ალექსანდრე დათუაშვილი

მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ეტაპები XX საუკუნეში

წარმოდგენილია დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი
თბილისი, 0175, საქართველო
თვე, 2008 წელი

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

სამშენებლო ფაკულტეტი

ჩვენ, ქვემორე ხელისმომწერნი ვადასტურებთ, რომ გავეცანით ალექსანდრე დათუაშვილის მიერ შესრულებულ სადისერტაციო ნაშრომს დასახელებით: „მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ეტაპები XX საუკუნეში" და ვაძლევთ რეკომენდაციას საქარველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის სადისერტაციო საბჭოში მის განხილვას დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად.

თარიღი

ხელმძღვანელი: თამაზ ბაციკაძე

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

რეცენზენტი:

საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი

2008 წელი

ავტორი: ალექსანდრე დათუაშვილი

დასახელება: მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ეტაპები XX საუკუნეში

ფაკულტეტი : სამშენებლო ფაკულტეტი

ხარისხი: დოქტორი

სხდომა ჩატარდა: თარიღი

ინდივიდუალური პიროვნებების ან ინსტიტუტების მიერ ზემომოყვანილი დასახელების დისერტაციის გაცნობის მიზნით მოთხოვნის შემთხვევაში მისი არაკომერციული მიზნებით კოპირებისა და გავრცელების უფლება მინიჭებული აქვს საქართველოს ტექნიკურ უნივერსიტეტს.

ავტორის ხელმოწერა

რეზიუმე

მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკა დღეისათვის ერთ-ერთი წამყვანი დარგია, რომელიც გამოიყენება თითქმის ყველა საინჟინრო მიმართულებაში. განსაკუთრებით კარგადაა დამუშავებული დრეკადობის თეორიის ის ნაწილი, სადაც მეცნიერების მიღწევები დაინერგა XX საუკუნეში თხელკედლიანი სივრცითი კონსტრუქციების გამოყენებით მანქანათმშენებლობაში, ავიამშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, ნაგებობათა მშენებლობაში და ტექნიკის სხვა დარგებში, ასევე სამრეწველო, სასოფლო-სამეურნეო, სავაჭრო, კულტურულ-სპორტული ნაგებობების გადახურვის რაციონალური გადაწყვეტის საქმეში.

ნაშრომში დამუშავებულია დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების ისტორია. ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და მისი განვითარების ისტორია, ტექნიკის სხვადასხვა დარგში მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის გამოყენების ისტორია და განვითარების ეტაპები მეოცე საუკუნეში.

გადმოცემულია დრეკადობის წრფივი თეორიის ისტორია. აღნიშნულია, რომ დრეკადი ტანის წონასწორობის ამოცანაში, როდესაც არ არსებობენ მასათა ძალები, მოინახება ზოგადი გამოსახულებები, რომლებიც შესაძლებლობისდაგვარად აკმაყოფილებენ ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებს და ისე არიან აგებული, რომ დრეკადობის თეორიის განტოლებები სრულდებოდეს ამ განტოლებების ძალით. დრეკადობის თეორიის განტოლების ამოხსნის ასეთი წარმოდგენა მოცემული იქნა პ. პაპკოვიჩის მიერ და რამდენადმე გვიან გ. ნეიბერის მიერ.

მიჩნეულია, რომ ამონახსნში, ისევე როგორც ზოგადი ამონახსნების სხვა ფორმებში, საჭიროა ვხედავდეთ დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სასარგებლო დამხმარე საშუალებას, რომელიც დაუშვებს ლაპლასის განტოლებების კლასიკური კერძო ამონახსნების უშუალო გამოყენებას. კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის აგებისას მეოთხე ჰარმონიული ფუნქციის შენარჩუნება აადვილებს ამ ამონახსენთა არჩევას, ამიტომ არ საჭიროებს მასზე უარის თქმას.

აღწერილია სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანების ისტორია. როგორც ცნობილია, პრიზმული ღეროს თავისუფალი გრეხის შესახებ ამოცანა დაიყვანება ჰარმონიულ პრობლემაზე, რომლის ამოხსნათა მეთოდები კარგადაა შემუშავებული. ადრეული ნაშრომები ღეროების გრეხაზე მიძღვნილია ამ ამოცანის შეკრული სახით ან ტრიგონომეტრიული მწკრივების საშუალებით ამოხსნისადმი; მათ მიეკუთვნება ბ. გალიორკინის სტატიები, რომლებშიც გამოკვლეულია პრიზმის გრეხა, რომელსაც ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის სახის განივი კვეთი აქვს (1919) და პარაბოლური განივი კვეთის პრიზმები (1924); ამოცანა რიგი კვეთების გრეხის შესახებ, რომლებიც შემოსაზღვრულია ალგებრული მრუდებით, გადაწყვეტილია დ. ბენოვის (1935, 1937) და დ. გავრას (1939) ნაშრომებში; მოგვიანებით პარაბოლური პრიზმების გრეხით დაკავებული იყო ვ. ბლოხი (1959). მთლიანი ან ღრუ ლილვების გრეხისას რადიალური ბზარის გავლენა შესწავლილია ა.ლოკშინის (1928) და ვ. ლისკოვის (1930) სტატიებში. გრეხის თეორიის

ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდებს (ექსპერიმენტალური მეთოდების ჩათვლით) მოიცავს ა. დინიკის მონოგრაფია (1938).

1925 წელს გ. კოლოსოვმა და დ. გავრმა გრეხის ამოცანის ამოხსნისას პირველად გამოიყენეს კომპლექსური ცვლადები; მათ განიხილეს ამოცანა მცირე ცენტრალური კუთხით არაწრიული სექტორის გრეხის შესახებ. ამ მიმართულებით ფუნდამენტალური შედეგები მიიღო ნ. მუსხელიშვილმა (1929), რომელმაც აჩვენა, რომ ცალადბმული და ორადბმული მიდამოს გრეხის ამოცანა, რომელიც ასახავს მოცემულ მიდამოს შესაბამისად წრესა და წრიულ რგოლზე, დაიყვანება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის მოძებნაზე. პრიზმული ღეროების გრეხის ამოცანების ამოხსნისას კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდებს იყენებდნენ კვლევით მუშაობაში დ. ავაზაშვილი (1940), ა. ბატირევი (1953), ხ. მუშტარი (1938), ა.უგოდჩიკოვი (1956) და სხვა მეცნიერები.

რ. კუზმინმა (1946) გამოიყენა კონფორმული ანასახი სხვა ფორმაში; მან დასაგრეხი ღეროს სიხისტის უშუალო გამოთვლისათვის მიიღო მოხერხებული ფორმულა, რომელმაც საშუალება მოგვცა გამოგვეთვალა სიხისტე იმ პროფილებისათვის, რომელთა კონტური შეიცავს კუთხის წერტილებს. შემდგომში ამ საკითხებზე მუშაობდა პ.კუფარიოვი, რომლის მეთოდი ო. ბაბაკოვმა (1954) გამოიყენა ზეტური პროფილის გრეხის განხილვისას.

მათემატიკური დრეკადობის თეორიის შერეულ ამოცანებად ჩვეულებრივ დრეკადი წონასწორობის ისეთ ამოცანებს გულისხმობენ, როცა სხეულის ზედაპირზე განლაგებულია სხვადასხვაგვარი ტიპის სასაზღვრო პირობების გამყოფი ხაზები. თუ განსახილველი დრეკადი სხეულის ზედაპირი შედგება რამდენიმე გლუვი წახნაგისაგან, მაშინ შეიძლება წარმოგვიდგეს შერეული ამოცანის ხარისხობრივად განსხვავებული ორი ძირითადი ვარიანტი.

მომდევნო წლებში დრეკადობის თეორიის ზოგადი განტოლებების გამოყენებაზე და კერძოდ, პაპკოვიჩ-ნეიბერის ფუნქციის გამოყენებაზე დაფუძნებული მეთოდების განვითარებამ, შესაძლებლობა მოგვცა ნახევარსივრცის დრეკადი წონასწორობის ბევრი საერთო შერეული ამოცანა დაგვეყვანა პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანების ზოგიერთ კლასებამდე. პოტენციალის თეორიის მსგავსი ამოცანების მეთოდურმა დამუშავებამ საშუალება მოგვცა ზუსტად ამოგვეხსნა ზოგიერთი საკონტაქტო და მსგავსი შერეული ამოცანები. ამ მეთოდებიდან ძირითადები არიან: სფეროიდალური და ელიფსოიდალური კოორდინატების გამოყენება (ა. ლურიე); გრინის ფუნქციის აგება და გამოყენება (ლ. გალინი, მ. ლეონოვი, 1953); ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი (ი. შტაერმანი, ვ. მოსაკოვსკი, 1953); ტოროიდული კოორდინატებისა და ინტეგრალური გარდაქმნების გამოყენება (ი.უფლიანდი 1956, 1957); კომპლექსური პოტენციალების მეთოდი (მ.როსტოვცევი, 1953, 1957).

დამუშავებულია თხელკედლიან სივრცით სისტემებში მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ისტორია.

კონკრეტული შინაარსის პირველი შედეგები, რომლებიც განეკუთვნება ბრტყელი პროფილების წონასწორობას მიღებული იყო გ.კოლოსოვისა და ნ.მუსხელიშვილის მიერ.

6. მუსხელიშვილმა მოგვცა პირველი და მეორე ძირითადი ამოცანების მარტივი ამონახსნი წრის, წრიული რგოლისა და უსასრულო სიბრტყისთვის წრიული ნახვრეტით. დამუშავებული იქნა მრავალი კერძო მაგალითი სხვადასხვა სახის გარე ზემოქმედებებისათვის. ამგვარი სახის არეებისათვის არ მოითხოვება წინასწარი კონფორმული ასახვა. გამოიყენა რა კონფორმული ანასახი მუსხელიშვილმა გადაწყვიტა იმ დროისათვის რთული ამოცანა მთლიანი ელიფსის წონასწორობის შესახებ.

ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდით იყო გამოკვლეული ამოცანა თანაფოკუსური ელიფსური რგოლის შესახებ (ა. კალანდია, 1953). ამ ამოცანის ეფექტური ამოხსნის ალგორითმი კიდევ უფრო ადრე მითითებული იქნა მ. შერემეტიევის მიერ, რომელიც იყენებდა ფუნქციონალური განტოლებების მეთოდს კონფორმულ ასახვებთან ნაერთში.

ჩატარებულ გამოკვლევათა ისტორიული მიმოხილვისა და ანალიზის საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

– სამეცნიერო ლიტერატურაში პრაქტიკულად არ არის განხილული თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების გაანგარიშების მეთოდების ისტორიული ანალიზი;
– ზოგიერთი შრომების გამოკლებით, განზოგადოებული იმპულსური ფუნქციები გამოიყენებიან მხოლოდ დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერისათვის, მაგრამ არა მათი ამოხსნების მისაღებად. ამავე დროს წყვეტილი ფუნქციის შემოღება იძლევა გაანგარიშების ისეთი, პრინციპულად ახალი მეთოდების მიღების საშუალებას, რომლებიც აფართოებენ ამოხსნადი ამოცანების კლასს და ანზოგადებენ ყველა ამოხსნად ამოცანებს ერთიან მეთოდოლოგიურ საფუძველზე. დრეკადობის წრფივი თეორიის ისტორიის საფუძველზე დღეისათვის კიდევ უფრო მეტი ისტორიული მასალის გადმოცემა და მისი ანალიზია შესასრულებელი;
– სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანებში პრიზმული ღეროს თავისუფალი გრეხის ამოცანა დაიყვანება ჰარმონიულ პრობლემაზე, რომლის ამონახსნთა მეთოდები კარგადაა დამუშავებული და გაანალიზებული;
– დრეკადი პრიზმული ძელების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დადგენა, როდესაც ძელის ბოლოებზე მოქმედებს ნებისმიერ ძალთა სისტემა, ასევე წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ერთ-ერთ ძირითად და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. მათემატიკური თვალსაზრისით იგი არ არის ბოლომდე გადაწყვეტილი, თუმცა ე.წ. „სენ-ვენანის პრინციპის“ დახმარებით ხერხდება ამ ამოცანის გადაწყვეტა, რომელიც მიახლოებითია და არ შეიძლება ჩაითვალოს ზუსტად. სწორედ ამგვარ კლასიკურ მიდგომადაა ჩათვლილი სენ-ვენანის მოსაზრება, რომელიც ლიტერატურაში დამკვიდრდა „სენ-ვენანის პრინციპის“, კერძოდ კი სენ-ვენანის ნახევრად შებრუნებული მეთოდის საშუალებით.
– მუსხელიშვილის გამოკვლევები პრობლემების ფართო კლასს მოიცავს, მისმა შრომებმა დიდი გავლენა მოახდინეს მექანიკისა და მათემატიკის მთელი რიგი მიმართულებების შემდგომ განვითარებაზე.

Summary

Nowadays the mechanics of elastic solid body is one of the leading fields. It is widely used in all engineering sciences.

The section of the theory of elasticity is particularly well developed where scientific achievements have been implemented in the XX-th century, in particular thin walled space constructions were used in aircraft building, mechanical engineering, ship building, civil engineering and in other fields of technique and also in roof constructions of industrial, agricultural, trade, entertaining and sport building.

The present work concerns the history of spatial problems of the theory of elasticity, as well as, the history of plane problems solution and its development, the history of using the mechanics of elastic solid body in various scientific fields and the stages of its development in the XX-th century.

The history of the theory of linear elasticity is given. It is noted that in the problem of solid body equilibrium, in the absence of mass forces, general expressions can be found which, as far as possible, satisfy common differential equations and are set up in such a way that the equations of elastic theory be solved by these equations. Such representation of the solution of the equation of the theory of elasticity was given by P.Papkovich and later by G.Neibere.

We think that in solution, as well as, in other forms of general solutions we have to presume the useful additional means of solution of boundary problems of the theory of elasticity which will allow using of classical partial solutions of Laplace equation. The preservation of the fourth harmonious function when constructing the solution of the concrete problem simplifies their choosing, therefore it should not be neglected.

By using the theory of elasticity in isotropic solid we come to Galiorkin-Busineski solution.

The work also describes the history of Sen-Venan and Almanz problems. As it is well known the problem of prismatic rod twist is reduced to harmonious problem the solution methods of which are well developed. Early works about rod twist concerns the solution of this problem in closed form or with trigonometrical series. Among them are the articles by B.Galiorkin, in which twisting of prisms having cross-section of isosceles right-angled triangle form (1919) and prisms with parabolic cross-sections (1924) are investigated. The problem about twisting of some cross-sections limited by algebraic curves was solved in the works by D.Benov (1935, 1937) and D.Gavre (1939); later the problem of parabolic prisms was investigated by V.Block (1959). The study of the effect of radial crack at twisting of solid and hollow shafts was given in the works by A.Lokshin (1928) and V.Liskov (1930). Also, A.Dinnik's monograph is dedicated to different methods (including experimental ones) of solution of twisting theory problems.

