგულისხმება ტექნიკურ მოწყობილობათა შესასვლელის და გამოსასვლელის ისეთი სიგნალები, რომლებიც ღებულობენ 0 ან 1 მნიშვნელობას (პოტენციალთა დაბალი და მაღალი დონე). რთული ტექნიკური მოწყობილობის უმარტივეს სქემას ჩვეულებრივად უწოდებენ ლოგიკურ ელემენტს. დაუშვათ, ლოგიკურ ელემენტს აქვს n შესავალი $x_1,x_2,...,x_n$ (ნახ. 3).

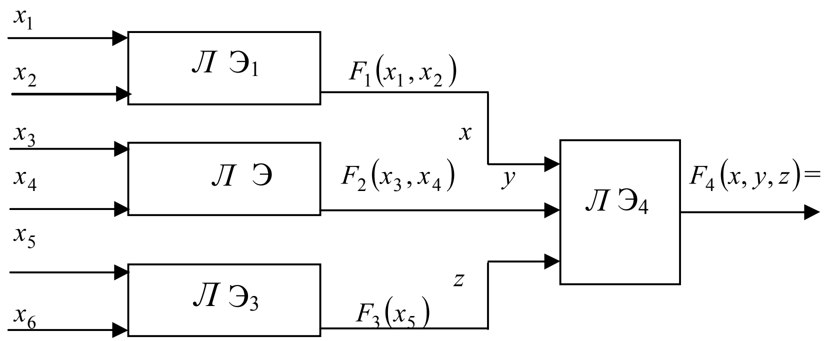


ნახ. 3

დაუშვათ, $x_1,x_2,...,x_n$ ღებულობენ 0 ან 1 მნიშვნელობას და გამოსასვლელზე სიგნალი წარმოიშობა იმ მომენტში, როცა შესასვლელზე მიეწოდება $x_1,x_2,...,x_n$ სიგნალი, მაშინ მოცემულ

ლოგიკურ ელემენტს არ გააჩნია მეხსიერება. ლოგიკური ელემენტის გამოსასვლელი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას გადამრთველ $F(x_1,x_2,...,x_n)$ ფუნქციად, ან იგი (გამოსასვლელი) შეიძლება განისაზღვროს ცალსახად, $x_1,x_2,...,x_n$ შესასვლელის კომბინაციების საშუალებით.

რთული ლოგიკური სქემები შეიძლება შედგენილი იქნას მარტივი ლოგიკური ელემენტებისაგან, მათი მიმდევრობით შეერთების საშუალებით ან მათი შესასვლელების გადაადგილებით. ლოგიკური ელემენტების მიმდევრობით შეერთება შეესატყვისება სუპერპოზიციის ოპერაციას, რომელშიც იგულისხმება $F(x_1,x_2,...,x_n)$ გადამრთველი ფუნქციაში x_i – არგუმენტის ადგილზე $i=\overline{1,n}$ სხვა გადამრთველი ფუნქციის ჩასმა. მაგალითად, $F(x_1,x_2,...,x_{i-1})$, $g(y_1,y_2,...,y_k)$, $x_{i+1},...,x_n$, სადაც $g(y_1,y_2,...,y_k)$ არის რაიმე K არგუმენტიანი გადამრთველი ფუნქცია. მოვიყვანოთ მაგალითი ლოგიკური ელემენტის მიმდევრობით შეერთებისა, ნახ. 4.

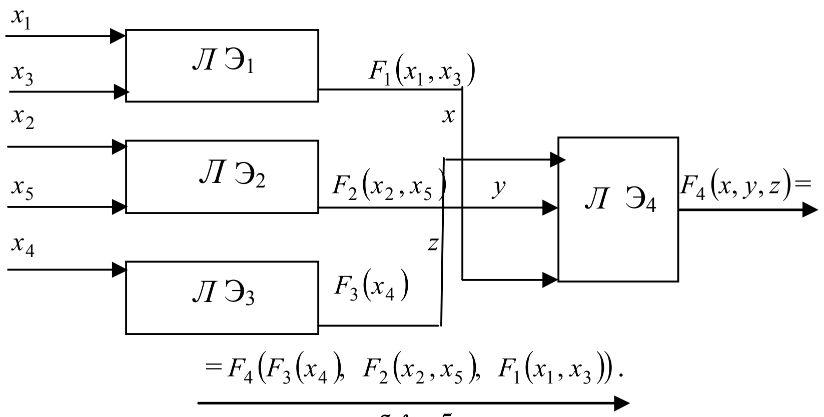


$$=F_4(F_1(x_1,x_2),\ F_2(x_3,x_4),\ F_3(x_5))=F_5(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5).$$

ნახ. 4

თუ გადამრთველ ფუნქციაში არგუმენტებს შევცვლით სხვა არგუმენტებით, ან რაც იგივეა, შევცვლით მათ ჩანაწერის თანმიმდევრობას, მაშინ ასეთ ოპერაციას ეწოდება არგუმენტის

შენაცვლების (ჩასმის) ოპერაცია. არგუმენტის შენაცვლების ოპერაცია შეესაბამება ლოგიკური ელემენტის შესასვლელების გადანაცვლებას. მოცემული ნახ. 4-სათვის მოვიყვანოთ $ЛЭ_4$ – ლოგიკური სქემის შესასვლელის გადანაცვლება. შედეგად მივიღებთ ახალ სქემას. ნახ. 5.



ნახ. 5

4.3. დიზიუნქციური და კონიუნქციური ნორმალური ფორმები

განვიხილოთ ბულის ცვლადების ერთობლიობა $x_1, x_2, \ldots, x_n$ მოცემული ცვლადებით და ოპერაციებით – $\vee, \wedge, -$. ავაგოთ ფორმულები; მაშინ ელემენტარული დიზიუნქცია ეწოდება რომელიმე მოცემული ცვლადების დიზიუნქციას ან მათ უარყოფას, ხოლო ელემენტარული კონიუნქცია იქნება რომელიმე მოცემული ცვლადების კონიუნქცია ან მათი უარყოფა.

მაგალითად, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \vee \overline{x_3}$, $x_3 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_7}$ არის ელემენტარული დიზიუნქცია, ხოლო $x_2 \wedge x_4$, $x_1 \wedge x_2$, $x_3 \wedge \overline{x_5} \wedge \overline{x_7}$ – ელემენტარული კონიუნქცია.

თუ ელემენტარული დიზიუნქცია (კონიუნქცია) შეიცავს ყველა ცვლადს ან მათ უარყოფას თითოჯერ მოცემული ცვლადთა ერთობლიობიდან, მაშინ ასეთ დიზიუნქციას (კონიუნქციას) ეწოდება

სრული ელემენტარული დიზიუნქცია (კონიუნქცია). მაგალითად, ვთქვათ, მოცემულია შემდეგ ცვლადთა ერთობლიობა x_1, x_2, x_3, x_4 მაშინ სრული ელემენტარული დიზიუნქციები იქნება $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee x_4$, $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3 \vee \overline{x_4}$, $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$ და ა.შ. ხოლო სრული ელემენტარული კონიუნქცია იქნება – $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$, $x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_3} \wedge x_4$ და ა.შ.

განსახილველი ცვლადების ელემენტერული კონიუნქციის დიზიუნქციას ეწოდება დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა. მაგალითად, თუ მოცემულია $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ცვლადთა ერთობლიობა, მაშინ დიზიუნქციური ნორმალური ფორმები იქნება შემდეგი გამოსახულება: $(x_1 \wedge \overline{x_2}) \vee (x_3 \wedge \overline{x_4} \wedge x_5)$, $(\overline{x_2} \wedge x_4 \wedge x_1) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_4 \wedge x_5 \wedge x_3)$ და ა.შ.