In 1925 G.Kolosov and D.Gavre were the first who used complex variables when solving the problem of twisting. They considered the problem of noncircular sector twisting by small central angle. In this field fundamental results were obtained by N.Muskhelishvili (1929) who discovered that the problem of twisting of single- and double-brace medium which represents the given medium on circle and circular ring, respectively, is reduced to searching of the function of complex variable. When solving the problems of prismatic bar twisting the methods of complex variable function theory were used for different profiles of such bars by D.Avazashvili (1940), A.Batirev (1953), Kh.Mushtar (1938), A.Ugodchikov (1959) and others.

R.Kuzmin (1946) used the conformal image in other form. He was the first who received a convenient formula for direct calculation of twisted bar rigidity which allowed to calculate rigidity for the profiles, the contour of which contain angle points. Later, P.Kufariov was working on this problem whose method was used by O.Babakov (1954) while considering twisting of z-profile.

When discussing mathematical elasticity problems, we generally mean such problems of elastic equilibrium when different type lines separating boundary conditions are distributed on the surface of the body. If the surface of the above given elastic body consists of several smooth faces then qualitatively differing two main versions of the mixed problem are received.

In the following years the development of the methods based on using of common equations of the theory of elasticity, particularly on using of Papkovich-Neibere function enabled to reduce many general mixed problems of half-space elastic equilibrium to some classes of mixed problems of potential theory. The elaboration of the problems analogous to potential theory allowed precise solution of some contact and complex problems. The basic of these methods are: use of spheroidal and ellipsoidal coordinates (A.Lourie); plotting up and use of Green's function (L.Galin, M.Leonov, 1953); method of integral equation (I.Shtaermann, V.Mosakovski, 1953); use of toroidal coordinates and integral transformations (I.Yuflyand, 1956, 1957); method of complex potentials (M.Rostovtsev, 1953, 1957).

The history of development of the mechanics of solid elastic body in thin walled spatial systems is given.

The first concrete results in equilibrium of plane profiles were received by G.Kolosov and N.Muskhelishvili.

N.Muskhelishvili elaborated the simple solution of the first and the second main problems for circle, circular ring and infinite plane with circular hole. A number of particular examples have been worked out for different external effects. For such areas preliminary conformal depiction is not necessary. Using conformal depiction N.Muskhelishvili solved a very complicated, for that time, problem about equilibrium of continuous ellipse.

By the method of qualitative series the problem of co-focus elliptic ring was investigated (A.Kalandia, 1953). Earlier the algorithm of effective solution of this problem was given by M.Sheremetiev who used the method of functional equations together with conformal depiction.

On the basis of historical review and analysis of the carried out researches the following solutions can be done:

- In scientific literature there practically is not considered the historical analysis of calculation methods of thin walled spatial systems;
- Except some works, the generalized pulse functions are used only for writing down differential equations but not for their solution. At the same time the introduction of interrupted function gives essentially new methods of calculation which widen the class of solvable problems and generalize them on uniform methodological basis. On the basis of the history of linear elasticity theory much more historical material can be compiled and analyzed.
- In the problems of Sen-Venan and Almanz the problem of free twist of prismatic bar is reduced to harmonious problem, the methods of their solution being well developed and analyzed.
- The establishment of stress-strained state of elastic prismatic beams when arbitrary force system is acting upon the beam ends, also represents one of the basic and complicated mathematical problem of the theory of elasticity. From the

mathematical point of view it is not solved to the end, though by means of the so-called "Sen-Venan Principle" we can solve this problem which is approximated and cannot be considered as precise. The idea by Sen-Venan is considered as classical approach which in literature is establishes by means of "Sen-Venan principle", particularly, by semi inverted method of Sen-Venan.

- The researches by Muskhelishvili contain a wide class of problems. His works had a great influence on further development of a number of directions of mathematics and mechanics.

შინაარსი

ნახაზების ნუსხა

შესავალი

მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკა დღეისათვის ერთ-ერთი წამყვანი დარგია, რომელიც გამოიყენება თითქმის ყველა საინჟინრო მიმართულებაში და დიდად მნიშვნელოვანია მისი განვითარებისათვის. განსაკუთრებით კარგადაა დამუშავებული დრეკადობის თეორიის ის ნაწილი, სადაც მეცნიერების მიღწევები დაინერგა XX საუკუნეში, კერძოდ თხელკედლიანი სივრცითი კონსტრუქციების გამოყენებით მანქანათმშენებლობაში, ავიამშენებლობაში, გემთმშენებლობაში, ნაგებობათა მშენებლობაში და ტექნიკის სხვა დარგებში, ასევე სასოფლო-სამეურნეო, სავაჭრო, კულტურულ-სპორტული ნაგებობების გადახურვის რაციონალურად გადაწყვეტის საქმეში. თანამედროვე დიდმალიანი ნაგებობების მშენებლობა და მაღალი სიმტკიცის მახასიათებლების მქონე მცირემოდულიანი მასალების პრაქტიკაში დანერგვას მივყავართ თხელკედლიანი კონსტრუქციების გაანგარიშების დროს სისქესთან შედარებით საკმაოდ დიდი ჩაღუნვების გათვალისწინების აუცილებლობამდე. მრეწველობისა და მშენებლობის სხვადასხვა სფეროს განვითარება დაკავშირებულია არსებულის დახვეწასა და ისეთი ახალი კონსტრუქციების შექმნასთან, რომლებიც შეიცავენ: გისოსებს, ფირფიტებს და ღეროებს, შემაგრებით, ტეხვებით, ხვრეტებით, ჭრილებით, წერტილოვანი საყრდენებით.

კონსტრუქციებში გეომეტრიული და ფიზიკური პარამეტრების არარეგულარობა იწვევს ძაბვების მნიშვნელოვან კონცენტრაციას და ქმნის ბზარების ან პლასტიკური დეფორმაციების გავრცელების საშიშ ზონებს. უმეტეს შემთხვევებში მათი მზიდუნარიანობა განისაზღვრება სიმტკიცის პირობებით ან ძაბვების მდგრადობის დაკარგვით კონცენტრაციის ზონაში. რეგულარობის დარღვევის სხვა სახეებს განეკუთვნება ზედაპირის ტეხვა, რასაც ადგილი აქვს ნაოჭოვან და მრავალტალღოვან გადახურვებში. დაძაბულ მდგომარეობაზე გავლენით ისინი წიბოების ანალოგიურნი არიან.

რეგულარობის დარღვევის ადგილებში ძაბვათა კონცენტრაციის ზონები (წიბოს ბოლო, დისკრეტული ბმები) არსებით გავლენას ახდენენ თხელკედლიანი კონსტრუქციების ზიდვის უნარზე და

მდგრადობაზე. ამ დროს ტრადიციული ანალიზები და რიცხვითი მეთოდები წიბოვანი თხელკედლიანი კონსტრუქციების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის გამოსაკვლევად ნაკლებად ეფექტურია. ამიტომ საჭირო ხდება მაღალი კლასის ამოცანების ამოხსნის ახალი ეფექტური მეთოდების შემუშავება. სწორედ ზემოთაღნიშნულის გამო აუცილებელია მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის ზედმიწევნითი შესწავლა და მისი განვითარების ისტორიის ცოდნა, რომელიც მეტად აქტუალურია. წინამდებარე ნაშრომი ეხება ამ საკითხების განვითა-რების ეტაპებს მეოცე საუკუნეში, როცა ეს მეცნიერება განსაკუთ-რებულ აღმავლობას განიცდიდა.

აქვეა გადმოცემული დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების განხილვა, სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანები, დრეკადი ტანის სტატიკის შერეული სივრცითი ამოცანები, ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდები და მისი განვითარების ეტაპები, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდები და მისი განვითარების ეტაპები მეოცე საუკუნეში, ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ამოცანების გამოკვლევების ძირითადი შედეგები.

დამუშავებულია დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების კვლევის ისტორია. ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდების და მისი განვითარების ისტორია, ტექნიკის სხვადასხვა დარგში მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის გამოყენების ისტორია და განვითარების ეტაპები მეოცე საუკუნეში.

ნაშრომის პრაქტიკული ღირებულება მდგომარეობს იმაში, რომ მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ეტაპებს მეოცე საუკუნეში, რომელიც გადმოცემულია ისტორიულ დონეზე, დიდი სარგებლობა ექნება ამ საკითხებით დაინტერესებულთა შორის, რადგან მისი გამოყენება შესაძლებელია ფიზიკა-მათემატიკისა და ტექნიკის განვითარების ნებისმიერი დარგის სპეციალისტებისთვის, რომლის რეალიზებაც აუცილებელია აღნიშნულ დარგებში.

შედეგების ეფექტურობა განპირობებულია, იმით, რომ ყველა აღნიშნული საკითხი ეყრდნობა მეოცე საუკუნეში გამოქვეყნებულ სხვა-დასხვა ავტორის მიერ მიღებული ისტორიული მასალიდან, ასევე

მრავალი საარქივო მასალიდან და დამაკმაყოფილებელია თანა-დამთხვევით.

<u>**ნაშრომის აპრობაცია.**</u> დისერტაციის ძირითადი შედეგები მოხსე-ნებულ იქნა:

– საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის კათედრის სამეცნიერო სემინარზე (თბილისი, 2005 - 2006წ.);
– საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო მექანიკის და სეისმომედეგობის სამეცნიერო სემინარზე (თბილისი, 2006წ.);
– საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის, თეორიული მექანიკის, სამშენებლო მექანიკის და სეისმომედეგობის კათედრების გაფართოებულ სამეცნიერო სემინარზე (თბილისი, 2006წ.);
– საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო მექანიკისა და ნაგებობათა სეისმომედეგობის, მასალათა გამძლეობისა და დრეკადობის თეორიის და ხიდებისა და გვირაბების კათედრების გაფართოებულ სხდომაზე (თბილისი, 2006წ. ოქტომბერი).

1. ლიტერატურის მიმოხილვა

1.1. დრეკადობის წრფივი თეორიის ისტორია

1.1.1. ზოგადი ამონახსნები და არსებობის თეორემები

დრეკადი ტანის წონასწორობის ამოცანაში, როდესაც არ არსებობენ მასათა ძალები, მოინახება ზოგადი გამოსახულებები (გადაადგილებების ან ძაბვების), რომლებიც შესაძლებლობისდაგვარად აკმაყოფილებენ მარტივ დიფერენციალურ განტოლებებს და ისე არიან აგებული, რომ დრეკადობის თეორიის განტოლებები სრულდებოდეს ამ მარტივი განტოლებების ძალით. „მარტივთა" როლს თამაშობენ ლაპლასისა და ბიჰარმონიული განტოლებები; ამასთან სასურველია ფუნქციათა უმცირესი რიცხვი. ზოგადი ამონახსნების ცოდნა საშუალებას იძლევა დრეკადობის თეორიის განტოლებების კერძო ამონახსნების შედგენისას გამოვიყენოთ კარგად ცნობილი „კატალოგები" „მარტივი" განტოლებების ამონახსნებისა ამა თუ იმ კოორდინატებში; დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანები, უმარტივესთა (ნახევარსივრცე, ბრუნვითი ტანის გრეხა და სხვა) გამოკლებით, ვერ დაიყვანება, დირიხლესა და ნეიმანის ტიპის ამოცანებზე ლაპლასის განტოლებისათვის. შეზღუდვა, როდესაც არ გვაქვს მასათა ძალები, არ არის არსებითი, რადგან კერძო ამონახსნის აგება, რომელიც შეესაბამება ამ ძალებს, შესაძლებელია ზოგად შემთხვევაში და ადვილად სრულდება მათი კერძო მოცემულობათათვის (წონა, ცენტრიდანული ძალები და ა.შ.). ადრეული გამოკვლევების მიმოხილვა ზოგადი ამონახსნების მიხედვით მოგვცა პ. პაპკოვიჩმა (1937) [1]; მათი აგების ერთიანი ხერხი, დაფუძნებული ძაბვის ფუნქციის ტენზორის გამოყენებაზე, შემოგვთავაზა ი. კრუტკოვმა (1949) [2].

ზოგადი ამონახსნების აგების ამოცანაზე ყურადღება იქნა მიპყრობილი 1930 წელს გამოქვეყნებული ბ. გალიორკინის სტატიით [3]. ნაჩვენები იქნა, რომ დრეკადობის თეორიის განტოლებები ძაბვებში ($\hat{T}-$ძაბვათა ტენზორი, σ - მისი პირველი ინვარიანტი)

$$\nabla\hat{T}=0,\quad (1+\nu)\nabla^2\hat{T}+\nabla\nabla\sigma=0\,. \qquad (1)$$

შეიძლება დაკმაყოფილდეს, თუ გამოვსახავთ გადაადგილებათა u ვექტორს ბიჰარმონიული G ვექტორით თანაფარდობით

$$2\mu u = \nabla\nabla \cdot G - 2(1-\nu)\nabla^2 G\,. \tag{2}$$

ეს ამონახსნი იმ მითითებით, რომ მისგან მიიღებიან ადრე ცნობილი შემოთავაზებული იყო უ. ბუსინესკის მიერ ჯერ კიდევ 1889 წელს. პ. პაპკოვიჩმა (1937, 1939) მიუთითა, რომ (2) წარმოადგენს გადაადგილებებში დრეკადობის თეორიის ზოგად ამონახსნს

$$(1-2\nu)\nabla^2 u + \nabla\nabla \cdot u = 0\,. \tag{3}$$

ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ (3) განტოლების სტრუქტურა, მარჯვენა ნაწილში მასათა ძალების არსებობისას იმეორებს (2) ამონახსნის სტრუქტურას. ამიტომ, (2)-ში u ვექტორად დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნის მიღებისას (რომელიც აკმაყოფილებს O ტანის ზედაპირზე სამ პირობას), ჩვენ შეგვიძლია მოველოდეთ, რომ G ვექტორიც შეიძლება დაექვემდებაროს კიდევ სამ პირობას 0-ზე, რაც, როგორც ჩანს ზედმეტია.

გადაადგილებათა ვექტორის პოვნისას ჰარმონიული ვექტორისა და χ სკალარის გრადიენტის ჯამის ფორმით

$$u - 4(1-\nu)B + \nabla\chi\,,\ \ \nabla^2 B = 0\,.$$

(3)-ში ჩასმის შემდეგ, მივდივართ განტოლებამდე $\nabla^2\chi = -2\nabla \cdot B$. მისი ამონახსნი წარმოდგება კერძო ამონახსნის $\chi = -R \cdot B$ ჯამით (R-ით აღნიშნულია ვექტორ-რადიუსი). ასე, რომ

$$\chi = -(R \cdot B + B_0)\,,\ \ u = 4(1-\nu)B - \nabla \cdot (R \cdot B + B_0)\,. \tag{4}$$

დრეკადობის თეორიის განტოლების ამონახსნის ასეთი წარმოდგენა მოცემული იქნა პ. პაპკოვიჩის მიერ (1932) და რამდენამდე გვიან გ. ნეიბერის [4] მიერ. პ. პაპკოვიჩის გადმოცემით, იგი უფრო ადრე ცნობილი იყო გ. გროდსკისათვის. (4) გადაადგილების ვექტორი წარმოდგენილი ჰარმონიული ვექტორის B და ჰარმონიული სკალარის B_0 ჯამით ან ოთხი ჰარმონიული ფუნქციის B_0, $B_s (s = 1,2,3)$ ჯამით, სადაც $B_s - B$-ს პროექციებია დეკარტეს კოორდინატთა სისტემის ღერძებზე. (4) ამონახსნის ჩაწერის ფორმა ეკუთვნის ი. არჟანიხსა [5] და მ. სლობოდიანსკის (1954) და აქვს სახე

$$u = 4(1-\nu)B + R\cdot\nabla B - R\nabla\cdot B. \quad (5)$$

იგი განსხვავდება (4)-გან (როცა $B_0 = 0$) ჰარმონიული ვექტორისაგან ნულის ტოლი დივერგენციით (ანუ ჰარმონიული ვექტორის როტორით). შემოთავაზებული იყო აგრეთვე ამონახსნთა ფორმები, გამოსახული ჰარმონიული ფუნქციებით ნიუტონის პოტენციალებისაგან მოცულობითი ინტეგრალების მეშვეობით; ასეთია ტერ-მკრტიჩიანის მიდგომა (1947)

$$u = 4(1-\nu)B + \frac{1}{2\pi}\nabla\int_D \frac{\nabla\cdot B}{R}d\tau. \quad (6)$$

გადაადგილებათა u ვექტორის ინტეგრალური წარმოდგენა მისი დივერგენციისა და როტორის საშუალებით, აგრეთვე სხეულის ზედაპირზე u-სა და მისი ნორმალური წარმოებულის $\partial u/\partial n$ მნიშვნელობები, მოცემულია ი. არჟანიხის მიერ.

რამდენადაც O სხეულის ზედაპირზე გვეძლევა მხოლოდ სამი სასაზღვრო პირობა, მიიჩნევა დასაშვებად (4) ზოგადი ამონახსნის გამოსახულებაში შენარჩუნდეს მხოლოდ სამი ჰარმონიული ფუნქცია, უკუვაგდებთ რა მასში, მაგალითად B_0-ს ან ერთერთს B_s ფუნქციათაგან (გ. ნეიბერი). ამ საკითხს განიხილავდა პ. პაპკოვიჩი (1939) და უფრო დაწვრილებით მ. სლობოდიანსკი (1954) [6].

B_0-ის ჩართვა (4)-ში ზედმეტია, როცა ∇B_0 ვექტორს წარმოვადგენთ რომელიღაც B^* ჰარმონიული ვექტორით, თანაფარდობის მეშვეობით

$$\nabla B_0 = 4(1-\nu)B^* - \nabla R\cdot B^*. \quad (7)$$

მაგრამ მაშინ $\nabla\cdot B^* = 0$, $\nabla X B^* = 0$, ისე რომ $B^* = \nabla\theta$, $\nabla^2\theta = 0$ და თანაფარდობა (7) ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$B_2 = 4(1-\nu)\theta - R\frac{\partial\theta}{\partial R} = \sum_{n=0}^{\infty} R^n Y_n(\theta,\lambda).$$

აქ გამოყენებულია B_0 ჰარმონიული ფუნქციის წარმოდგენა შიდა ცალადბმულ მიდამოში ჰარმონიული პოლინომების მწკრივით $R^n Y_n$. მაშინ

$$\theta = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n Y_n}{4(1-\nu)-n}, \quad (8)$$

და როდესაც n=3, ν=0,25, $B_0 = R^3 Y_3$ (7) თანაფარდობა არ შეიძლება დაკმაყოფილდეს $\left(\text{ივარაუდება, რომ } 0 < \nu < \frac{1}{2}\right)$. აქედან, მიიღება რა მხედველობაში კელდიშ-ლავრენტიევის თეორემა სასრულ ცალადბმულ მიდამოში ჰარმონიული ფუნქციის თანაბრად კრებადი ჰარმონიული პოლინომების მწკრივად წარმოდგენის შესახებ, უნდა დავასკვნათ, რომ (7) წარმოდგენა, როცა ν=0,25-ს, შეუძლებელია. უსასრულო მიდამოსათვის დრუთი B_0-ის წარმოდგენაში უნდა შეიცვალოს $n-(n+1)$-ით, მნიშვნელი (8) მწკრივში $4(1-\nu)+n+1$ არ გადაიქცევა ნულად არცერთი მთელი n-სათვის და $0 < \nu < \frac{1}{2}$; (5) ამონახსნი წარმოადგენს ზოგადს სასრული ცალადბმული მიდამოსათვის, ν=0,25 გამონაკლისის გარეშე, ხოლო უსასრულო მიდამოსათვის დრუთი $\nu \neq 0{,}25$-ისას. უფრო ზოგადი ამონახსნები შეიძლება მოვიძიოთ მ. სლობოდიანსკისთან (1954).

მიგვაჩნია, რომ (4) ამონახსნში, ისევე როგორც ზოგადი ამონახსნების სხვა ფორმებში, უნდა ვხედავდეთ დრეკადობის თეორიის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის სასარგებლო დამხმარე საშუალებას, რომელიც დაუშვებს ლაპლასის განტოლებების კლასიკური კერძო ამონახსნების უშუალო გამოყენებას. კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის აგებისას მეოთხე ჰარმონიული ფუნქციის შენარჩუნება აადვილებს ამ ამონახსნთა არჩევას (ა.ი. ლურიე, 1955) [7].

ვ. ბლოხი (1958) [8] გამოდის გადაადგილებათა u ვექტორის ჰარმონიული ვექტორისა და χ სკალარის გრადიენტის ჯამის წარმოდგენიდან. (4)-ის ამონახსნი ბლოხის წარმოდგენაში მოიპოვება $\chi = -(R \cdot B + B_0)$-ისას მიიჩნევს რა, რომ $\chi = -R^2 \nabla \cdot C$, სადაც C – ჰარმონიული ვექტორია, ბლოხი მიდის წარმოდგენამდე

$$u = 2(1-\nu) R \nabla \cdot C - 4(1-\nu) R \times (\nabla \times C) - R^2 \nabla \nabla \cdot C, \tag{9}$$

რომელიც შეიძლება შევავსოთ ჰარმონიული სკალარის გრადიენტითა და ჰარმონიული ვექტორის როტორით. ბლოხის წარმოდგენაში შესულია კიდევ შესაკრებები, რომლებიც გამოსახულია სამი ბრტყელი ჰარმონიული ფუნქციით.

ამონახსნთა ფორმები, მითითებული ი. არჟანიხისა და ფ. ჩურიკოვის მიერ (1953)

$$2\mu u = (1-2\nu)B - \frac{1}{2}\nabla \times (R \times B)\,, \tag{10}$$

არ განსხვავდება არჟანიხისა და სლობოდიანსკის (5)-ისაგან.

უფრო ზოგადი ფორმა აქვს მითითებული ვ. დეევს (1959)

$$2\mu u = \left[(4\nu-3)\beta + 4(1-\nu)(\varepsilon-\delta)\right]B + \beta(\nabla B)\cdot R +$$

$$= \left[2(4\nu-3)\varepsilon - \delta\right]R\cdot\nabla B + \varepsilon R^2 \nabla\nabla\cdot B\,, \tag{11}$$

ამასთან β, ε, δ – მუდმივებია, რომლებიც შეიძლება ნებისმიერად ავარჩიოთ. ამ მუდმივების ჯეროვანი არჩევისას ვუბრუნდებით (4), (5), (9) ამონახსნებს. (11)-ში შედის აგრეთვე ამონახსნი

$$2\mu u = 4(1-\nu)B + \frac{2(4\nu-3)}{7-8\nu}R\nabla\cdot B + \frac{1}{7-8\nu}R\nabla\nabla^2\cdot B, \tag{12}$$

რომელიც გამოსახულია B ჰარმონიული ვექტორით და მისი ∇ დივერგენციით.

ო. ლიავის [9] ცნობილი ამონახსნი აქსიალური სიმეტრიის (z ღერძის გარშემო) შემთხვევისათვის გამომდინარეობს (2)-დან თუ მივიღებთ $G_z = \chi(r,z)$, $G_x = 0$, $G_y = 0$. უფრო ზოგადი წარმოდგენა ცილინდრულ კოორდინატებში (ჰარმონიული და ბიჰარმონიული ფუნქციებით) მოცემულია ს. გუტმანის მიერ (1948) [10].

მრავალბმული D_0 მიდამოსათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია გარედან O_0 ზედაპირით და შიგნიდან O_i ზედაპირებით $(i=1,\cdots,k)$, მთლიანად მდებარეობს D-ში და ერთმანეთთან და O_0-თან საერთო წერტილები არ გააჩნია, გადაადგილების ვექტორი $\nu \neq 0{,}25$-ისას წარმოვადგინოთ სახით (მ. სლობოდიანსკი, 1959)

$$u = u_{(0)} + \sum_{i=1}^{k} u(i), \quad B = B_0 + \sum_{i=1}^{k} B(i)\,,$$

$$u_0 = 4(1-\nu)B_{(0)} - \nabla R\cdot B_{(0)},\,, \quad u_{(i)} = 4(1-\nu)B_i - \nabla R_{(i)}\cdot B_{(i)}\,,$$

სადაც $B_{(i)}$ – ვექტორია, ჰარმონიულ მიდამოში, გარეთა O_i-ის მიმართ, ხოლო $B_{(0)}$ – ჰარმონიული D_0 – ში, ამასთან სათავე Ω_i R_i ვექტორისა განლაგებულია ღრუში, რომელიც შემოსაზღვრულია O_i. ამ ამონახსნის

ფორმა – „სრულია“, თუ სხივი Ω_i-დან კვეთს O_i-ს ერთ წერტილში; ის იქნება „საერთო“, როცა R_i-ლიაპუნოვის ჩაკეტილი ზედაპირია.

ასევე უნდა აღინიშნოს, რომ წრფივი დიფერენციალური განტოლებების სისტემის „ზოგადი ამოხსნების“ აგების ამოცანა

$$\sum_{j=0}^{n} L_{ij} u_j = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

(მასში L_{ij} –წრფივი დიფერენციალური ოპერატორებია მუდმივი კოეფიციენტებით $x_1, x_2, \cdots, x_m$ ცვლადებით) დაიყვანება (ა. ლურიე, 1937; უფრო მოგვიანებით (1953 წ.) რუმინელი მეცნიერი გ. მოიზელი) „პოტენციალების“ $\varphi_s (s = 1,\cdots,n)$ მოძებნამდე, რომლებითაც u_j ამონახსნი გამოისახება თანაფარდობის მეშვეობით, სახით

$$u_j = \sum_{s=1}^{n} M_{sj} \varphi_s \quad (j = 1,2,\cdots,n)$$

სადაც M_{sj} – საძიებელი წრფივი დიფერენციალური ოპერატორებია, ხოლო თითოეული – φ_s პოტენციალთაგან, აკმაყოფილებს ერთი და იმავე დიფერენციალურ განტოლებას

$$K\varphi_s = 0 . \quad (s = 1,2,\cdots,n)$$

ადვილად შეინიშნება, რომ ოპერატორი $K = \left| L_{ij} \right|$ წარმოადგენს ოპერატორების L_{ij} კვადრატული მატრიცის განმსაზღვრელს, ხოლო M_{sj} – ამ განმსაზღვრელის j-ური სვეტის ალგებრულ დამატებას. გადაადგილებებში დრეკადობის თეორიის განტოლებებისადმი მოხმარებისას, იზოტროპული ტანებისათვის, აღწერილ გამოთვლას მივყავართ გალიორკინ-ბუსინესკის (2) ამოხსნამდე. აშკარაა, რომ ეს ხერხი, გამოდგება ანიზოტროპული გარემოსათვის, დრეკადობის თეორიის დინამიკური განტოლებებისათვის და ა.შ.

1.1.2. ძაბვათა ფუნქციის ტენზორი

ვიცით, რომ როტორს $\hat{\Phi}$ ტენზორის ტრანსპონირებული როტორისა ეწოდება არათავსებადობის (I_{ik}) ტენზორი $\hat{\Phi}$-ზე:

$$I_{nk}\hat{\Phi} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\Phi})^T \,. \tag{13}$$

ეს – სიმეტრიული ტენზორია, თუ $\hat{\Phi}$ ტენზორი სიმეტრიულია. $I_{nk}\hat{\Phi}$-ის სხვაგვარ წარმოდგენას აქვს სახე

$$I_{nk}\hat{\Phi} = -\nabla^2\hat{\Phi} + 2\det\nabla\cdot\hat{\Phi} - \hat{E}\nabla\cdot\nabla\cdot\Phi\left(\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla\right)\Phi \,, \tag{14}$$

აქ $\hat{E}-$ერთეულოვანი ტენზორია, $\Phi = I_1(\hat{\Phi}) - \hat{\Phi}-$ის პირველი ინვარიანტი; $defa = \frac{1}{2}\left(\nabla a + \nabla a^2\right)-$ოპერაცია a ვექტორზე, რომელსაც უწოდებენ ამ ვექტორის „დეფორმაციას“. მაგალითისათვის გამოდგება დეფორმაციის წრფივი ტენზორი $\hat{\varepsilon} = defu$. უწყვეტი (სენ-ვენანის) პირობები გამოხატავენ ამ ტენზორის ნულად გადაქცევას:

$$I_{nk}\hat{\varepsilon} = I_{nk}defu = 0 \,. \tag{15}$$

საზოგადოდ, ყოველი ვექტორისათვის $I_{nk}defa = 0$. პირიქით, თუ $I_{nk}\hat{\Phi} = 0$, მაშინ $\hat{\Phi} = defa-$არსებობს ვექტორი, რომლის დეფორმაციები წარმოადგენს $\hat{\Phi}$ ტენზორს.