განსახილველი ცვლადების ელემენტარული დიზიუნქციის კონიუნქციას ეწოდება კონიუნქციური ნორმალური ფორმა. იგივე ცვლადებისათვის კონიუნქციური ნორმალური ფორმები იქნება შემდეგი გამოსახულებები: $(x_3 \vee x_2) \wedge (\overline{x_4} \vee x_1)$, $(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_5}) \wedge (\overline{x_4} \vee x_2) \wedge (x_3 \vee x_5 \vee \overline{x_6})$ და ა. შ.

ვთქვათ, მოცემულია n არგუმენტიანი გადამრთველი ფუნქცია $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ამ უკანასკნელს ეწოდება ერთიანის კონსტიტუენტა, თუ ის ღებულობს 1-ის ტოლ მნიშვნელობას მხოლოდ არგუმეტთა ერთ ანაკრებზე. ერთიანის კონსტიტუენტა წარმოადგენს გადამრთველი ფუნქციის ყველა არგუმენტის კონიუნქციას, ანუ სრულ ელემენტარულ კონიუნქციას. მაგალითად, თუ $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქცია ტოლია ერთის $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ და $x_3 = 1$ ანაკრებზე, მაშინ ერთიანის კონსტიტუენტა განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით: $\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3$.

ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქციის ერთიანის კონსტიტუენტა შეიძლება განისაზღვროს შემდეგნაირად: აუცილებელია, ავიღოთ მოცემული ფუნქციის ყველა ცვლადის

კონიუნქცია და იმ ცვლადების თავზე, რომლის მნიშვნელობაც ანაკრებში ტოლია 0-ს; გავაკეთოთ უარყოფის აღმნიშვნელი ხაზი. კონიუნქციის აღნიშვნისათვის ხშირად ხმარობენ გამრავლების ნიშანს „·“. შემდგომში გამოყენებული იქნება მითითებული აღნიშვნა. მაგალითად, თუ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფუნქცია ტოლია ერთის შემდეგ ანაკრებზე $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$, მაშინ ერთიანის კონსტიტუენტა ტოლი იქნება $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$.

ერთიანის კონსტიტუენტის ცნების შემოღება იძლევა შესაძლებლობას ჩაიწეროს გადამრთველი ფუნქცია ანალიზურ სახეში მისი ჭეშმარიტების ცხრილის გამოყენებით.

გადამრთველი ფუნქციის ერთიანის კონსტიტუენტის დიზიუნქციას ეწოდება მოცემული ფუნქციის სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა (სდნფ). ნებისმიერ გადამრთველ ფუნქციას აქვს მხოლოდ ერთი სდნფ.

მაგალითისათვის მოვიყვანოთ სდნფ $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციისათვის, რომლის ჭეშმარიტების ცხრილიც მოყვანილია ქვემოთ.

ცხრილი 3.

$F(x_1, x_2, x_3)$	x_1	x_2	x_3
1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	0
0	1	1	1

როგორც ცხრილიდან ჩანს, მოცემული ფუნქცია ტოლია ერთიანის, ნულოვან, მესამე, მეოთხე და მეშვიდე ანაკრებზე. ჩავწეროთ ერთიანის კონსტიტუენტა მითითებული ანაკრებისათვის:
$\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$, $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$, $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$.

ამის შემდეგ მისი სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა იქნება: $F = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$ სდნფ არა აქვს მხოლოდ ერთ გადამრთველ ფუნქციას – „ნულის კონსტიტუენტას“.

ზოგიერთი გადამრთველი ფუნქციები ტოლია 1-ის უმრავლესი ანაკრებისათვის. ცხადია, ასეთი ფუნქციების სდნფ იქნება დიდი. ასეთი შემთხვევისათვის გამოიყენება ანალიზური ხერხით ფუნქციის მოცემის უფრო მოსახერხებელი ფორმა. განვიხილოთ იგი. დაუშვათ, მოცემულია n არგუმენტიანი $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ გადამრთველი ფუნქცია. ასეთ ფუნქციას ეწოდება ნულის კონსტიტუენტა, თუ იგი ღებულობს 0-ის ტოლ მნიშვნელობას მხოლოდ ერთ ანაკრებზე. ნულის კონსტიტუენტა წარმოადგენს მოცემული გადამრთველი ფუნქციის ყველა არგუმენტის დიზიუნქციას ანუ სრულ ელემენტარულ დიზიუნქციას. მაგალითად, თუ $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფუნქცია ტოლია 0-ს ანაკრებზე $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1$, მაშინ 0-ის კონსტიტუენტა განისაზღვრება შემდეგი გამოსახულებით: $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4}$. ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქციის ნულის კონსტიტუენტა შეიძლება იქნას მიღებული შემდეგნაირად: აუცილებელია აღებული იქნას მოცემული ფუნქციის ყველა ცვლადის დიზიუნქცია და იმ ცვლადის თავზე, რომლის მნიშვნელობაც ანაკრებში ტოლია 1-ის, დავსვათ უარყოფის ნიშანი. მაგალითად, თუ $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქცია ტოლია ნულის შემდეგი ანაკრებისათვის $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,$ და $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1,$ მაშინ ნულის კონსტიტუენტა იქნება: $\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ და $x_1 \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$.

ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქციის ნულის კონსტიტუენტის კონიუნქციას ეწოდება ამ ფუნქციის სრულყოფილი კონიუნქციური ნორმალური ფორმა (სკნფ). ყველა გადამრთველ ფუნქციას აქვს ერთადერთი სკნფ.

მაგალითისათვის, ჩავწეროთ $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის სკნფ, რომლის ჭეშმარიტების ცხრილიც მოცემულია ზემოთ (ცხრილი 3).

მოცემული ცხრილიდან ჩანს, რომ ფუნქცია ნულის ტოლია პირველ, მეორე, მეხუთე და მეშვიდე ანაკრებზე. ჩავწეროთ ნულის კონსტიტუენტა მოცემული ანაკრებისათვის: $x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$, $\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}$, $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \overline{x_3}$. მაშინ სკნფ-ს მოცემული ფუნქციისათვის ექნება სახე: $F = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot$ $\cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \cdot (\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_3}) \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3)$ სკნფ არა აქვს მხოლოდ ერთ გადამრთველ ფუნქციას – ,,ერთიანის კონსტიტუენტას“.

4.4. შემოკლებული დიზიუნქციური (კონიუნქციური) ნორმალური ფორმა

განვიხილოთ გადამრთველი ფუნქციები $F_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ და $F_2(x_1, x_2, ..., x_n)$. თუ F_1 ფუნქცია ტოლია 0-ს იგივე $x_1, x_2, ..., x_n$ ანაკრებზე რომელზედაც F_2 ფუნქციაც ნულის ტოლია, მაშინ F_1 ფუნქცია შედის F_2 ფუნქციაში.

F_1 ფუნქციას F_2-ში შესვლა აღინიშნებნა შემდეგნაირად $F_1 \subset F_2$.

თუ $F_1 \subset F_2$ სრულდება, ეს იმას ნიშნავს, რომ F_1-ის ნულები გადაფარავენ F_2-ის ყველა ნულებს, ხოლო F_2-ის ერთიანები შეიძლება გადაიფაროს როგორც F_1-ის ნულებით, აგრეთვე ერთიანებითაც. თუ F_1 და F_2 ფუნქციები რაიმე ანაკრებზე ღებულობენ განსაზღვრულ მნიშვნელობებს, (არაა აუცილებელი მათი ტოლობა) მაშინ ამბობენ, რომ F_1 თავის მნიშვნელობით ფარავს F_2-ს და პირიქით. მოვიყვანოთ მაგალითი ორარგუმენტიანი ფუნქციებისათვის (ცხრილი 3) $F_{10}(x, y)$-ში შედიან $F_8(x, y)$, $F_2(x, y)$ და $F_0(x, y)$ ანუ ეს ფუნქციები ტოლია ნულის 0,1 და 1,1 ანაკრებზე.