კერძოდ, ტენზორისათვის $\hat{E}\Phi = \hat{E}I_i,(\hat{\Phi})$

$$I_{nk}\hat{E}\Phi = (\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla)\Phi \,, \tag{16}$$

ხოლო ნულის ტოლი დივერგენციის ტენზორისათვის $(\nabla\cdot\Phi = 0)$

$$I_{nk}\hat{\Phi} = -\nabla^2\hat{\Phi} + I_{nk}\hat{E}\Phi \,. \tag{17}$$

მოცულობითი ძალების არ არსებობისას ასეთ ტენზორს წარმოადგენს ძაბვათა $\hat{T}$ ტენზორი; თუ შემოვიტანთ $\sigma = I_1(\hat{T})$ აღნიშვნას, (16) და (17) თანახმად გვექნება

$$I_{nk}\hat{T} = -\nabla^2\hat{T} + \left((\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla)\sigma\right), \;\; (\nabla\cdot\hat{T} = 0) \,. \tag{18}$$

თუ მივმართავთ ახლა ჰუკის კანონს იზოტროპული ტანისათვის

$$2\mu\hat{\varepsilon} = \hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma\hat{E} \,, \tag{19}$$

(15) და (17)-ის თანახმად გვექნება

$$-\nabla^2\hat{T} + \frac{1}{1+\nu}\left(\hat{E}\nabla^2 - \nabla\nabla\right)\sigma = 0, \qquad \nabla^2\sigma = 0 \,. \tag{20}$$

ამასთან მეორე თანაფარდობა მიღებულია ტენზორის პირველი ინვარიანტის წარმოშობით (20)-ის მარცხენა ნაწილში. ამრიგად, მიღებულია ბელტრამი-მიტჩელის დამოკიდებულებები

$$\nabla^2 T^2 + \frac{\nabla\nabla\sigma}{1+\nu} = 0 . \quad (21)$$

ცნობილია, რომ ტენზორი ნულის ტოლი დივერგენციით გამოსახვადია მეორე ტენზორის როტორით: – თუ $\nabla \cdot \hat{T} = 0$, მაშინ $\hat{T} = \nabla \times \hat{C}$; თუ, ამასთანავე ტენზორი $\hat{T}$ სიმეტრიულია $\left(\hat{T} = \hat{T}^T\right)$, მაშინ სიმეტრიული $\hat{\Phi}$ ტენზორის განხილვაში შემოტანისას, გვმართებს მივიღოთ $\hat{e} = (\nabla \times \hat{\Phi})^T$; მაშინ $\hat{T} = \nabla \times (\nabla \times \hat{\Phi})^T = I_{nk}\hat{\Phi}$, $\hat{T}^T = \left(I_{nk}\hat{\Phi}\right)^T = I_{nk}\hat{\Phi} = \hat{T}$, რადგანაც პირობის მიხედვით $\hat{\Phi}^T = \hat{\Phi}$. აქედან გამომდინარეობს, რომ უწყვეტი გარემოს სტატიკის განტოლებები, მასათა ძალების არ არსებობისას $(\nabla \cdot \hat{T} = 0, \hat{T} = \hat{T}^T)$ კმაყოფილდება, თუ მივიღებთ

$$\hat{T} = I_{nk}\hat{\Phi}, \ (\hat{\Phi} = \hat{\Phi}^T) . \quad (22)$$

ი. კრუტკოვის (1949), ვ. ბლოხის (1964) და ბ. ფინცის მიერ შემოტანილ $\hat{\Phi}$ ტენზორს უწოდებენ ძაბვათა ფუნქციის ტენზორს. ძაბვათა $\hat{T}$ ტენზორი რჩება უცვლელი, თუ $\hat{\Phi}$-ის გამოსახულებაში შემოტანილია შესაკრები სახით *defa*, სადაც *a* – ნებისმიერი ვექტორია. ეს იძლევა $\hat{\Phi}$ ტენზორის მოცემის ფორმის გამარტივების საშუალებას, შევინარჩუნებთ რა მის გამოსახულებაში მხოლოდ სამ კომპონენტს. ასეთია მაქსველის (ტენზორი $\hat{\Phi}-$ დიაგონალურია) და მორერის ($\hat{\Phi}-$ში შენარჩუნებულია მხოლოდ არადიაგონალური კომპონენტები) წარმოდგენები. ვ. ბლოხის წიგნში (1964) მითითებულია დეკარტულ კოორდინატებში $\hat{\Phi}$-ის კიდევ სამი კომპონენტური ფორმა; იქვე ჩამოთვლილი ცილინდრულ კოორდინატებში $\hat{\Phi}-$ის სამკომპონენტური წარმოდგენის ცხრა ვარიანტი ბრუნვის სიმეტრიის შემთხვევისათვის (ი. კრუტკოვი, 1949, გვ. 108).

ი. კრუტკოვის გარდაქმნა. ვუბრუნდებით რა დრეკად იზოტროპულ გარემოს და ვითვალისწინებთ რა, რომ (20) და (16)-ის მიხედვით $\nabla\nabla\sigma = -I_{nk}\hat{E}\sigma$, შეიძლება წარმოვადგინოთ ბელტრამი-მიტჩელის დამოკიდებულებების სახით

$$I_{nk}\left(\hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1-\nu}\hat{E}\right) = 0 . \quad (23)$$

ასე, რომ ფრჩხილებში ტენზორი წარმოადგენს დეფორმაციას, რომელიღაც C ვექტორზე

$$\nabla^2\hat{\Phi} - \frac{\sigma}{1+\nu}\hat{E} = defc\,. \tag{24}$$

ამასთან ერთად (22)-ის თანახმად

$$\sigma = I_1(I_{nk}\hat{\Phi}) = \nabla^2\Phi - \nabla\cdot\nabla\cdot\hat{\Phi} = \nabla^2\Phi - \nabla\cdot b\,,\ \ b = \nabla\cdot\hat{\Phi}\,, \tag{25}$$

ეს იძლევა საშუალებას (24) ჩავწეროთ სახით

$$\nabla^2\hat{\Phi} - \frac{\hat{E}}{1+\nu}\left(\nabla^2\Phi - \nabla\cdot b\right) = defc\,. \tag{26}$$

ამ თანაფარდობიდან გამოირიცხება ვექტორი c; ტენზორზე პირველი ინვარიანტების შექმნით (26)-ში, მივდივართ ტოლობამდე

$$\nabla\cdot\left(\frac{3}{1+\nu}\nu - \frac{2-\nu}{1+\nu}\nabla\Phi - c\right) = 0\,,$$

რომელიც გამოსახავს ფრჩხილებში ვექტორის დივერგენციის ნულად გადაქცევას; ეს ვექტორი წარმოადგენს სხვა ვექტორის როტორს, მაგრამ ეს უკანასკნელი შეიძლება ჩავრთოთ b ვექტორის შემადგენლობაში. ამით განისაზღვრება c და მერე $defc$; (25)-ში ჩასმას, მივყავართ განტოლებამდე

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{1+\nu}\hat{E}\left(\nabla^2\Phi - \nabla\cdot b\right) + \frac{3}{1+\nu}defb - \frac{2-\nu}{1-\nu}\nabla\nabla\Phi\,. \tag{27}$$

თუ $\nabla^2\hat{\Phi} -$ ს გამოვრიცხავთ (14), (22) და (27) გამოსახულებებიდან, მივალთ იზოტროპულ დრეკად გარემოში ძაბვათა $\hat{T}$ ტენზორის წარმოდგენამდე:

$$\hat{T} = \frac{\nu}{1+\nu}\hat{E}\left(\nabla^2\Phi - \nabla\cdot b\right) - \frac{1-2\nu}{1+\nu}\left(defb - \nabla\nabla\Phi\right). \tag{28}$$

ახლა (19)-ის თანახმად განისაზღვრება დეფორმაციის $\hat{\varepsilon}$ ტენზორი და მასზე დაყრდობით გადაადგილების u ვექტორი (მყარი ტანის გადაადგილება უკუიგდება):

$$2\mu\hat{\varepsilon} = \frac{1-2\nu}{1+\nu}def\left(\nabla\Phi - b\right),\ \ 2\mu u = \frac{1-2\nu}{1+\nu}\nabla\Phi - b\,. \tag{29}$$

ი. კრუტკოვის (28) და (29) ფორმულები წარმოადგენენ დრეკადობის წრფივი თეორიის განტოლებების ზოგად ამონახსნთა ერთ ფორმათაგანს; მათი მეშვეობით განისაზღვრება ძაბვათა $\hat{\Phi}$ ფუნქციის

ტენზორი, რომელიც აკმაყოფილებს (27) დიფერენციალურ განტოლებას, ძაბვათა T ტენზორი და გადაადგილებათა u ვექტორი. ეს უკანასკნელნი აღმოჩნდნენ მხოლოდ $I_1(\hat{\Phi})=\Phi$ და $b=\nabla\cdot\hat{\Phi}$-ზე დამოკიდებულებები. ამიტომ საკმარისია (27)-ის საშუალებით, დავადგინოთ თანაფარდობა მხოლოდ ამ სიდიდეებს შორის. შესაბამისად, თუ შევადგენთ დივერგენციას (27)-ის მარჯვენა და მარცხენა ნაწილებში, მივიღებთ

$$\nabla^2 b+\frac{\nabla\nabla\cdot b}{1-2\nu}=\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla\nabla^2\Phi\,. \tag{30}$$

იგულისხმევა, რომ

$$b=\nabla^2 G,\quad \Phi=\frac{\nabla G}{2(1-\nu)}\,. \tag{31}$$

ჩვენ დავაკმაყოფილებთ ამ (30) განტოლებას, თუ ვექტორი c – ბიჰარმონიულია. (29)-ის თანახმად ამას მივყავართ, გალიორკინ-ბუსინესკის (2) ამონახნამდე.

(30) განტოლების კერძო ამონახსნად გამოდგება $b=\nabla\Phi$, ხოლო შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლება (ნულის ტოლი მარჯვენა ნაწილია) მხოლოდ მუდმივების მნიშვნელობებით განსხვავდება (1.3) განტოლებისაგან გადაადგილებათა ვექტორისათვის. ამიტომ b ვექტორი შეიძლება აგებული იქნას პაპკოვიჩის ამოხსნით (4) ტიპის მიხედვით:

$$b=\frac{1+\nu}{1-2\nu}\left[4(1-\nu)B-\nabla(R\cdot B+B_0)\right]+\nabla\Phi \tag{32}$$

და (1.29)-ში ჩასმას მივყავართ u ვექტორის (4)-ით წარმოდგენამდე.

(30), (28) და (29) ფორმულებზე დაყრდნობით ა. კრუტკოვმა მიიღო მრავალრიცხოვანი სხვა „ზოგადი ამონახსნები“. მაგალითად, თუ შემოვიტანთ განხილვაში K ვექტორს ნულის ტოლი დივერგენციით და როტორით, რომელიც განისაზღვრება b ვექტორითა და $\nabla\Phi$-ით:

$$\nabla\cdot K=0\,,\ \ \nabla\times K=\nabla\Phi-\frac{b}{2(1-\nu)}\,,$$

მაშინ (29) და (30) თანახმად, უკუვაგდებთ რა არა არსებით მუდმივ თანამამრავლს, მივალთ კორნის ამოხსნამდე

$$u=\nabla\times K-(1-2\nu)b\left(\nabla^2 K=\nabla\times b,\ \ \nabla\cdot K=0\right).$$

1.1.2.1. სივრცითი ამოცანის ინტეგრალური განტოლებები

სივრცითი სასაზღვრო ამოცანების ინტეგრალური განტოლებების შედგენა, მათ შესწავლასთან დაკავშირებული სიძნელეთა გადალახვა, არსებობის დამტკიცება და მათი ამოხსნების აგების ეფექტური ხერხების პოვნა – ვ. კუპრაძის და მისი თანამშრომლების მრავალწლიანი მუშაობის შედეგია. ამ გამოკვლევების მეთოდებისა და შედეგების შინაარსის გადმოცემა, დაწვრილებითი ბიბლიოგრაფიით, მოიპოვება აგრეთვე ვ. კუპრაძის, თ. გეგელიას, ო. ბაშალეიშვილის და თ.ბურჭულაძის მონოგრაფიაში, რომელიც გამოქვეყნდა 1968 წელს [11].

ამ ნაშრომში განვიხილავთ სივრცითი დრეკადობის თეორიის მხოლოდ პირველი და მეორე სასაზღვრო ამოცანები იზოტროპული ერთგვაროვანი გარემოსათვის. ჩვენ ამასთან შემოვიფარგლებით ცალბმული სასრული მოცულობისათვის $(V_i)-$ შიდა (i) ამოცანით და გარე (e)-თი. ღრუთი აღჭურვილი უსასრულო გარემოსთვის (V_e) ივარაუდება O ზედაპირის სიგლუვე, რომელიც საზღვრავს V_i-ს გარედან ($V_e -$ შიგნიდან).

დრეკადობის თეორიის პოტენციალები. განვიხილავთ შემოდის $\hat{u}(M,Q)$ კელვინ-სომილიანის ტენზორი, რომელიც განსაზღვრავს შემოუსაზღვრელი დრეკადი გარემოს M წერტილის $u(M,Q)$ გადაადგილებას, გამოწვეულს Q წერტილში ერთეულოვანი შეყურსული ძალის მოქმედებით:

$$u(M,Q)=\hat{U}(M,Q)\cdot e,\ \ \hat{U}(M,Q)=\frac{1}{4\pi\mu}\left[\frac{\hat{E}}{R}-\frac{\nabla\nabla K}{4(1-\nu)}\right], \tag{33}$$

($\hat{E}-$ ერთეულოვანი ტენზორია, $R=\overrightarrow{QM}=\Gamma_M-\Gamma_Q$, $R=|R|$), ძაბვის ვექტორის გამოსახულება

$$n_\mu\cdot\hat{T}=\hat{\Phi}(M,Q)e,\ \ \hat{\Phi}(M,Q)=\frac{1}{8\pi(1-\nu)R^3}\Big[(1-2\nu)\big(n_\mu R-Rn_\mu\big)-$$

$$-2(1-\nu)\hat{E}n_\mu R\cdot R^3 n_\mu\cdot R\nabla\nabla\frac{1}{R}\Big]. \tag{34}$$

ვთქვათ O – ჩაკეტილი ზედაპირია $(M\subset 0)$; მაშინ

$$\iint_0 R\times\hat{\Phi}(M,Q)dO_\mu=0 \tag{35}$$

და ადგილი აქვს გაუსის განზოგადებულ თეორემას

$$\iint_0 \hat{\Phi}(M.Q)dO_\mu=-\hat{E}\delta(Q)\ ,\ \ \delta(Q)=\begin{cases}1 & Q\subset V_i\\ 1/2 & Q\subset O\\ 0 & Q\subset V_t\end{cases} \tag{36}$$

(V_i-მოცულობა O-ს შიგნით, V_e-O-ს გარეთ).

ვ. კუპრაძის მიერ შემოტანილი დრეკადობის თეორიის ვექტორები პოტენციალებიდან განიხილება ორი: პირველი, მსგავსი O ზედაპირზე. მარტივი ფენის $A(Q)$ პოტენციალი და მეორე მსგავსი ორმაგი ფენის $B(Q)$ პოტენციალი

$$A(Q)=\iint_0 a(M)\cdot\hat{U}(M,Q)do_\mu\ , \tag{37}$$

$$B(Q)=\iint_0 b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q)do_\mu\ . \tag{38}$$

აშკარაა, რომ $A(Q)$ და $B(Q)$, $Q\not\subset 0-$ისას, წარმოადგენენ დრეკადობის თეორიის განტოლებების ამონახსნს გადაადგილებებში, როდესაც არ გვაქვს მოცულობითი ძალები.