თუ F_1 ფუნქცია შედის F_2 ფუნქციაში, მაშინ მას უწოდებენ იმპლიკანტას. არსებობს ასევე მარტივი იმპლიკანტის მცნება – ეს არის ელემენტარული კონიუნქციები, რომლებიც შედიან მოცემულ ფუნქციაში იმ პირობით, რომ არცერთი საკუთარი ნაწილი ამ კონიუნქციებისა მოცემულ ფუნქციებში არ შედიან. კონიუნქციის საკუთარი ნაწილი ეწოდება მის ისეთ ნაწილს, რომელიც მიიღება საწყისი კონიუნქციიდან მისი ერთი ან რამდენიმე ელემენტის ამოგდებით. $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$ ელემენტარული კონიუნქციის საკუთარი ნაწილები იქნება $\overline{x_1} \cdot x_2$, $\overline{x_1}$, x_3, $x_2 \cdot x_3$, $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$ მოვიყვანოთ მარტივი მაგალითი: დაუშვათ, $\overline{x_1}, x_2, x_3 \subset F(x_1, x_2, x_3)$, ასევე $x_1 \cdot x_2 \subset F(x_1, x_2, x_3)$ და $x_2 \cdot x_3 \subset F(x_1, x_2, x_3)$ მაშინ $\overline{x_1} \cdot x_2$ და $x_2 \cdot x_3$ იქნებიან $F(x_1, x_2, x_3)$-ის მარტივი იმპლიკანტები.

თუ შესვლა $(\subset)$ არ სრულდება, მაშინ მას ასე აღნიშნავენ – $(\not\subset)$. მაგ. $\overline{x_1} \not\subset F(x_1, x_2, x_3)$.

ცხადია, რომ მოცემულ ფუნქციაში შემავალი მარტივი იმპლიკანტები იქნება ყველაზე მოკლე ელემენტარული კონიუნქციები. მოვიყვანოთ ორარგუმენტიანი გადამრთველი ფუნქციის მარტივი იმპლიკანტას მაგალითი (ცხრილი 5). ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქციის მარტივი იმპლიკანტას საპოვნელად საჭიროა განისაზღვროს მოცემულ ფუნქციაში შემავალი ყველა ელემენტარული კონიუნქცია და შემდეგ მათგან ამოვარჩიოთ ისინი, რომელთა საკუთარი ნაწილები არ შედის მოცემულ ფუნქციაში. ორ არგუმენტიანი ფუნქციის ელემენტარულ კონიუნქციის რიცხვი ტოლია 8.

როგორც ზემოთ ითქვა, ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქცია შეიძლება წარმოვადგინოთ სრულყოფილი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის სახით. ამავე დროს სნდფ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემოკლებული ფორმით. ამიტომ,

სნდფ-ს ელემენტარულ კონიუნქციებს შეუძლიათ თავიანთი ერთიანებით დაფარონ საწყისი გადამრთველი ფუნქციის არა ერთი, არამედ რამდენიმე ერთიანი. მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი; ავიღოთ ფუნქცია ორი არგუმენტით $-F_7(x,y)$. მის სნდფ-ს აქვს სახე $\bar{x}\cdot y \vee x\cdot\bar{y} \vee x\cdot y$. ამავე დროს $F_7(x,y)$ ფუნქციის ერთიანები შეიძლება დაიფაროს უფრო მოკლე კონიუნქციით, ისეთებით როგორიცაა x და y, მაშინ $F_7(x,y)$ ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილი იქნეს შემდეგი ფორმით:

ცხრილი 5

გადამრთველი ფუნქციები	ფუნქციაში შემავალი ელემენტარული ნამრავლი	მარტივი იმპლიკატები	შემოკლებული დიზიუნქციური ფორმა
$F_0(x,y)$	არა	არა	არა
$F_1(x,y)$	$x\cdot y$	$x\cdot y$	$x\cdot y$
$F_2(x,y)$	$x\cdot\bar{y}$	$x\cdot\bar{y}$	$x\cdot\bar{y}$
$F_3(x,y)$	x, $x\cdot\bar{y}$, $x\cdot y$	x	x
$F_4(x,y)$	$\bar{x}\cdot y$	$\bar{x}\cdot y$	$\bar{x}\cdot y$
$F_5(x,y)$	$\bar{x}\cdot y$, $x\cdot y$, y	y	y
$F_6(x,y)$	$\bar{x}\cdot y$, $x\cdot\bar{y}$	$\bar{x}\cdot y$, $x\cdot\bar{y}$	$\bar{x}\cdot y \vee x\cdot\bar{y}$
$F_7(x,y)$	$\bar{x}\cdot y$, $x\cdot\bar{y}$, $x\cdot y$, x, y	x, y	$x \vee y$
$F_8(x,y)$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\bar{x}, \bar{y}$	$\bar{x}, \bar{y}$
$F_9(x,y)$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$, $x\cdot y$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$, $x\cdot y$	$\bar{x}\cdot\bar{y} \vee x\cdot y$
$F_{10}(x,y)$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$, $x\cdot\bar{y}$, $\bar{y}$	$\bar{y}$	$\bar{y}$
$F_{11}(x,y)$	$\bar{y}$, x, $x\cdot y$, $\bar{x}\cdot\bar{y}$, $x\cdot\bar{y}$	x, $\bar{y}$	$x \vee \bar{y}$
$F_{12}(x,y)$	$\bar{x}\cdot\bar{y}$, $\bar{x}\cdot y$, $\bar{x}$	x	$\bar{x}$
$F_{13}(x,y)$	$\bar{x}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}$, $\bar{y}$, $\bar{x}\cdot y$, x y	y, $\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$
$F_{14}(x,y)$	$\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}\cdot\bar{y}$, $\bar{x}\cdot y$, x $\bar{y}$	$\bar{x}$, $\bar{y}$	$\bar{x} \vee \bar{y}$
$F_{15}(x,y)$	$\bar{x}$, $\bar{y}$ x, y, $x\cdot\bar{y}$, $x\cdot y$	x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$	$x \vee y \vee \bar{x} \vee \bar{y}$
	$\bar{x}\cdot y$, $x\cdot y$		

$F_7(x,y)=x \vee y$. მართლაც, ელემენტარული x კონიუნქცია $F_7(x,y)$ ფუნქციასთან ერთად ერთიანის ტოლია შემდეგ ანაკრებზე: 1,0 და 1,1, ხოლო y ელემენტარული კონიუნქცია ტოლია ერთიანის $F_7(x,y)$ ფუნქციასთან ერთად შემდეგ ანაკრებზე 0,1 და 1,1. ერთობლივად x და y ელემენტარული კონიუნქციები ფარავენ $F_7(x,y)$-ის ყველა ერთიანებს. ნებისმიერ გადამრთველ ფუნქციას აქვს ერთადერთი შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა.

გადამრთველი ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა წარმოადგენს ყველა მარტივი იმპლიკანტას დიზიუნქციას. მოცემული ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის მისაღებად გამოიყენება კვაინის მეთოდი. სანამ ამ მეთოდს გავეცნობით, განვიხილოთ

შეწებებისა და შთანთქმის ოპერაცია.

შეწებების ოპერაცია თავის მხრივ იყოფა სრული და არასრული შეწებების ოპერაციებად. სრული შეწებების ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად: $x\cdot y \vee x\cdot\bar{y}=x$ ამ შემთხვევაში $x\cdot y$ და $x\cdot\bar{y}$ წევრები შეწებდებიან y ცვლადით.

შთანთქმის ოპერაცია.