პირველი პოტენციალის ზღვრული მნიშვნელობები O-ზე შიგნიდან და გარედან, რომლებიც აღნიშნულია

$$A_i(Q_0)=\lim_{V_i\supset Q\to Q_0}(A(Q),\quad A_e(Q_0)=\lim_{V_i\supset Q\to Q_0}(A(Q)-\text{თი}$$

ტოლი არიან მისი პირდაპირი მნიშვნელობის, განსაზღვრულის არასაკუთრივი კრებადი ინტეგრალით

$$A(Q_0)=\iint_0 a(M)_0\cdot\hat{U}(M,Q_0)do_\mu\ . \tag{39}$$

მეორე პოტენციალის ზღვრული მნიშვნელობებისათვის ადგილი აქვს თანაფარდობებს

$$B_i(Q_0)=B(Q_0)-\frac{1}{2}b(Q_0),\qquad B_e(Q_0)=B(Q_0)+\frac{1}{2}b(Q_0)\,, \tag{40}$$

ანალოგიურებს პლემელის ფორმულებისა, ამასთან პირდაპირი მნიშვნელობა განისაზღვრება ინტეგრალით, რომელიც კრებადია მხოლოდ მთავარი მნიშვნელობის აზრით

$$B(Q_0)=\iint_0 b(M)-\hat{\Phi}(M,Q_0)do_\mu=\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{o-o(Q_0\varepsilon)} b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q_0)do_\mu\ ,$$

($O(Q_0,\varepsilon)-Q_0$ წერტილის O-ზე მიდამოა, 2ε დიამეტრით).

$Q\subset V_e$ წერტილის საკმარისი მოშორებით O ზედაპირიდან, $R\to -r_Q$ თანახმად (33) და (37)-ისა გვაქვს $\left(e_Q=r_Q/\nu_Q\right)$

$$\lim_{Q\to Q_\infty} A(Q)=\frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)\Gamma_Q}\left[(3-4\nu)\hat{E}-e_Q e_Q\right]\iint_a a(M)do_\mu;$$

ეს – Q-ში გადაადგილების ვექტორია, კოორდინატთა სათავეში მოდებული ძალის მოქმედებით, რომელიც მოიცემა ინტეგრალით O-ზე სიმკვრივისაგან $a(M)$.

მეორე პოტენციალი $Q\to Q_\infty$ ისას უფრო ნელა არა ხდება ნული, ვიდრე Γ_a^{-2} და ის შეიძლება განიმარტოს როგორც გადაადგილება, რომელიც იქმნება ძალთა სისტემით, განაწილებულით O ზედაპირზე, ნულის ტოლი მთავარი ვექტორით.

ინტეგრალური განტოლებები. პირველ სასაზღვრო ამოცანაში $u(Q)$ გადაადგილება, რომელიც იღებს O ზედაპირზე (V_i მოცულობა შიდა ამოცანაში, ღრუ გარე ამოცანაში) მოცემულ მნიშვნელობას, იძებნება დრეკადობის თეორიის მეორე პოტენციალის ფორმით, უცნობი სიმკვრივით $b(M)$:

$$u(Q)=B(Q)=\iint_0 b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q)do_\mu. \tag{41}$$

გარე ამოცანის შემთხვევაში ეს წარმოდგენა მიიჩნევს, რომ $u(Q_\infty)$-ს აქვს r_Q^{-2} რიგი; იმ ძალთა მთავარი ვექტორი, რომლებიც უნდა იყვნენ განაწილებული ღრუს O ზედაპირზე, რომ მიანიჭონ მათ წერტილებს $u(Q_0)$ გადაადგილების ვექტორი, ტოლი უნდა იყოს ნულის. ამიტომ პირველი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნი (41) ფორმით შეიძლება არსებობდეს მხოლოდ $u(Q_0)$ სპეციალური ამოცანით, ხოლო ზოგად შემთხვევაში ამონახსნი იქნება წარმოდგენილი (41) ჯამით და უბრალო ფენის პოტენციალით („რობენის ელასტოსტატიკური ამოცანის“ ამონახსნი).

შიდა (i) და გარე (e) ამოცანების ინტეგრალური განტოლებები მიიღება (41)-დან, ზღვრული გადასვლის $\lim\limits_{Q\to Q_0} u(Q)=v(Q_0)$ გზით, პლემელის (4) ფორმულების დახმარებით:

$$I^{(i)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0) - \iint\limits_0 b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) do_\mu = -v(Q_0), \tag{42}$$

$$I^{(e)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0) + \iint\limits_0 b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) do_\mu = -\upsilon(Q_0)\,. \tag{43}$$

(30) და (36)-ზე დაყრდნობით, როცა $\delta(Q) = \frac{1}{2}$, არ არის ძნელი დავრწმუნდებით, რომ $b(M)$-ის მოცემა მყარი ტანის გადაადგილების ფორმით

$$b^x(M) = \upsilon_0 + \omega \times r_\mu = \upsilon_0 + \omega \times \Gamma_{Q_0} + \omega \times R \tag{44}$$

წარმოადგენს (43)-ის შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნს

$$I_0^{(e)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0) = \iint\limits_0 b(M) \cdot \hat{\Phi}(M, Q_0) do_\mu = 0\,. \tag{45}$$

ამასთან ერთად $B(M) = -b(M)$ წარმოადგენს (42) განტოლების ამონახსნს, როცა O ზედაპირი გადაადგილდება როგორც მყარი ტანი, მაშინ მთელი V_i მოცულობა ასევე გადაადგილდება როგორც მყარი ტანი; რაც გამომდინარეობს (41) და (36)-დან, როცა $-\delta(Q) = 1$.

მეორე სასაზღვრო ამოცანაში O-ზე მოიცემა ზედაპირული ძალები $F = (n \cdot \hat{T})_0$, ხოლო გადაადგილებათა ვექტორი იძებნება პირველი პოტენციალის ფორმით

$$u(q) = \iint\limits_0 a(M) \cdot \hat{U}(M, Q) do_M\,. \tag{46}$$

(34)-ის გამოყენებით, აქ გამოტოვებული (მაგრამ არატრივიალური) გარდაქმნების შემდეგ, მივდივართ ინტეგრალურ განტოლებამდე

$$II^{(i)} \cdots \frac{1}{2}a(Q_0) + \iint\limits_0 \hat{\Phi}(Q_0, M) \cdot a(M) do_M = F(Q_0) = (n_0 \cdot \hat{T})_0, \tag{47}$$

$$II^{(e)} \cdots \frac{1}{2}a(Q_0) - \iint\limits_0 \hat{\Phi}(Q_0, M) \cdot a(M) do_M = -F(Q_0) = (n_0 \cdot \hat{T})_0\,. \tag{48}$$

ამასთან $n_a - V_i -$ისადმი გარე ნორმალია.

ზემოთ ვაჩვენეთ, რომ (42)-(43), (47)-(48) ვექტორულ განტოლებებში ინტეგრალები განიხილება მათი მთავარი მნიშვნელობების აზრით – განტოლებათა ეს სისტემა სინგულარულია. შემდგომი გამოკვლევების სირთულე მდგომარეობს მათ მიმართ თეორემისა და ფრედჰოლმის ალტერნატივის მიყენების დამტკიცებაში (μ და ν-ისას, რომლებიც

უზრუნველყოფენ დეფორმაციის პოტენციური ენერგიის დადებითობას); იხ. ვ. კუპრაძე (1963, 1968) და აგრეთვე ს. მიხლინი (1962) [12].

გადავწეროთ მიღებული განტოლებები ასეთი თანმიმდევრობით:

$$\left.\begin{aligned} &I^{(i)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0)-\iint_0 b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q)do_M=\upsilon(Q_0) \\ &II^{(e)} \cdots \frac{1}{2}a(Q_0)-\iint_0 \hat{\Phi}(Q_0,M)\cdot a(M)do_M=-F(Q_0) \end{aligned}\right\}, \tag{49}$$

$$\left.\begin{aligned} &I^{(e)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0)+\iint_0 b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q_0)do_M=\upsilon_0(Q_0) \\ &II^{(i)} \cdots \frac{1}{2}a(Q_0)-\iint_0 \hat{\Phi}(Q_0,M)\cdot a(M)do_M=F(Q_0) \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

$\left(I^{(i)},II^{(e)}\right)$ და $\left(I^{(e)},II^{(i)}\right)$ წარმოადგენენ მოკავშირე წყვილებს.

შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლებები ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$I_0^{(i)},I^{(e)} \cdots \frac{1}{2}b(Q_0)-\lambda\iint_0 b(M)\cdot\hat{\Phi}(M,Q_0)do_M=0, \tag{51}$$

$$II_0^{(i)},II^{(e)} \cdots \frac{1}{2}a(Q_0)-\lambda\iint_0 \hat{\Phi}(Q_0,M)\cdot a(M)do_M=0. \tag{52}$$

ამასთან $\lambda=1$ $I_0^{(i)},II_0^{(e)}-$თვის და $\lambda=-1$ $I_0^{(e)},II^{(i)}-$თვის.

$I^{(i)}$ და $II^{(e)}$ ამოცანების ამოხსნის არსებობა და ერთადერთობა. საკმარისია შევამოწმოთ, რომ $\lambda=1$ არ წარმოადგენს $II^{(e)}$ ერთგვაროვანი განტოლების საკუთარ რიცხვს (მაშასადამე, მისი მოკავშირე $I_0^{(i)}$ განტოლებისაც). მტკიცდება, რომ დაშვება $II^{(e)}-$ის ამონახსნის არსებობის შესახებ, რომელიც განსხვავდება ტრივიალურისაგან $\left(a(M)\neq 0\right)$, შეუთავსებელია დეფორმაციის ხვედრითი პოტენციალური ენერგიის დადებითობის მოთხოვნასთან. ფრედჰოლმის თეორემის თანახმად აქედან გამომდინარეობს $II^{(e)}$ და $I^{(i)}$ არაერთგვაროვანი განტოლებების ამონახსნების არსებობა და ერთადერთობა $F(Q_0)$-ის ნებისმიერად მოცემისას პირველში და $\upsilon(Q)$-ის მეორეში.

$II^{(i)}$ მეორე შიდა სასაზღვრო ამოხსნა. $II^{(i)}-$სთან მოკავშირე $I_0^{(e)}$-ს აქვს არატრივიალური ამონახსნი (44). ამიტომ არატრივიალური ამონახსნი აქვს $II_0^{(i)}$-საც, და ფრედჰოლმის ერთერთი თეორემის

თანახმად არაერთგვაროვან განტოლებას $II^{(i)}$ შეიძლება ქონდეს ამონახსნი, მხოლოდ იმ პირობის გათვალისწინებით, რომ მისი თავისუფალი წევრი (44)-ის ორთოგონალურია:

$$\iint_0 (\upsilon_0 + \omega \times r_Q) \cdot F(Q) do_Q = \upsilon_0 \iint_0 F(Q) do_Q + \omega \iint_0 r_Q \times F(Q) do_Q = 0 .$$

$\upsilon_0 -$ისა და ω-ს ნებისმიერობის გამო ამას მივყავართ ზედაპირული ძალების მთავარი მომენტისა და მთავარი ვექტორის ნულად ქცევის პირობებამდე. მათი შესრულებისას $II^{(i)}$ ამოცანის ამოხსნა განსაზღვრულია მყარი ტანის გადაადგილების შესაკრების $-I_0^{(e)}$ მოკავშირე განტოლების საკუთარ ამონახსნის სიზუსტემდე.

1.1.2.2. რობენის ელასტოსტატიკური ამოცანა

რობენის ელასტოსტატიკურ ამოცანას უწოდებენ პოტენციალის განსაზღვრას ველში, რომელიც გარს არტყია ჩაკეტილ გამტარ ზედაპირს მასზე მოცემული მუხტით. დრეკადობის თეორიაში ტერმინი შემოიტანა ვ. კუპრაძემ (1963) [13] იძებნება დაძაბული მდგომარეობა შემოუსაზღვრავ დრეკად გარემოში, როცა მასში ჩარჩილულ მყარ სხეულს ენიჭება გადაადგილება

$$\omega_0(Q) = u_0 + \omega \times \Gamma_Q . \tag{53}$$

ამოცანის ამონახსნი იძებნება მარტივი ფენის პოტენციალის ფორმით

$$\omega(Q) = \iint_0 a^0(M) \hat{U}(M,Q) do_M , \tag{54}$$

და მტკიცდება, რომ სიმკვრივის $a^0(M)$ ვექტორად ამ შემთხვევაში უნდა მივიღოთ $II^{(i)}$ ამოცანის საკუთარი ამონახსნი, ამასთან – $F(Q_0) = a^0(Q_0)$ (ეს უშუალოდ გამომდინარეობს $II^{(e)}$ ინტეგრალური განტოლებიდან). ამრიგად, – $a^0(Q_0)$ განსაზღვრავს O გადაადგილებული მყარი ტანის ზედაპირზე რეაქციული გარემოს მასზე განაწილებას. ვუწოდოთ $a^k(Q_0)$ და $a^{k+3}(Q_0)$ O-ზე ამ ძალების განაწილებას, რომელიც ტანზე ერთეულოვანი ძალის $\overset{k}{\underset{k+3}{V}} = i_k -$ს, რომელიც მოდებულია i_k ღერძზე და

შესაბამისი ერთეული მომენტის $\overset{k+3}{\underset{r+3}{m}} = i_k$, მოქმედებითაა გამოწვეული.

ვთქვათ, შემდეგ $\overset{r}{u} = i_r$, $\overset{r+3}{U} = i_r \times \omega - I_0^{(e)}$ საკუთარ ამონასხნთა სისტემაა. ასეთი აღნიშვნებისას

$$\iint_0 a^k \cdot \overset{r}{u}\, do_Q = \delta_{kr} \quad (k, r = 1, 2, \cdots, 6). \tag{55}$$

ამით განისაზღვრება $II_0^{(i)}$ ინტეგრალური განტოლების საკუთარ ამონახსნთა სისტემა, ორთონორმირებული $I_0^{(e)} -$ საკუთარი ამონახსნების სისტემასთან.

პირველი გარე სასაზღვრო ამოცანა. $\left(I^{(e)}\right)$ ამოცანას აქვს ამონახსნი, თუ თავისუფალი წევრი $I^{(e)}$ განტოლებისა ორთოგონალურია $II_0^{(i)}$ ამოცანის $a^0(M^0)$ საკუთარი ამონახსნისა

$$\iint_0 \upsilon(Q_0) a^0(Q_0) do_Q = 0. \tag{56}$$

ეს პირობა ამოცანის არსით კი არ არის გამოწვეული, არამედ $u(Q)$-ის მიღებული წარმოდგენით მეორე პოტენციალის ფორმაში. განხილვაში შემოდის ვექტორი

$$\upsilon^*(Q_0) = \upsilon(Q_0) - \sum_{r=1}^{6} D_r \overset{r}{u} \tag{57}$$

და D_r მუდმივები განისაზღვრება ისე, რომ (56) ორთოგონალობის პირობა სრულდებოდეს ამ ვექტორისათვის. (55)-ის თანახმად გვაქვს

$$\iint_0 \upsilon^*(Q_0) - a^k \sim Q_0) do_{Q_0} \iint_0 \upsilon(Q_0) \cdot a^k(Q_0) do_{Q_0} - D_k = 0,$$

თუ ახლა მივიჩნევთ

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \sum_{k=1}^{3} v_k \iint_0 \upsilon(Q_0) \cdot \overset{k}{a}(Q_0) do_{Q_0}, \\ \omega_0 &= \sum_{k=1}^{3} i_k \iint_0 \upsilon(Q_0) \cdot \overset{k+3}{a}(Q_0) do_{Q_0} \end{aligned}\right\}. \tag{58}$$

მივიღებთ

$$\upsilon^*(Q_0) = \upsilon(Q_0) - \left(u_0 + \omega \times r_{Q_0}\right). \tag{59}$$

$I^{(e)}$ ამოცანას, $\upsilon^*(Q_0)$-ის ტოლი თავისუფალი წევრისას, აქვს ამონახსნი და მისით განისაზღვრება $Q \subset V$-ისას ვექტორი $u^*(Q)$. რობენის ამოცანა (54) ფორმაში იხსნება განსაზღვრული (58) თანახმად

გადაადგილებისათვის $u_0+\omega\times r_{Q_0}$ და $I^{(e)}$ ამოცანის საძიებელი ამონახსნი წარმოადგენს ჯამს

$$u(Q)=u^*(Q)+\omega_0(Q)\,,\ \ (Q\subset V_e). \tag{60}$$

ვ. კუპრაძის წიგნებში (1963, 1964, 1967, 1968) განხილულია ინტეგრალური განტოლებები და მათი ამონახსნების არსებობის საკითხები არა მარტო სტატიკის ამოცანებისათვის, არამედ დრეკადი გარემოს დამყარებული რხევებისთვისაც. განხილულია ანიზოტროპული და არაერთგვაროვანი გარემოებები, რიგი სხვა სასაზღვრო ამოცანები, დათმობილი აქვს ადგილი თერმოდრეკადობის ამოცანებს, აგრეთვე ამოცანებს შემოსაზღვრული მოცულობებისა და უსასრულო გარემოსათვის რამდენიმე დართული ღრუთი. დაძლეულია შესასწავლი ინტეგრალური განტოლებების სინგულარობასთან დაკავშირებული სიძნელეთა რიგი. შემოთავაზებულია იდეაში (მაგრამ არა რეალიზაციისას) ამ განტოლებათა რიცხვითი ამოხსნების მარტივი ხერხები.

$I^{(i)}$ ამოცანის ინტეგრალურ განტოლებას 1907 წელს განიხილავდა ჯ.ლაურიჩელა; დ. შერმანმა (1962) განაზოგადა ამონახსნი სასრული მოცულობის დრეკადი ტანის შემთხვევისათვის რამდენიმე ღრუთი.

ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები, დაფუძნებული ვარიაციული პრინციპების გამოყენებაზე. განვითარებულია ლ.ლეიბენზონის (1951) [14] მონოგრაფიაში. ვარიაციული მეთოდების კრებადობის შესწავლისა და ცდომილებათა შეფასებისადმია მიძღვნილი ბევრი გამოკვლევა (ს. მიხლინი [15], მ. სლობოდიანსკი).

1.1.3. დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების შესახებ

დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების სისტემატური შესწავლით დაკავდა ბ. გალიორკინი. იყენებდა რა სამი ბიჰარმონიული ფუნქციით დრეკადობის თეორიის განტოლებების ზოგადი ინტეგრალის წარმოდგენას (1930) და მწკრივებს, ის ანვითარებდა ოცდაათიანი წლების დასაწყისიდან სქელი ფილების ანგარიშის მეთოდს, რომელიც გულისხმობდა პირობების შესრულებას ნებისმიერი დატვირთვებისათვის

ტორსებზე და ინტეგრალური პირობებისა გვერდით ზედაპირზე; მან შეისწავლა მართკუთხა, მრგვალი, სექტორული, სამკუთხა ფილები (1931, 1932). 1931-ში გალიორკინმა ააგო ამოცანის ამოხსნა ნორმალური დატვირთვის მოქმედების ქვეშ მოქცეული ფენის წონასწორობის შესახებ მწკრივების დახმარებით, რომლებიც შეიცავენ ბესელისა და ჰანკელის ფუნქციებს. გალიორკინმა განიხილა ამოცანა ღრუ ცილინდრისა და მისი ნაწილის წონასწორობის შესახებ (1933), ხოლო მოგვიანებით მიიღო ღრუ სფეროს ღერძულსიმეტრიული დეფორმაციის ამოცანის კერძო ამონახსნები (1942).

ამ გამოკვლევათა კვალდაკვალ გამოჩნდა გ. მასლოვის (1938) ნაშრომი, რომელშიც განიხილებოდა თერმოდრეკადი წონასწორობა სქელი ფილის, ღრუ ცილინდრისა და სფეროს სტაციონარული თერმული ნაკადის მოქმედებისას.

ბუსინესკის ამოცანის განზოგადება ნახევარსივრცისთვის მოცემულია ვ.კოროტკოვის მიერ (1938), რომელმაც გამოიკვლია მართკუთხედზე – მუდმივი და წრფივი კანონით ცვლადი დატვირთვის მოდების შემთხვევა. ნახევარსივრცის ამოცანები მოცემულობისათვის გადანაცვლების საზღვარზე და ერთმანეთთან შეუღლებული ნახევარსივრცეების შემთხვევა განიხილებოდა დ. შერმანის (1943, 1945) მიერ. „ცენტრ“-ის ტიპის თავისებურების მქონე ამონახსნი, ნახევარსივრცის რომელიღაც წერტილში, მიღებულია ვ. ფედიანინის მიერ (1965).

ორმოცდაათიანი წლების მეორე ნახევრიდან გამოჩნდა ნაშრომები, რომლებიც განიხილავენ ნახევარსივრცის (ნ. როსტოვცევი, 1955 [16]; ბ.მინცბერგი, 1957) და დრეკადი ფენის გრეხას (ი. უფლიანდი, 1959). მრავალფენიანი გარემოს (ფუძის) გრეხის შემთხვევა განხილულია ვ. პეტრიშინის მიერ (1965); ორფენიანი გარემოს გრეხა შესწავლილია დ. გრილიცკის მიერ (1961) [17].

ბუსინესკის ტიპის ამოცანები ანიზოტროპული გარემოსათვის განიხილა ც.სვეკლომ (1964). ჩნდება გამოკვლევები, რომლებიც შეისწავლიან არაერთგვაროვანი გარემოსაგან ნახევარსივრცის ქცევას: ს. ლეხნიცკიმ (1962) გამოიკვლია ნახევარსიბრტყე და სოლი დრეკადობის ცვლადი მოდულით, ლ. ტერ-მკრტიჩიანმა (1961) განიხილა

სივრცითი ამოცანები არაერთგვაროვანი გარემოსათვის (ბუსინესკის ამოცანა, სიმეტრიულად დატვირთული ცილინდრი). არაერთგვაროვანი ნახევარსივრცისა და ნახევარსიბრტყის უფრო ზოგადი სახე შეისწავლებოდა ნ.როსტოვცევის მიერ (1964); ბუსინესკის ამოცანა წრფივი დეფორმადი მთლიანი გარემოს სპეციალური ტიპისათვის დაისვა და ამოიხსნა ა. ვინოგრადოვის მიერ (1966) [18]. თერმოდრეკადი ამოცანა ნახევარსივრცისათვის, რომელიც ესაზღვრება გარემოს და რომლის ტემპერატურაც გვეძლევა განაწილების გაუსის კანონით, განხილულია ი. კილის მიერ (1966).

დრეკადი ფენის წონასწორობა ფურიეს ინტეგრალის მეშვეობით შეისწავლებოდა გ. შაპიროს მიერ (1942, 1944); მან შეისწავლა ამოცანა წნევის გადაცემის შესახებ ფართობზე განაწილებული წრისათვის; დ. აიზენბერგთან (1950) თანაავტორობით მის მიერ განხილულ იქნა წნევის გადაცემა წრიული ხვრელის მქონე ფენიდან. წნევის გადაცემა ფენით, რომელიც დევს დრეკად ფუძეზე, ფენასა და ფუძის სრული შერწყმის პირობისას შესწავლილია რ. რაპოპორტის მიერ (1948).

სქელი ფილის ღუნვა ზედაპირული ჰარმონიული დატვირთვის მოქმედებისას გამოიკვლია ს. გუტმანმა (1940); მის მიერვეა ამოხსნილი სქელი ფილის საკუთარი წონით ღუნვის შესახებ ამოცანას (1941); უფრო მოგვიანებით სქელი ფილების ღუნვის საკითხებით ბევრი ავტორი იყო დაკავებული (ა. ალექსეევი, 1946; ვ. ბლოხი, 1954, მ. ჰუსეინ-ზადე, 1956; ვ. პროკოპოვი, 1963).

1942 წელს ა. ლურიემ შემოგვთავაზა დრეკადი ფენისა და სქელი ფილის წონასწორობის შესახებ ამოცანის ამოხსნის ახალი სიმბოლური მეთოდი, დაფუძნებული დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანის განტოლებების ამოხსნის წარმოდგენაზე ლაპლასის ორგანზომილებიანი ოპერატორის მთელი ტრანსცენდენტური ფუნქციების სახით. ასეთმა წარმოდგენამ საშუალება მოგვცა გაგვემარტივებინა კომპაქტურად ჩაწერილ ხარისხოვან მწკრივებზე სიმბოლური ოპერატორების მეშვეობით მოქმედებები და ამის გარდა ბუნებრივი სახით მიგვიყვანა ახალი კლასის ამოხსნების მოძებნამდე, რომლებიც ფილის გვერდით ზედაპირზე სასაზღვრო პირობების შესრულების დაზუსტების საშუალებას იძლევიან. ამ ამონახსნებს ლურიემ „ერთგვაროვანი“

უწოდა, რადგანაც ისინი ფილის ტორსებზე დატვირთვის არ არსებობის პირობას შეესაბამებიან.

ლურიეს სიმბოლური მეთოდი შემდგომში ფილების თეორიის სფეროში გამოიყენეს ე. კრუგიმ (1956), ი. ტერეგულოვმა (1961), ტ. ხაჩატურიანმა (1963) და უ. ნიკულინმა (1963). ვ. აგარიოვის (1963) [19] მონოგრაფიაში ფილების თეორიისადმი სიმბოლური მეთოდის გამოყენების სფერო ფართოვდება. ფილების თეორიისადმი სიმბოლური მეთოდის შემდგომი მიყენება პოტენციალური ენერგიის მინიმუმის პრინციპთან შერწყმით მოცემულია ვ. პროკოპოვის მიერ (1965). ს.ლეხნიცკის ნაშრომებში სიმბოლური მეთოდი გამოიყენება ტრანსვერსალურ-იზოტროპული ფენისა და სქელი ფილის წონასწორობის განხილვისას; მის მიერ მიღებულია აგრეთვე შესაბამისი ერთგვაროვანი ამონახსნები. პ. ნედორეზოვმა (1964) ამოხსნა სიმბოლური მეთოდით ამოცანა მრავალფენიანი ღრუ ცილინდრის გრეხის შესახებ.

ამონახსნების სიმბოლური წარმოდგენის დახმარებით ა. ლურიემ (1955) ადვილად დაადგინა, რომ შემოუსაზღვრელ ფილაში $\left(|z| < h\right)$ ნულისაგან განსხვავდება თბური ძაბვის ტენზორის მხოლოდ σ_x, σ_y, τ_{xy} კომპონენტები. ისინი გამოისახებიან (x, y, z) ფუნქციით, რომელიც აქ თამაშობს ბრტყელ ამოცანაში r-ის ფუნქციის მსგავს როლს. ფუნქცია M განისაზღვრება კვადრატურებით ტემპერატურის მოცემული სტაციონარული განაწილების კანონის მიხედვით.

ფურიეს გარდაქმნების დახმარებით ს. დიმკოვმა (1966) ამოხსნა ამოცანა დრეკადი ფენის წონასწორობის შესახებ. ასეთმა მიდგომამ საშუალება მისცა ავტორს მიეღო ასევე ასიმპტოტური ფორმულები ამოხსნისათვის.

დ. მარტინენკომ (1964) მიიღო ამონახსნი მწკრივებში ფენისათვის, მის საზღვრებზე მოცემული გადაადგილებებისას (მეორე ძირითადი ამოცანა). ფენის შეყურსული ძალის მოქმედება განიხილეს ო. შეხტერმა და ო. პრიხოდჩენკომ (1964); მათ მიერ მიღებულ იქნა ამონახსნი ვერტიკალური ძალის მოქმედების შესახებ ფენის შიგნით, რომელიც დევს კლდოვან ფუძეზე. ცვლადი სისქის ფენისა და ცვლადი სისქის

მრგვალი ფილის შემთხვევა დატვირთვისას, რომელსაც გააჩნია ღერძული სიმეტრია გარჩეულია ი. სემიონოვას მიერ (1965).

მრგვალი სქელი ფილის წონასწორობა, რომელზეც მოქმედებს თანაბრად განაწილებული დატვირთვა, შესწავლილი იქნა ერთგვაროვანი ამონახსნების საშუალებით გ. ბუხარინოვის მიერ (1952), რომელმაც გამოიყენა პ. პაპკოვიჩის (1940) განზოგადოებული ორთოგონალურობის თანაფარდობა; ეს თანაფარდობა პაპკოვიჩის მიერ მითითებული იყო ერთგვაროვან ამონახსნთა ფუნქციების სასაზღვრო პირობებისათვის, რომლებიც შეესაბამებიან თვით ამ ფუნქციების და მათი პირველი წარმოებულების ნულად გადაქცევას ფენის პარალელურ გვერდებზე; პაპკოვიჩის მეთოდის მკაცრი დასაბუთება მოცემული იყო მოგვიანებით გ. გრინბერგის მიერ (1953).

მრგვალი ფილის წონასწორობა ნებისმიერი ღერძულსიმეტრიული დატვირთვისას გამოკვლეული იყო ერთგვაროვანი ამონახსნების დახმარებით ვ.პროკოპოვის მიერ (1958). მრგვალი ფილის ღერძულსიმეტრიული ღუნვა ზოგადად განხილულია ბ. აბრამიანისა და ა. ბაბლოიანის მიერ (1958); ზუსტი ამონახსნი ამოცანისა, გვერდითი ზედაპირით ჩამაგრებული ფილის წონასწორობის შესახებ, ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემის საშუალებით მოგვცეს ვ.გრინჩენკომ და ა. ულიტკომ (1963). ანალოგიური შედეგები მიიღო გ. ვალოვმა (1962). სქელი ფილების ღერძულსიმეტრიული ღუნვის ზოგიერთი კერძო შემთხვევა განხილულია ნ. გლაზუნოვას (1963) მიერ. ა. ბაბლოიანმა (1964) გამოიკვლია მრგვალი ფილის არაღერძულსიმეტრიული დატვირთვა, როცა გვერდით ზედაპირზე მოცემულია გადაადგილებები (ამონახსნი წარმოდგენილია ორმაგ მწკრივებში, რომელთა კოეფიციენტები იძებნება უსასრულო სისტემებიდან).