განისაზღვრება შემდეგნაირად: $x \vee x\cdot y=x$. ამ გამოსახულებაში $x\cdot y$ წევრი შთაინთქმება x წევრის მიერ. ახლა მოვიყვანოთ არასრული შეწებების ოპერაცია: $x\cdot y \vee x\cdot\bar{y}=x \vee x\cdot y \vee x\cdot\bar{y}$. მოცემული გამოსახულება ადვილად მიიღება ზემოთ მოყვანილი ოპერაციებიდან.

არსებობს აგრეთვე, შეწებების შემდეგი ოპერაცია y ცვლადის მიხედვით: $(x\vee y)\cdot(x\vee\bar{y})=x$ და შთანთქმის ოპერაცია: $x.\quad (x\vee y)=x$ ამ ოპერაციაში x გამოსახულება შთანთქავს $x\vee y$.

მოვიყვანოთ ძირითადი ფორმულები, რომლებიც ფართოდ გამოიყენება შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმების მისაღებად:

$$
\begin{array}{ll}
0 \vee 0 = 0 & 0 \cdot 0 = 0 \\
1 \vee 0 = 1 & 1 \cdot 0 = 0 \\
1 \vee 1 = 1 & 1 \cdot 1 = 1 \\
0 \vee x = x & 1 \cdot x = x \\
1 \vee x = 1 & x \cdot x = x \\
x \vee x = x & x \cdot \overline{x} = 0 \\
x \vee \overline{x} = 1 & x \cdot y = y \cdot x \\
x \vee y = y \vee x & x \cdot y \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot z) \cdot y \\
x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z = & x \cdot x \cdot \ldots \cdot x = x \\
= x \vee (y \vee z) & \overline{\overline{x}} = x \\
x \vee x \vee \ldots \vee x = x & x \cdot y \vee x \cdot z = x(y \vee z)
\end{array}
$$

კვაინის მეთოდს საფუძვლად უდევს კვაინის თეორემა, რომელსაც მოვიყვანთ დაუმტკიცებლად. თუ გადამრთველი ფუნქციის სდნფ-ზე ჩავატარებთ არასრული შეწებების და არასრული შთანთქმის ყველა ოპერაციას, მაშინ შედეგად მივიღებთ ამ ფუნქციის შემოკლებულ დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას.

იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა, საჭიროა, ეს ფუნქცია დასაწყისში მოცემული იქნას სდნფ-ში. იმ შემთხვევაში, თუ ფუნქცია მოცემულია არასრულ დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმაში, საჭიროა, მივმართოთ გაშლის ოპერაციას, რომელიც იძლევა ფუნქციის სდნფ-ს მიღების შესაძლებლობას. გაშლის ოპერაცია შეწებების ოპერაციის შებრუნებული ოპერაციაა და წარმოადგენს ფორმულის რომელიმე წევრის გადამრავლებას $x \vee \overline{x} = 1$ ტიპის გამოსახულებაზე.

მოცემული ფუნქციის სდნფ-ს მიღების შემდეგ სწარმოებს ერთიანის კონსტიტუენტების შეწებება. აქ საჭიროა აღვნიშნოთ, რომ შეიძლება ვაწარმოოთ შეწებება მხოლოდ იმ კონსტიტუენტებისა, რომლებიც შეიცავენ ელემენტთა ერთნაირ

რიცხვს. ამის შემდეგ წარმოებს წევრთა შთანთქმის ოპერაცია. შემდეგ კი, თავიდან აწარმოებენ შეწებების ოპერაციას და ა.შ.

მოვიყვანოთ შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის განსაზღვრის მაგალითი. დაუშვათ, $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქცია წარმოდგენილია შემდეგ სნდფ-ში:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

ვაწარმოოთ პირველი და მეორე, ასევე მესამე და მეოთხე წევრთა შეწებება. შედეგად მივიღებთ:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$$

ამის შემდეგ $\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2$ კონიუნქცია შთანთქავს მეორე და მესამე წევრებს, ხოლო კონიუნქცია $x_1 \cdot x_3$ შთანთქავს მეხუთე და მეექვსე წევრს. ამგვარად, საბოლოოდ მივიღებთ ფუნქციის შემოკლებულ დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_1 \cdot x_3$$

ვიპოვოთ შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა $F_7(x, y)$ ფუნქციისათვის. $F\ (x, y)$ ფუნქციის სდნფ ტოლია:

$$F_7(x, y) = \overline{x} \cdot y \vee x \cdot \overline{y} \vee x \cdot y$$

ვაწარმოოთ სდნფ-ს მეორე და მესამე წევრების შეწებება:

$$F_7(x, y) = \overline{x} \cdot y \vee x \vee x \cdot y \vee x \cdot \overline{y}$$

ამ გამოსახულებაში ვაწარმოოთ პირველი და მესამე წევრების შეწებება:

$$F_7(x, y) = y \vee y \cdot x \vee y \cdot \overline{x} \vee x \vee x \cdot \overline{y}$$

y-ის კონიუნქცია შთანთქავს მეორე და მესამე წევრს, ხოლო x-ის – მეხუთე წევრს. შედეგად მივიღებთ შემოკლებულ ნორმალურ ფორმას:

$$F_7(x, y) = y \vee x = x \vee y$$

განვიხილოთ კიდევ ერთი ფუნქცია

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

დაუშვათ,

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4 \vee \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3 \cdot \overline{x}_4$$

მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა. რადგან არ არის მოცემული ამ ფუნქციის სდნფ, ამიტომ დასაწყისში განვსაზღვროთ იგი. ამისათვის, პირველ და მეორე წევრზე გამოვიყენოთ გაშლის ოპერაცია. პირველი წევრი გავამრავლოთ $x_4 \vee \overline{x_4}$ –ზე ხოლო მეორე $x_1 \vee \overline{x_1}$ –ზე, მაშინ მივიღებთ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot (x_4 \vee \overline{x_4}) \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \cdot (x_1 \vee \overline{x_1}) \vee$$
$$\vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot x_4 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee$$
$$\vee \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

ჩავატაროთ შეწებება: პირველი და მეორე წევრისა x_4–ით, მეორე და მესამე წევრისა x_2–ით, მეორე და მეხუთე წევრისა x_1–ით, მესამე და მეოთხესი x_1–ით, მეოთხე და მეხუთესი x_2–ით, რის შემდეგ ჩავტაროთ შთანთქმის ოპერაცია და მივიღებთ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1, \overline{x_2}, \overline{x_3} \vee \overline{x_2}, \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_1 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee x_2 \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_1} \vee$$
$$\vee \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

მიღებული გამოსახულების მარჯვენა ნაწილში თავიდან ჩავატაროთ შეწებება: მეორე და მეოთხე წევრისა x_2–ით, მესამე და მეხუთე წევრის x_1–ით. შემდგომ, შთანთქმის ოპერაციის ჩატარებით მივიღებთ:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_4} = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}$$

ვინაიდან ამ გამოსახულებაში აღარ შეიძლება შეწებებისა და შთანთქმის ოპერაციების ჩატარება, ამიტომ, იგი წარმოადგენს მოცემული ფუნქციის შემოკლებულ დიზიუნქციურ ნორმალურ ფორმას.

და ბოლოს მოვიყვანოთ გადამრთველი ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის განსაზღვრის თანმიმდევრობა. სდნფ-ს განსაზღვრის შემდეგ მიმდინარეობს შეწებება მისი პირველი წევრისა დანარჩენთან. შემდეგ მეორე

წევრს შევაწებებთ დანარჩენთან გარდა პირველისა, შემდეგ მესამე წევრი შეწებდება დანარჩენ წევრებთან გარდა პირველისა და მეორისა და ა.შ. შეწებების ოპერაციის შემდეგ ყოველთვის ხორციელდება შთანთქმის ოპერაცია.

4.5. გადამრთველი ფუნქციის ჩიხური და მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის განსაზღვრა

გადამრთველი ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმები ზოგ შემთხვევაში შეიძლება შეიცავდნენ ზედმეტ მარტივ იმპლიკანტას. ეს იმპლიკანტები შეიძლება ამოღებული იქნას შემოკლებული ნორმალური ფორმებიდან ისე რომ, ფუნქციის მნიშვნელობა არ შეიცვლება.

თუ შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან არ შეიძლება არცერთი მარტივი იმპლიკანტას გამორიცხვა, მაშინ მას ეწოდება ფუნციის ჩიხური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა. გადამრთველ ფუნქციას შეიძლება ჰქონდეს რამდენიმე ჩიხური ფორმა. თუ ჩიხური ფორმა შეიცავს ელემენტთა უმცირეს რიცხვს, მაშინ მას ეწოდება მინიმალური.

არსებობს შემდეგი თეორემა: გადამრთველი ფუნქციის მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა წარმოადგენს ჩიხურს. ნებისმიერი გადამრთველი ფუნქციის მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის წევრები იქნებიან მარტივი იმპლიკანტები.

გადამრთველი ფუნქციის მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის განსაზღვრისათვის საჭიროა, მოინახოს ყველა მისი ჩიხური ფორმები და შემდეგ მათ შორის აირჩეს მინიმალური. განვიხილოთ წევრთა გამოცდის მეთოდი გადამრთველი ფუნქციის ჩიხური ფორმების მოსაძებნად. ამ მეთოდს საფუძვლად უდევს ფუნქციის დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის შემდეგი თვისება. ცნობილია, რომ დიზიუნქცია იქცევა ნულად, როცა მისი ყველა შემადგენელი ელემენტი ტოლია ნულის; ამიტომ, თუ დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან ამოვიღებთ ერთ ან რამდენიმე წევრს, ის მაინც იქნება ნულის

ტოლი იგივე ანაკრებზე, რომელზეც ფუნქციის საწყისი დიზიუნქციური ნორმალური ფორმაც ნულის ტოლია.

ახლა დაუშვათ, რომ ფუნქციის დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან ამოვიღოთ წევრი, რომელიც რაიმე განსაზღვრულ ანაკრებზე ტოლია 1-ის. დიზიუნქციის შემდეგი თვისებიდან $1 \vee x = 1$ გამომდინარეობს, რომ ამ ანაკრებზე მთელი დიზიუნქცია 1-ის ტოლია. მაგრამ, თუ ამ წევრს ამოვიღებთ, დარჩენილი გამოსახულება იგივე ანაკრებზე შეიძლება აღარ იყოს 1-ის ტოლი. იმ შემთხვევაში, თუ წევრის ამოღების შემდეგ მოცემული გამოსახულება ტოლი იქნება 1, მაშინ ამოღებული წევრი იქნება ზედმეტი.

მოცემული მსჯელობიდან გამომდინარეობს წევრთა გამოცდის მეთოდის ძირითადი წესი: საჭიროა აღებული იქნას შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმის ნებისმიერი წევრი და გამოიცადოს იგი. გამოცდა მდგომარეობს შემდეგში: მოცემული წევრი ამოიღება შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან, ხოლო დარჩენილ გამოსახულებაში ჩაისმება ცვლადების ის მნიშვნელობა, რომელიც ამოღებულ წევრს აქცევს ერთიანად. იმ შემთხვევაში, როცა დარჩენილი გამოსახულებაც იქნება 1, ამოღებული წევრი იქნება ზედმეტი.

მოვიყვანოთ ჩიხური ფორმის განსაზღვრის მაგალითი. დაუშვათ, $F(x_1, x_2, x_3)$-ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმაა:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot x_3$$

ვიპოვოთ მოცემული ფუნქციის ჩიხური ფორმა. გამოვცადოთ $x_1 \cdot \overline{x_2}$ წევრი; დაგვრჩება გამოსახულება

$$\overline{x_1} \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot x_3$$

ამ გამოსახულებაში ჩავსვათ მნიშვნელობა $x_1 = 1$ და $x_2 = 0$. ეს მნიშვნელობები გადააქცევენ ერთიანად $x_1 \cdot \overline{x_2}$ წევრს $x_1 \cdot \overline{x_2} = 1 \cdot 1 = 1$. ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$0 \cdot x_3 \vee 1 \cdot x_3 = 0 \vee x_3 = x_3$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ დარჩენილი გამოსახულება არაა ერთის ტოლი. ამიტომ, $x_1 \cdot \overline{x_2}$ წევრის ამოღება საწყისი ფორმიდან არ შეიძლება. ახლა გამოვცადოთ $\overline{x_1} \cdot x_3$ წევრი. დარჩება გამოსახულება

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_2} \cdot x_3 .$$

ჩავსვათ მასში მნიშვნელობები $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, მაშინ $\overline{x_1} \cdot x_3 = 1 \cdot 1 = 1$ და მივიღებთ

$$0 \cdot \overline{x_2} \vee x_2 \cdot 1 = 0 \vee x_2 = x_2 .$$

ამ შემთხვევაშიც დარჩენილი გამოსახულება არ უდრის 1. ამიტომ $\overline{x_1} \cdot x_3$ წევრიც არ შეიძლება იქნეს ამოღებული.

გამოვცადოთ ბოლოს $\overline{x_2} \cdot x_3$ წევრი, დაგვრჩება გამოსახულება

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_3$$

ჩავსვათ მასში მნიშვნელობები $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ $(\overline{x_2} \cdot x_3 = 1 \cdot 1 = 1)$; $x_1 \cdot 1 \vee \overline{x_1} \cdot 1 = x_1 \vee \overline{x_1} = 1$,

ე.ი. დარჩენილი გამოსახულება ტოლია 1. შესაბამისად $\overline{x_2} \cdot x_3$ წევრი წარმოადგენს ზედმეტს და იგი შეიძლება ამოღებული იქნას საწყისის ფორმიდან, ე. ი.

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_3 \vee \overline{x_2} \cdot x_3$$

ფუნქციის ჩიხური ფორმა იქნება:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_3 .$$

მიღებული ჩიხური ფორმა იქნება $F(x_1, x_2, x_3)$ ფუნქციის მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა.

მოვიყვანოთ კიდევ ერთი მაგალითი: ვთქვათ, მოცემული $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ფუნქციის შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმაა:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

მოვძებნოთ მოცემული ფუნქციის ჩიხური ფორმა. გამოვცადოთ პირველი წევრი $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$. ჩავსვათ დარჩენილ გამოსახულებაში

$$x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

$x_1=0$, $x_3=1$, $x_4=0$, $(x_1\cdot x_3\cdot x_4=1\cdot1\cdot1=1)$ მნიშვნელობები და მივიღებთ: $x_2\cdot1\cdot1\vee1\cdot\overline{x_2}\cdot1\vee0\cdot x_2\cdot1\vee0\cdot0\cdot1=x_2\vee\overline{x_2}=1$ შესაბამისად, პირველი წევრი $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წარმოადგენს ზედმეტს და იგი შეიძლება ამოვიღოთ.

გამოვცადოთ მეორე წევრი $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$. ჩავსვათ დარჩენილ გამოსახულებაში.

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

$x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, $(x_2\cdot x_3\cdot x_4=1\cdot1\cdot1=1)$ მნიშვნელობა და მივიღებთ:

$$x_1\cdot1\cdot1\vee x_1\cdot0\cdot1\vee x_1\cdot1\cdot1\vee x_1\cdot0\cdot1=\overline{x_1}\vee x_1=1$$

შესაბამისად მეორე წევრიც წარმოადგენს ზედმეტს და ისიც შეიძლება ამოვიღოთ.