უსასრულო სქელი ფილა მრგვალი ნახვრეტით განიხილებოდა ო. აქსენტიანის (1965) ნაშრომში; ერთგვაროვანი ამონახსნების გამოყენებამ საშუალება მოგვცა გადაგვეწყვიტა ამოცანა ხვრელის ახლოს ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ, განტოლებათა უსასრულო სისტემაზე დაყვანით კოეფიციენტებისათვის ერთგვაროვანი ამონახსნებით; მ. აბენოვამ (1965) მსგავსი ამოცანა დაიყვანა ფრედჰოლმის ტიპის ინტეგრალურ განტოლებებამდე.

არასტაციონარული ამოცანა სქელი ფილის თერმოდრეკადი (კვაზისტატიკური) წონასწორობის შესახებ განხილულია ა. შეველევის (1965) მიერ. რ. რაპოპორტმა (1962) მიიღო მიახლოებითი ერთგვაროვანი ამონახსნები სქელი ფილისათვის, რომლებიც აგებულია როდესაც არ გვაქვს განივი დეფორმაციები. უკანასკნელ დაშვებას მივყავართ ორთოგონალურ საკუთარ ფუნქციებამდე.

უსასრულო ცილინდრის დრეკადი წონასწორობა შეისწავლებოდა ბევრი ავტორის მიერ. ღერძულსიმეტრიული ამოცანა ღრუ ცილინდრზე ნორმალური წნევის მოქმედების შესახებ, რომელიც მოდებულია გვერდითი ზედაპირის უბანზე, განხილული იყო 1943 წ.-ს გ. შაპიროს მიერ; ეს ამოცანა მან გადაწყვიტა ფურიე-ბესელის ინტეგრალების საშუალებით (ეს გადაწყვეტა მოგვიანებით გაიმეორა ვ. პოპოვმა, 1956). მთლიანი და ღრუ ცილინდრებისათვის ერთგვაროვანი ამონახსნები მათი ღერძულსიმეტრიული დეფორმაციებისას განიხილებოდა ვ. პროკოპოვის მიერ (1949, 1950) [20]. ღერძულსიმეტრიული ამოცანა უსასრულო მთლიანი ცილინდრისათვის, რომელიც დატვირთულია ნორმალური ძალვებით გვერდით ზედაპირებზე, შესწავლილი იყო ა. ლურიეს (1953) მიერ; ამ ამოცანის ამონახსნი წარმოდგენილი ფურიეს ინტეგრალების ფორმით კონტურული ინტეგრების მეშვეობით, გამოსახულია ფუნქციებით, რომლებიც შეესაბამებიან ცილინდრის შესახებ ამოცანის ერთგვაროვან ამონახსნებს. ზღვრული გადასვლით მიღებულია ამოცანის ამონახსნი „შემოსარტყლული“ ცილინდრის შესახებ. მხები დატვირთვის შემთხვევა და ასევე ზედაპირული ძალვებით უსასრულო ცილინდრის ღუნვის შესახებ ამოცანა, გამოკვლეულია იმავე მეთოდით პ. ლივშიცის (1960, 1963, 1964) სტატიებში.

უსასრულო ცილინდრის გვერდით ზედაპირებზე მოქმედი რთული დატვირთვის შემთხვევაში, როცა დატვირთვა წარმოიდგინება ფურიეს ინტეგრალით ღერძულ კოორდინატზე და ფურიეს მწკრივებით კუთხეზე, გამოკვლეული იყო კ. სოლიანიკ-კრასის მიერ (1960) [21]. მის მიერვეა განხილული უფრო ზოგადი ამოცანა ბრუნვის ტანის წონასწორობის შესახებ, როცა მერიდიანული კუთხის ტრიგონომეტრიული ფუნქციები შეიძლება იყოს გამოყოფილი ამონახსნში ცალკეული თანამამრავლების სახით (1958); ღრუ ცილინდრისათვის მის მიერ იქნა გამოკვლეული

(1965) დატვირთვის გავლენა, რომელიც განაწილებულია გვერდით ზედაპირზე φ კუთხის მიმართულებით ნებისმიერი სახით და რომელიც წარმოადგენს პოლინომს ღერძული z კოორდინატით (ტორსებზე სრულდებოდა ინტეგრალური პირობები).

შერეული ღერძულსიმეტრიული ამოცანა უსასრულო მთლიანი ან ღრუ ცილინდრისადმი განიხილებოდა ბ. კოგანის, ა. ხრუსტალიოვის, ფ. ვაინშტეინის (1958, 1959, 1963) სტატიებში; ლიავის ძაბვათა ფუნქცია იგებოდა მათ მიერ კონტურული ინტეგრალის სახით, რომელიც შეიცავდა სათანადოდ შერჩეულ ფუნქციებს, დამოკიდებულებს ერთგვაროვანი ამონახსნების პარამეტრებზე ცილინდრისათვის; ბ. კოგანისა და ა. ხრუსტალიოვის ნაშრომში (1959) გამოყენებულია წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი.

ღრუ თუ მთლიანი სასრული ცილინდრის წონასწორობა ღერძულსიმეტრიულ შემთხვევაში შეისწავლებოდა ერთგვაროვანი ამონახსნების საშუალებით ვ.პროკოპოვის (1950, 1958) მიერ; გ. ბუხარინოვმა (1956) დაიყვანა სასრული სიგრძის მთლიანი ცილინდრის ღერძულსიმეტრიული დეფორმაციის შესახებ ამოცანის ამოხსნა დამატებითი ფუნქციის მოძებნამდე, რომლისთვისაც იგება ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება. ორმოცდაათიანი წლების შემდგომ გამოჩნდა ბევრი ნაშრომი, მიძღვნილი სასრული სიგრძის მთლიანი ცილინდრის – წონასწორობის ამოცანისადმი, რომლებშიც ამოცანის ამოხსნა დადის წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სიმრავლეზე (ბ. აბრამიანი, 1954, გ. ვალოვი, 1962; ვ. ლიხაჩოვი, 1965). მრგვალი ცილინდრის კუმშვას იკვლევდნენ გ. მიროშნიჩენკო (1957) და გ. ვალოვი (1961) (1957); მბრუნავი ცილინდრის წონასწორობა განიხილა ვ. გრინჩენკომ (1964); მის მიერვეა მოცემული დეტალური ანალიზი ღერძულსიმეტრიულ ამოცანაზე სასაზღვრო პირობების ყველა ასპექტის ზუსტი შესრულების შესახებ ნახევრად უსასრულო ცილინდრისათვის (1965). სასრული სიგრძის ცილინდრის ღერძულსიმეტრიული დეფორმაცია, რომელიც გაკეთებულია ტრანსვერსალურად იზოტროპული მასალისაგან, შეისწავლებოდა ა. ბაბლოიანის მიერ (1961).

ცალკეულ შემთხვევებში ხერხდება, რომ დაკმაყოფილდეს ყველა სასაზღვრო პირობა სასრულო სიგრძის ცილინდრის წონასწორობის

შესახებ ამოცანაში, ისე რომ არ მივმართოთ ამ დროს უსასრულო სისტემათა ამონახსნებს (იხ. ბ. აბრამიანი, 1958; გ. ვალოვი, 1957, 1958).

ცილინდრის ზედაპირებზე ყველა სასაზღვრო პირობების ერთდროული ზუსტი შესრულების სირთულემ გვაიძულა ვეძებოთ ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი გზები; ასე, ს. ტრენინმა (1952) [22] წარმოადგინა დაძაბული მდგომარეობა ორი ტენზორით: ძირითადით და მაკორექტირებელით, ამასთან უკანასკნელი არ იძლევა ძაბვებს გვერდით ზედაპირებზე (ერთგვაროვანი ამონახსნი) და მისი პარამეტრები განისაზღვრება ენერგეტიკული გზით. უფრო ზოგადი (არა ღერძულსიმეტრიული) ამოცანა ღრუ ცილინდრზე განიხილებოდა ანალოგური სახით ვ. იონოვის (1957) მიერ; ს. შაინმა (1962) მოგვცა მაკორექტირებელი ტენზორის აგება პირველ მიახლოებაში.

სქელკედლიანი ცილინდრის არაღერძული დეფორმაცია იყო შესწავლილი მათი მწკრივებში წარმოდგენის საშუალებით, რომლებიც შეიცავდნენ ბესელისა და მაკდონალდის ფუნქციებს ი. სმოლოვიკის და ა. შეპეტევის (1961) ნაშრომში და ვ. სუმცოვის (1957-1959) ნაშრომებში. ღრუ ცილინდრის დატვირთვის ზოგად შემთხვევაში სასაზღვრო პირობების მკაცრი შესრულება, რომელთაც მივყავართ უსასრულო სისტემებამდე იყო განხორციელებული ე. ბაიდას (1959, 1960) მიერ.

ა. კვიტკას (1959) სტატიები მიძღვნილია ხერხების შემუშავებისადმი, რომლებშიც საშუალება მოგვეცემოდა სქელტანიანი ცილინდრის ღერძულსიმეტრიულ დეფორმაციაზე გამოკვლევები დაგვეყვანა გამომთვლელი მანქანების გამოყენებაზე.

ფ. გოხბაუმმა (1964) გამოიყენა ა. ლურიეს სიმბოლური მეთოდი მთლიანი და ღრუ ცილინდრების მიმართ, რომლებიც განიცდიდნენ ძირითადად ღერძული სიმეტრიული დატვირთვის მოქმედებას.

ღრუ (და მთლიანი) ცილინდრების გაანგარიშების მიახლოებითი მეთოდი მათი ღერძულსიმეტრიული დატვირთვისას იყო შემოთავაზებული ვ. ბიდერმანის (1946; 1950) მიერ; წარმოადგენდა რა მხებ ძაბვებს ღერძული და რადიალური ფუნქციების ნამრავლის ჯამის სახით, ბიდერმანი იღებდა რადიუსის შესაფერის ფუნქციებს, ხოლო ღერძული ფუნქციებისათვის ღებულობდა პოტენციალური ენერგიის მინიმუმის პრინციპიდან გამომდინარე ჩვეულებრივ დიფერენციალურ

განტოლებებს, რომლებიც შეიცავდნენ მარჯვენა ნაწილებში ფუნქციებს, დამოკიდებულს ცილინდრის გვერდით ზედაპირებზე მოდებულ ნორმალურ ძალებზე. მეთოდის გავრცობა მხები ძალების არსებობის შემთხვევაზე განახორციელა შემდგომში ვ. გორსკიმ (1963).

ღრუ ცილინდრების გაანგარიშების სხვა მიახლოებითი ხერხი, რომლებიც დატვირთულია გვერდით ზედაპირზე, მითითებულია ს. ბოიარიშნიკოვის (1953) მიერ, რომელმაც შემოგვთავაზა გადაადგილებებისათვის გამოსახულების გამოყენება, რაც თავის მხრივ წარმოადგენს თხელი დრეკადი გარსების თეორიაში გამოყენებული მეთოდების განზოგადებას. თანდათანობითი მიახლოების ორიგინალური მეთოდი, მისადაგებული ამოცანასთან ცილინდრის წონასწორობის შესახებ, შეიმუშავა ფ. დეტინკომ (1953) [23]; მან ააგო ამონახსნი მწკრივებში მცირე პარამეტრის ხარისხებად (პუასონის კოეფიციენტი).

სტაციონარული ამოცანა ღრუ ცილინდრის (ღერძული სიმეტრიის შემთხვევაში) თერმოდრეკადული წონასწორობის შესახებ შეისწავლებოდა ჯერ პ. ოგიბალოვის (1954), ხოლო შემდეგ ი. შევჩენკოს (1958) მიერ, რომელმაც გაითვალისწინა მასალის დრეკადობის მოდულის ცვლილება ცილინდრის ღერძის გასწვრივ. ა.პოდგორნიმ (1965) გაითვალისწინა ცილინდრის ტორსების გავლენა და ასევე ცენტრიდანული ძალების გავლენა; ამოცანა ამოხსნილია მიახლოებით, ლაგრანჟის ვარიაციული პრინციპის გამოყენებით. პ. ერმაკოვმა (1961) და ვ. შაჩნევმა (1962) განიხილეს თერმოდრეკადობის სტაციონარული ამოცანა სასრული სიგრძის მთლიანი ცილინდრისათვის მისი ღერძულსიმეტრიული დეფორმაციისას; ამ ნაშრომთაგან პირველში პირობები ტორსებზე სრულდება მიახლოებით, თანახმად ბიდერმანის მეთოდისა, ხოლო მეორეში – ამოცანის ამოხსნა დაყვანილია ინტეგრალურ-დიფერენციალური განტოლების ამოხსნამდე. თერმოდრეკადობის სტაციონარული ამოცანა უსასრულო ცილინდრისათვის რამდენიმე ღრუთი ფორმულირებულია ა. კოსმოდამიანსკის (1962) [24] მიერ – როგორც ტემპერატურული ველი, ასევე ტემპერატურული მდგომარეობა განისაზღვრება ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდით.

თერმოდრეკადობის არასტაციონარული ამოცანა მბრუნავი ღრუ ცილინდრისათვის შეისწავლებოდა ი. შევჩენკოს (1961) მიერ, რომელიც

ასრულებდა პირობებს ტორსებზე, კასტილიანოს ვარიაციული მეთოდის საშუალებით. ა.შეველევი (1966) ხსნიდა თერმოდრეკად ამოცანას უსასრულო ცილინდრისათვის, რომლის გარშემოც ტემპერატურა იცვლება ექსპონენციალური კანონით დროის მიხედვით. ის საზღვრავდა მაქსიმალური თბური ძაბვების დამოკიდებულებას გაცხელების პარამეტრებზე, რაც საშუალებას იძლევა ჩამოვაყალიბოთ ოპტიმალური ამოცანა. ა. უზდალიოვმა (1962) [25] განიხილა თერმოდრეკადობის არასტაციონარული ბრტყელი ღერძულსიმეტრული ამოცანა ანიზოტროპული მთლიანი და ღრუ ცილინდრებისათვის.