გამოვცადოთ მესამე წევრი $\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$. ჩავსვათ დარჩენილ გამოსახულებაში,

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

მნიშვნელობები: $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $(\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3=1)$ და მივიღებთ:

$$1\cdot1\cdot\overline{x_4}\vee0\cdot1\cdot\overline{x_4}\vee0\cdot0\cdot\overline{x_4}\vee0\cdot0\cdot\overline{x_4}=\overline{x_4}.$$

ეს გამოსახულება არ უდრის 1, ამიტომ $\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3$ წევრი არ წარმოადგენს ზედმეტს.

გამოვცადოთ მეოთხე წევრი $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ დარჩენილ გამოსახულებაში

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ მნიშვნელობები: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_4=0$, $(x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}=1)$ და მივიღებთ:

$$0\cdot x_3\cdot1\vee1\cdot x_3\cdot1\vee0\cdot0\cdot x_3\vee1\cdot\overline{x_3}\cdot1=x_3\vee\overline{x_3}=1$$

აქედან ჩანს, რომ მეოთხე წევრი წარმოადგენს ზედმეტს და იგი შეიძლება ამოვიღოთ.

გამოვცადოთ მეხუთე წევრი $x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$. დარჩენილ გამოსახულებაში:

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ მნიშვნელობები: $x_1=1$, $x_3=0$, $x_4=0$, $(x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}=1)$ და მივიღებთ:

$$0\cdot0\cdot1\vee x_2\cdot0\cdot1\vee0\cdot\overline{x_2}\cdot0\vee1\cdot x_2\cdot1=0\vee x_2=x_2$$

ეს გამოსახულება არ უდრის 1, ამიტომ მეხუთე წევრი $x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$ არ არის ზედმეტი, ამგვარად, საწყის შემოკლებულ ნორმალურ ფორმას აქვს სამი ზედმეტი წევრი $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$, $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ და $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ თუ ზედმეტია რამდენიმე წევრი, მაშინ მათი ერთდროულად ამოღება არ შეიძლება. ამ შემთხვევაში ჯერ ამოიღება ნებისმიერი ერთ-ერთი მათგანი, რის შემდეგაც გამოიცდება ის წევრები, რომლებიც პირველი გამოცდის დროს წარმოადგენდნენ ზედმეტს. შემდეგ ამოიღება სხვა ზედმეტი წევრი და გამოიცდება დანარჩენი და ა.შ. ანალოგიურად გაისინჯება დანარჩენი ყველა ზედმეტი წევრი.

გავაგრძელოთ მაგალითის ამოხსნა, ამოვიღოთ ჯერ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ ზედმეტი წევრი, მივიღებთ გამოსახულებას

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ამ გამოსახულებაში გამოიცდებიან წევრები $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ და $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$, რომლებიც პირველი გამოცდის დროს აღმოჩნდნენ ზედმეტნი, ჯერ გამოვცადოთ $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი. დარჩენილ გამოსახულებაში:

$$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ მნიშვნელობები $x_2=1$, $x_3=1$, $x_4=0$, მივიღებთ:

$$\overline{x_1}\cdot 0\cdot 1\vee x_1\cdot 1\cdot 1\vee x_1\cdot 0\cdot 1=x_1.$$

ე.ი. $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი არ შეიძლება ამოვიღოთ, მიუხედავად იმისა, რომ იგი პირველ გამოცდაზე $x_1\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრთან ერთად აღმოჩნდა ზედმეტი.

გამოვცადოთ $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ წევრი დარჩენილ გამოსახულებაში:

$$x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ მნიშვნელობები $x_1=1$, $x_2=1$, $x_4=0$, ჩასმის შედეგად მივიღებთ:

$$1\cdot x_3\cdot 1\vee 0\cdot 0\cdot x_3\vee 1\cdot\overline{x_3}\cdot 1=x_3\vee\overline{x_3}=1$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ წევრი არის ზედმეტი და ის შეიძლება ამოვიღოთ. შედეგად ჩვენ მივიღებთ საწყისი ფუნქციის პირველ ჩიხურ ფორმას:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}.$$

ამის შემდეგ, საწყისი შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან ამოვიღებთ $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ ზედმეტ წევრს, მივიღებთ გამოსახულებას:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ამ გამოსახულებაში გამოვცადოთ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ და $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ წევრები, რომლებიც აღმოჩნდნენ ზედმეტნი პირველი გამოცდის დროს; ჯერ გამოვცადოთ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი დარჩენილ გამოსახულებაში:

$$\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ $x_1=0$, $x_3=1$, $x_4=0$, მნიშვნელობები. შედეგად მივიღებთ:

$$1\cdot\overline{x_2}\cdot 1\vee 0\cdot x_2\cdot 1\vee 0\cdot 0=\overline{x_2}.$$

აქედან ჩანს, რომ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრის ამოღებაც არ შეიძლება.

ახლა გამოვცადოთ $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ წევრი. დარჩენილ გამოსახულებაში:

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ $x_1=1$, $x_2=1$, $x_4=0$, მნიშვნელობები და მივიღებთ:

$$0\cdot x_3\cdot 1\vee 0\cdot 0\cdot x_3\vee 1\cdot\overline{x_3}\cdot 1=\overline{x_3}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $x_1\cdot x_2\cdot x_4$ არ შეიძლება ამოვიღოთ, ამიტომ საწყისი ფუნქციის მეორე ჩიხურ ფორმას (ამოღებულია $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი), ექნება სახე:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$ და

ბოლოს, შემოკლებული დიზიუნქციური ნორმალური ფორმიდან ამოვიღოთ ბოლო ზედმეტი წევრი $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$. მივიღებთ შემდეგ გამოსახულებას:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ამ გამოსახულებაში გამოვცადოთ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ და $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრები, რომლებიც აღმოჩნდნენ ზედმეტნი პირველი გამოცდის დროს. გამოვცადოთ ჯერ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი. დარჩენილ გამოსახულებაში

$$x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ $x_1=0$, $x_3=1$, $x_4=0$ მნიშვნელობები და მივიღებთ:

$$x_2\cdot 1\cdot 1\vee 1\cdot\overline{x_2}\cdot 1\vee 0\cdot 0\cdot 1=x_2\vee\overline{x_2}=1$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წარმოადგენს ზედმეტს და ის შეიძლება ამოვიღოთ. და ბოლოს, გამოვცადოთ $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრი. დარჩენილ გამოსახულებაში

$$\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

ჩავსვათ $x_2=1$, $x_3=1$ და $x_4=0$ მნიშვნელობები და მივიღებთ: $\overline{x_1}\cdot 1\cdot 1\vee\overline{x_1}\cdot 0\cdot 1\vee x_1\cdot 0\cdot 1=\overline{x_1}$ ე.ი. $x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრის ამოღება არ შეიძლება.

ე.ი. მივიღეთ მესამე ჩიხური ფორმა (ამოღებულია $x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}$ და $\overline{x_1}\cdot x_3\cdot\overline{x_4}$ წევრები) მოცემული ფუნქციისათვის:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot x_3\cdot\overline{x_4}\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}.$$

ეს ჩიხური ფორმა ემთხვევა პირველ ფორმას, ამიტომ მოცემულ ფუნქციას აქვს ორი ჩიხური ფორმა:

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_2\cdot x_3\cdot \overline{x_4}\vee x_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot x_3\cdot x_4$$

და

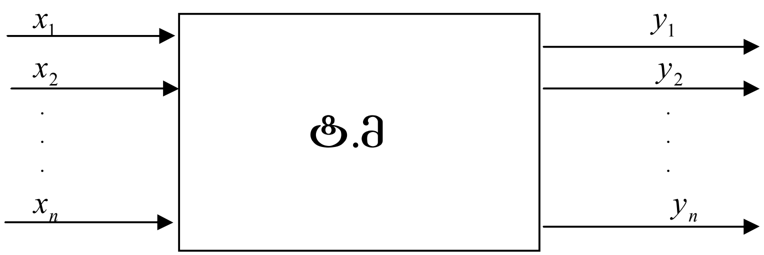
$$F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1}\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_2}\cdot x_3\vee x_1\cdot x_2\cdot\overline{x_4}\vee x_1\cdot\overline{x_3}\cdot\overline{x_4}$$

რადგან პირველი ჩიხური ფორმა შეიცავს ელემენტთა უმცირეს რიცხვს, ამიტომ იგი იქნება მოცემული ფუნქციის მინიმალური დიზიუნქციური ნორმალური ფორმა.

4.6. სასრული ავტომატები და მისი მოცემის ხერხები

განვიხილოთ რაიმე სისტემა (ტექნიკური მოწყობილობა). დაუშვათ, მას აქვს $n-$შესასვლელი, რომელზეც შემოდის ინფორმაცია სხვადასხვა გადამწოდიდან და $m-$გამოსასვლელი, საიდანაც მოიხსნება მმართველი ინფორმაცია და გადაეწოდება შემსრულებელ ორგანოს.

აღვნიშნოთ მოწყობილობის შესასვლელი x_i $(i=\overline{1,n})$ (ნახ. 6), ხოლო გამოსასვლელი y_j $(j=\overline{1,m})$. ტექნიკური მოწყობილობის შესასვლელად და გამოსასვლელად მივიღოთ ისეთი სიგნალი, რომელიც ტოლია 1-ის ან 0-ის. $X=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ შესასვლელისა და $Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_m\}$ გამოსასვლელის სიმრავლეს უწოდებენ ანბანს. ანბანის ელემენტებს უწოდებენ ასოს.



ნახ. 6

მოცემული ანბანის ასოთა ნებისმიერ მოწესრიგებულ თანამიმდევრობას ეწოდება სიტყვები. მაგ. $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ და $Y=\{y_1,y_2\}$-სათვის სიტყვები იქნება:

$$x_1x_2,\ x_2x_1x_3, x_2x_3,\ x,\ x_2x_3,\ x_1x_2x_2x_3,\ y_2y_1,\ y_1y_2,\ y_1y_2y_2$$

და ა.შ.

ტექნიკური მოწყობილობის ფუნქციონირება სასრული ავტომატის ფარგლებში განიხილება $0,1,2,\ldots,k,\ldots,$ დროის დისკრეტულ მომენტში და აღიწერება ეგრეთწოდებულ მოწყობილობათა შიგა მდგომარეობის საშუალებით. ამავე დროს იგულისხმება, რომ დროის ნებისმიერ მომენტში მოწყობილობის შესავალზე მიეწოდება ერთი სიგნალი, რომელიც განაპირობებს ერთ განსაზღვრულ მდგომარეობას და გამოსასვლელზეც აღიძვრება მხოლოდ ერთი სიგნალი.

ახლა განვსაზღვროთ სასრული ავტომატი. სასრული ავტომატი წარმოადგენს ინფორმაციის ისეთ გარდამსახს, რომელიც შესასვლელზე სიგნალის მიწოდებით გადადის ერთ მდგომარეობიდან მეორეში და ამავე დროს გამოსასვლელზე აღძრავს სიგნალს.

თუ შემავალი და გამომავალი სიგნალების და აგრეთვე შიგა მდგომარეობის სიმრავლე წარმოადგენს სასრულს, მაშინ ავტომატს სასრული ეწოდება. წინააღმდეგ შემთხვევაში იგი იქნება უსასრულო. ავტომატის განსაზღვრიდან გამომდინარეობს, რომ იგი გარდასახავს შემავალ სიტყვათა სიმრავლეს გამოსავალ სიტყვათა სიმრავლედ. ამავე დროს, მოცემული გარდასახვა შეიძლება წარმოვადგინოთ, როგორც შემავალ სიტყვათა ცალსახა Γ ასახვა გამომავალ სიტყვებზე. ამ Γ ასახვას ეწოდება ანბანური ოპერატორი ანუ ანბანური ასახვა. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ Γ ანბანური ოპერატორი წარმოადგენს ფუნქციას, რომელიც განსაზღვრულია შემავალ სიტყვათა სიმრავლეზე და ღებულობს მნიშვნელობებს გამომავალ სიტყვათა სიმრავლიდან.

აღვნიშნოთ ავტომატის შიგა მდგომარეობის ანუ ანბანური მდგომარეობის შესაძლო სიმრავლე $C=\{c_0, c_1, c_2, ..., c_e\}$. სასრული ავტომატის მოცემისათვის გამოიყენება ძირითადად სამი ხერხი: ანალიზური, გეომეტრიული და ცხრილური. ყველა შემთხვევაში საჭიროა ცნობილი იყოს x, y და c.

სასრული ავტომატის ფუნქციონირების კანონები განისაზღვრება ორი ანბანური ოპერატორით: გადასასვლელი f ფუნქციით და გამოსასვლელის φ ფუნქციით. დაუშვათ დროის t მომენტში ავტომატი იმყოფება $c(t)$ მდგომარეობაში და მის შესასვლელზე მიეწოდა $x(t)$ სიგნალი. f გადასასვლელი ფუნქცია იძლევა შესაძლებლობას განისაზღვროს ავტომატის $c(t+1)$ მდგომარეობა დროის $t+1$ მომენტში შესასვლელზე $x(t)$ სიგნალის მიწოდების დროს:

$$c(t+1)=f[c(t), x(t)] \text{ ან } c(t)=f[c(t-1), x(t)].$$

გამოსასვლელის φ ფუნქცია იძლევა საშუალებას განისაზღვროს გამოსასვლელი $y(t)$ სიგნალი, შესასვლელი $x(t)$ სიგნალის და ავტომატის $c(t)$ მდგომარეობის საშუალებით: $y(t)=\varphi[c(t), x(t)]$.

ავტომატის ქცევის ანალიზისათვის აუცილებლად მოიცემა მისი საწყისი მდგომარეობა.

ავტომატი A ითვლება მოცემულად, თუ მოცემულია შემდეგ სიმრავლეთა ერთობლიობა: $A=\{x, y, c, c_0, F\}$, სადაც F არის C სიმრავლის თავის თავში ასახვა. მოცემული ასახვა ნებისმიერი $c \in C$ და $x \in X$ ელემენტისათვის აყენებს შესატყვისობაში $c_q \in C$ მდგომარეობას, რომელიც განსაზღვრავს $f(c, x)$ გადასასვლელ ფუნქციას და y გამოსასვლელს, რომელიც განსაზღვრავს $\varphi(c, x)$ გამოსასვლელ ფუნქციას. $f(c, x)$ და $\varphi(c, x)$ ჩანაწერში t დრო არაა გათვალისწინებული. ავტომატის ასეთ მოცემას ეწოდება ანალიზური ხერხი.

ახლა განვიხილოთ ავტომატის მოცემის ცხრილური ხერხი. ასეთ ხერხს მეორენაირად უწოდებენ მატრიცულს. განვიხილოთ ცხრილი, რომლის სტრიქონები შეესატყვისება შესასვლელ სიგნალებს, ხოლო სვეტები — ავტომატის მდგომარეობას.

უჯრედებში, რომლებსაც იძლევა სტრიქონებისა და სვეტების თანაკვეთა ჩაიწერება მდგომარეობა, რომელშიც გადადის ავტომატი სტრიქონში მითითებული სიგნალის მოქმედებით სვეტში მითითებული მდგომარეობიდან. ასეთი სახით მიღებულ ცხრილს ეწოდება გადასასვლელების ცხრილი. მოვიყვანოთ ცხრილის აგების მაგალითი A ავტომატისათვის, რომელსაც აქვს $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ შესასვლელთა სიმრავლე და $C=\{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ მდგომარეობათა სიმრავლე (ცხრილი 6).

ცხრილი 6

მდგომარეობა / შემა-ვალი სიგნალი	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	C_1	C_2	C_3	C_4	C_4
x_2	C_1	C_3	C_3	C_4	C_3
x_3	C_0	C_2	C_4	C_3	C_3

ახლა ავაგოთ გამოსასვლელთა ცხრილი. მოცემულ ცხრილში სტრიქონები შეესაბამება შემავალ სიგნალებს, ხოლო სვეტები ავტომატის მდგომარეობას. სტრიქონების და სვეტების თანაკვეთის უჯრედებში ჩაიწერება გამოსასვლელები, რომლებიც შეესაბამება ავტომატის მდგომარეობას და მითითებულია სტრიქონებში. მოვიყვანოთ გამოსასვლელის ცხრილის მაგალითი ავტომატისათვის, რომლის შესასვლელთა სიმრავლეა $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ ხოლო მდგომარეობათა სიმრავლეა $C=\{c_0, c_1, c_2, c_3, c_4\}$ (ცხრილი 7).

ცხრილი 7

მდგომარეობა / შემავალი სიგნალი	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	y_0	y_1	y_1	y_2	y_3
x_2	y_1	y_2	y_0	y_1	y_2
x_3	y_3	y_1	y_2	y_3	y_3

მოცემული ორი ცხრილი შეიძლება გავაერთიანოთ ერთ ცხრილად, რომელშიც მოცემული იქნება ავტომატის გადასასვლელიცა და გამოსასვლელიც (ცხრილი 8).

ცხრილი 8

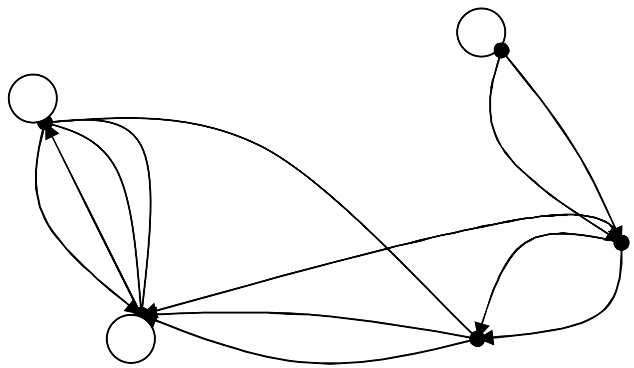
მდგომარეობა / შემავალი სიგნალი	C_0	C_1	C_2	C_3	C_4
x_1	C_1 / y_0	C_2 / y_1	C_3 / y_1	C_4 / y_2	C_4 / y_3
x_2	C_1 / y_1	C_3 / y_2	C_3 / y_0	C_4 / y_1	C_3 / y_2
x_3	C_0 / y_3	C_2 / y_1	C_4 / y_2	C_3 / y_3	C_3 / y_3

განვიხილოთ მოყვანილი ცხრილებით მოცემული ავტომატის ფუნქციონირების რამდენიმე ფრაგმენტი. დაუშვათ, შესასვლელზე მიწოდებულია სიგნალი x_1. ამ სიგნალის ზემოქმედებით ავტომატი გადადის C_0 მდგომარეობიდან C_1–ში და გამოსასვლელზე აღიძვრება y_0 სიგნალი. თუ ამის შემდეგ შესასვლელს მიეწოდება x_2 სიგნალი, მაშინ ავტომატი გადავა C_3 მდგომარეობაში და გამოსასვლელზე წარმოიქმნება y_2 სიგნალი. დაუშვათ შესასვლელზე მიეწოდა x_3 სიგნალი, მაშინ ავტომატი გადავა C_3 მდგომარეობაში და გამოსასვლელზე წარმოიქმნება

სიგნალი y_2. დაუშვათ შესასვლელზე მიეწოდა x_3 სიგნალი, მაშინ ავტომატი გადავა C_3 მდგომარეობაში და გამოსასვლელზე აღიძვრება y_3 სიგნალი.

ახლა დაუშვათ, რომ დასაწყისში შესასვლელზე მიეწოდება თანამიმდევრობით ორი x_2 სიგნალი, მაშინ გამოსასვლელზე გვექნება y_2 სიგნალი. თუ ამის შემდეგ შესასვლელზე მიეწოდება ორი x_1 სიგნალი, მაშინ გამოსასვლელზე აღიძვრება y_3 სიგნალი, ანალოგიურად შეიძლება ვიპოვოთ ავტომატის რეაქცია შესასვლელი სიგნალების ნებისმიერი თანამიმდევრობის განაწილების დროს.

ახლა განვიხილოთ ავტომატის მოცემის გეომეტრიული ანუ გრაფული ხერხი. გრაფის მწვერვალები ასახავენ ავტომატის შიგა მდგომარეობას, ხოლო მისი რკალები — შემავალ სიგნალებს, რომლებიც განსაზღვრავენ ავტომატის გადასვლას შესაბამის მდგომარეობაში, რომლის დროსაც აღიძვრება გამოსავალი სიგნალები. მოვიყვანოთ ცხრილი 8-ის მიერ მოცემული ავტომატის გრაფის მაგალითი (ნახ. 7).



ნახ. 7.

თუ ავტომატში გადასვლები სრულდება დროის ტოლ შუალედებში, მაშინ მას ეწოდება სინქრონული.

ავტომატებს, რომელთა გამოსასვლელი სიგნალები ცალსახად განისაზღვრებიან შიგა მდგომარეობით და არ არიან დამოკიდებული შესასვლელ სიგნალებზე, მურის ავტომატი ეწოდებათ.

თუ ავტომატში გამოსასვლელი სიგნალები განისაზღვრებიან არა მარტო შიგა მდგომარეობით, არამედ შემავალი სიგნალებითაც, მათ მილის ავტომატები ეწოდებათ.

მურის ავტომატის შიგა მდგომარეობის სიმრავლე აღვნიშნოთ $V=\{v_0,v_1,v_2,\dots,v_n\}$ მაშინ მურის ავტომატის გადასვლების ფუნქცია ჩაიწერება შემდეგნაირად: $v(t+1)=f\left[v(t),x(t)\right]$

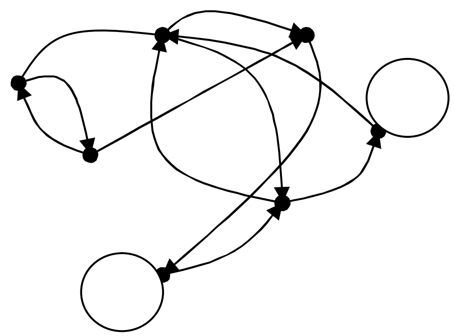
ხოლო ავტომატის გამოსასვლელების ფუნქციას ექნება სახე: $y(t)=\varphi\left[v(t)\right]$

ისევე როგორც მილის ავტომატი, მურის ავტომატიც შეიძლება მოცემული იქნას გადასასვლელებისა და გამოსასვლელების ცხრილების საშუალებით, რომელიც აიგება ანალოგიურად, ხოლო განსხვავება მდგომარეობს იმაში, რომ მურის ავტომატის გადასასვლელებისა და გამოსასვლელების ცხრილში, თითოეული შიგა მდგომარეობის თავზე მიეთითება გამოსასვლელი სიგნალი, რომელსაც გასცემს ავტომატი გარკვეულ მოცემულ მდგომარეობაში. მაგალითისათვის მოვიყვანოთ ავტომატის შემდეგი ცხრილი (ცხრილი 9).

ცხრილი 9

გამოსასვლელი	y_1	y_2	y_2	y_1	y_3	y_3	y_2
მდგომარეობა / შესასვლელი	v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
x_1	v_3	v_4	v_6	v_2	v_3	v_6	v_5
x_2	v_1	v_3	v_2	v_0	v_4	v_1	v_0

მე-8 ნახაზზე მოცემულია მურის ავტომატის გრაფი, რომელიც შეესაბამება ცხრილ-8-ს.



ნახ.8