ერთგვაროვანი ამონახსნები ღრუ სფეროსათვის, მისი სიმეტრიული დეფორმაციის შემთხვევაში იყო მითითებული 1943 წელს ა. ლურიეს მიერ; ამ ამონახსნების გამოყენებამ საშუალება მოგვცა ამოგვეხსნა ჰიპოთეზების საშუალებით სფერო, რომელიც მოჭრილია კონუსური ზედაპირით და რომელსაც აქვს მწვერვალი ცენტრში ერთ ან ორივე პოლუსთან; ლურიემ ჩაატარა აგრეთვე იმ ამონახსნების სიზუსტის შეფასება, რომლებიც დაფუძნებულია კირჰხოფ-ლიავის კინემატიკური ჰიპოტეზებით სარგებლობაზე სფერულ გარსთან მიმართებაში.

ღრუ სფეროს წონასწორობის შესახებ ამოცანა მისი ნებისმიერი დეფორმაციისას ამოხსნილია ა. ლურიეს (1953) მიერ პ. პაპკოვიჩის ზოგადი ამონახსნის საშუალებით; მეოთხე ფუნქციის მარჯვე არჩევისა და ჰარმონიული ვექტორების წყალობით ავტორმა მოახერხა არსებითად შეეკვეცა გამოთვლათა მოცულობა ღრუ სფეროსათვის როგორც მეორე ძირითადი ამოცანის შემთხვევაში, ასევე პირველი ძირითადი ამოცანის შემთხვევაშიც. დრეკადობის თეორიის სივრცითი ამოცანების გამოკვლევათა შედეგები თავმოყრილია მის მონოგრაფიაში (1955), სადაც შესულია ასევე ამოცანების ამონახსნები მძიმე და მბრუნავი ბურთის შესახებ სფერული ღრუს შემოუსაზღვრელ გარემოში და სხვა.

სფეროს შესახებ ამოცანის ამოხსნის მეორე ხერხი, დაფუძნებული დრეკადობის თეორიის ბრტყელ და ღერძულსიმეტრიულ ამოცანებს შორის კავშირზე და ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის გამოყენებაზე, შემოგვთავაზეს ა. ალექსანდროვმა და ი. სოლოვიოვმა (1962) [26], კუმშვა, სუფთა ღუნვა და ღუნვა იმ ღრუ სფეროსი, რომელიც მოჭრილია

პოლუსების კონუსური ზედაპირებით განხილულია კ.სოლიანიკ-კრასას (1962) [27] მიერ;

დაძაბული მდგომარეობა სფერულ სარტყელში, რომელიც იმყოფება შიდა წნევის მოქმედების ქვეშ, შეისწავლებოდა ა. ულიტკოს (1962) მიერ.

ამოცანა ვერტიკალური ცილინდრული სიღრუვის სიახლოვეს მძიმე დრეკადი მასივის დაძაბული მდგომარეობის შესახებ პირველად დასმული იყო ა. დინიკის (1925) [28] მიერ, სამთო ქანების წნევის შესახებ საკითხთან კავშირში; უფრო დაწვრილებით ეს ამოცანა შემდგომში შეისწავლებოდა ს. ლეხნიცკის (1938, 1940) მიერ, მათ რიცხვში ტრანსვერსალურ იზოტროპული ნახევარსივრცისათვისაც. ძაბვების კონცენტრაციაზე ცილინდრული სიღრუვის გავლენა სივრცითი დაძაბული მდგომარეობისას გამოიკვლია ს. გუტმანმა (1960). ცილინდრული სიღრუვის ზედაპირის უბანზე მოდებული გარე ძალების გათვალისწინება მოახდინა გ.ჩაკვეტაძემ (1956, 1959); მის სხვა ნაშრომებში განიხილებოდა დრეკადი ნახევარსივრცე სფერული (1955) და ცილინდრული (1956) სიღრუვეებით; გამოკვლევის მისი ხერხი დაფუძნებულია ღერძულსიმეტრიულ ამოცანაში კომპლექსური ცვლადის შემოტანასა და ნ. მუსხელიშვილის მეთოდების მისადაგებაზე. სფერული სიღრუვის სიახლოვეს ძაბვათა კონცენტრაცია მძიმე ნახევარსივრცეში გამოიკვლეოდა ნ.ფლეიშმანისა და ვ. გნატიკოვის (1954) მიერ.

რ. კაუფმანმა (1958) [29] განიხილა სფერული სიღრუვის შემცველი დრეკადი ფენის ამოცანა; მისი ამოხსნის მეთოდი შედგება სფერული კოორდინატთა სისტემის სათავის გადატანაში და სფერულ ფუნქციებისათვის გადატანის ფორმულების შემოტანაში; სხვა სტატიაში კაუფმანმა იმავე მეთოდით ამოხსნა ამოცანა სფეროს წონასწორობის შესახებ არაკონცენტრირებული სფერული ღრუთი. პ.პერლინმა (1964) ააგო მეორე ძირითადი ამოცანის ამონახსნი ღრუ ბრუნვითი ელიფსოიდის შესახებ, რომლის შიდა ზედაპირს წარმოადგენს სფერო; ი.პოდილჩუკმა (1965) შეისწავლა სფერულ კოორდინატებში შიდა და გარე ამოცანები ბრუნვითი ელიფსოიდისათვის. აქ ნახსენებ ოთხ ნაშრომში ამონახსნი იგება მწკრივებში, რომელთა კოეფიციენტები უნდა განისაზღვრონ განტოლებათა უსასრულო სისტემიდან.

ვ. ჟაროვმა (1963) დასვა მნიშვნელოვანი ამოცანა თერმოდრეკადი ძაბვების შესახებ მაგრავიტირებელ სფეროში ტემპერატურის განაწილების ნებისმიერი კანონისას; თერმოდრეკადობის სტაციონარული ამოცანა ღრუ სფეროსათვის, რომლის მოდულიც არის რადიუსის ხარისხოვანი ფუნქცია, გადაწყვიტა ი.დანილინამ (1962).

საკითხი კონუსის (მთლიანი და ღრუ) წონასწორობის შესახებ ღერძულსიმეტრიული დატვირთვის მოქმედებისას განიხილა გ. შაპირომ (1944); მან მიიღო ამოცანის პოლინომური ამონახსნი ზედაპირული დატვირთვების ზოგიერთი ტიპისა და სიმძიმის ძალის მოქმედებისათვის; სხვაგვარი ხერხით ეს ამოცანა გამოიკვლია ა.ალექსანდროვმა (1962) [30]. კონუსის მწვერვალზე მოდებული შეყურსული მომენტის მოქმედება განიხილა ა. ულიტკომ (1960); მის სხვა ნაშრომში (1960) მელინის გარდაქმნების საშუალებით იხსნება ზოგადი ამოცანა დრეკადი კონუსის წონასწორობის შესახებ. ღერძულსიმეტრიულად დატვირთული კონუსის დრეკადი წონასწორობა განიხილა აგრეთვე კ. სოლიანიკ-კრასმა (1955, 1962); ამონახსნი მან წარმოადგინა ფურიეს ინტეგრალების სახით. ვ. იონოვმა (1965) მოგვცა ამოცანის ამონახსნი კონუსური ტანის ღერძულსიმეტრიული დეფორმაციის შესახებ; სასაზღვრო პირობების შესრულებას მივყავართ განტოლებათა უსასრულო სიმრავლისაკენ მაკორექტირებელი ტენზორის მუდმივებისათვის. ზედაპირულად დატვირთული კონუსის გრეხა განხილულია კ. სოლიანიკ-კრასას (1965) და პ.ნედორეზოვის (1965) მიერ.

მძიმე ბრუნვითი პარაბოლოიდის წონასწორობის შესახებ ამოცანა გადაწყვეტილია გ. შაპიროს (1950) [31] მიერ; პარაბოლოიდის გაჭიმვა და ღუნვა, და ასევე ტანის, რომელიც შეიცავს პარაბოლოიდურ ღრუს, გაჭიმვა და ღუნვა განხილულია კ. სოლიანიკ-კრასას (1958) მიერ; მის სხვა ნაშრომში (1958) გამოკვლეულია ელიფსოიდისა და ცალღრუიანი ჰიპერბოლოიდის კუმშვა; ჰიპერბოლოიდის გრეხა გამოიკვლიეს ნ. ლებედევმა და ს. სკალსკაიამ (1966).

ტოროიდალური კოორდინატების საშუალებით ა. ზახარევიჩმა (1952) [38] განიხილა ბრუნვითი ტორის წონასწორობა; ვ. ლევშინმა (1962) ააგო გარე და შიდა წნევის მოქმედების ქვეშ მოქცეული ღრუ ტორის ამოცანის ამონახსნი. მრგვალი განივი კვეთის მქონე ტორის გრეხა, ხრახნული

ზამბარების გაანგარიშებასთან კავშირში, რომელთაც ხვეულთა მცირე ბიჯი აქვთ, დაწვრილებით შეისწავლა კ.სოლიანიკ-კრასამ (1950); ამონახსნი მან მიიღო ბიპოლარული კოორდინატების გამოყენებით და იგი შეიცავს მწკრივებს, რომლებშიც ჰიპერბოლური, ტრიგონომეტრიული ფუნქციები და მიერთებული ლეჟანდრის ფუნქციებია ჩართული.

მცირე ელიფსოიდალური ღრუს შემცველი მრგვალი ღეროს გაჭიმვა გამოკვლეულია კ.სოლიანიკ-კრასის (1958) მიერ ელიფსოიდალური კოორდინატების გამოყენებით. ნ. ფორსმანმა (1958) [32] გადაწყვიტა ამოცანა მრგვალი განივი კვეთის მქონე გაჭიმულ ღეროში ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ, რომლებიც სისქის ცვლილების ადგილშია: მიღებულია განსაზღვრული ინტეგრალების ამონახსნი, რომლებიც შემდეგ გამოითვლება მიახლოებითი ფორმით.

1963 წლიდან გამოჩნდა ი. ვოროვიჩისა და მისი მოწაფეების ნაშრომები მიძღვნილი ფილებისა და გარსებისათვის ასიმპტოტური ამონახსნების აგებისადმი, ამასთან ასეთი აგების საფუძვლად მიიღება დრეკადობის თეორიის სამგანზომილებიანი ამოცანის შესაბამისი ერთგვაროვანი ამონახსნები; ლაგრანჟის ვარიაციული მეთოდით დგება განტოლებათა უსასრულო სისტემები საძიებელი ფუნქციების კონტურული მნიშვნელობებისათვის; ამ სისტემათა ამონახსნი იგება მწკრივებში ფილის ან გარსის სისქის ხარისხების მიხედვით. ამ მეთოდით გამოკვლეულია ფილის ღუნვის ამოცანა (ო. აქსენტიანი და ი. ვოროვიჩი (1963, 1964), და ასევე ცილინდრული და სფერული გარსების შესახებ ღერძულსიმეტრიული ამოცანები (ნ. ბაზარენკო და ი.ვოროვიჩი, 1965; ტ. ვილენსკაია და ი. ვოროვიჩი, 1966) [33].

ლამეს კლასიკური ამოცანა მართკუთხა პარალელეპიპედის წონასწორობის შესახებ, რომელიც დატვირთულია წახნაგებზე მოცემული ძალვებით, იპყრობს ბევრი მკვლევარის ყურადღებას, დაწყებული მ. ფილონენკო-ბოროდიჩის შრომებიდან. ამ მიმართულების პირველ სტატიაში, რომელიც 1946 წელს გამოქვეყნდა, მ.ფილომენკო-ბოროდიჩმა შემოიტანა განხილვაში კოსინუს-ბინომი – მიმდევრობა არაორთოგონალური ფუნქციებისა, რომლებსაც გააჩნიათ სისრულე მათი განსაზღვრის ინტერვალში და იქცევიან ნულად თავის პირველ წარმოებულებთან ერთად ინტერვალის საზღვრებზე.

მ. ფილონენკო-ბოროდიჩის შემდგომ ნაშრომებში კოსინუს-ბინომი მის მიერ გამოიყენებოდა მართკუთხა პარალელეპიპედის წონასწორობის შესახებ ამოცანაში მიახლოებითი ამოხსნისათვის. ამოცანის ამოხსნის იდეა შედგებოდა ძაბვათა ტენზორის ორ ნაწილად გაყოფაში: ძირითადი ტენზორი, რომელიც აკმაყოფილებს წონასწორობის განტოლებებსა და პარალელეპიპედის წახნაგების დატვირთვის პირობებს და მაკორექტირებელი ტენზორი, რომელიც აიგებოდა კოსინუს-ბინომებისა და მათი წარმოებულების საშუალებით. უკანასკნელი ტენზორი, რომელიც აკმაყოფილებდა რა წონასწორობის განტოლებებსა და ნულოვან სასაზღვრო პირობებს, შეიცავდა ნებისმიერ მუდმივებს, რომლებიც განისაზღვრება კასტილიანოს ვარიაციული მეთოდით. მ. ფილონენკო-ბოროდიჩმა (1951) შეისწავლა ამოცანა პარალელეპიპედის ტოლი და საპირისპიროდ მიმართული დატვირთვებით შეკუმშვის შესახებ და განიხილა პარალელეპიპედის თერმოდრეკადი წონასწორობა; მოგვიანებით (1953) მან განავრცო ეს მეთოდი ცილინდრული კოორდინატების შემთხვევაზე: მასვე ეკუთვნის მოსაზრება ძირითადი ტენზორის შერჩევის შესახებ ნებისმიერად დატვირთული პარალელეპიპედისათვის.

დრეკადი პარალელეპიპედის წონასწორობის შესახებ ამოცანის ამოხსნისადმი სხვა მიდგომაა განვითარებული ბ. ბონდარენკოს (1961, 1963) ნაშრომებში, რომელიც იყენებდა გადაადგილებებში დრეკადობის თეორიის განტოლებების პოლინომურ ამონახსნს, ამასთან ნებისმიერი კოეფიციენტები ამ ამონახსნებში განისაზღვრება უმცირესი კვადრატების მეთოდით.

ზოგიერთი კერძო ამოცანები მართკუთხა პარალელეპიპედისათვის, გადაწყვეტილი მწკრივებში, განხილულია გ. ვალოვის (1959), ა.მელქონიანის (1960), ა .ბაბლოიანის და ს. სააკიანის (1960) მიერ.

პარალელეპიპედის წონასწორობის შესახებ ამოცანის შესწავლას, უსასრულო სისტემების საშუალებით, ეძღვნება ე. ვაიდას (1958, 1959) ორი სტატია. უფრო დაწვრილებითი გამოკვლევები პარალელეპიპედის წონასწორობის შესახებ, სხვადასხვა ტიპის დატვირთვებისა და სხვადასხვა სასაზღვრო პირობებისათვის უსასრულო სისტემების საშუალებით, ჩატარებულია გ. ბალოვის (1957-1959, 1966) ს.სააკიანის (1965), ა. ბაბლოიანის და ს. სააკიანის (1964) შრომებში; ამ ციკლში

განხილულია როგორც პირველი და მეორე ძირითადი ამოცანები, ისე შერეული და საკონტაქტო ამოცანების ზოგიერთი ტიპები, ამასთან განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობა მიღებული უსასრულო სისტემების რეგულარობის (ანუ კვაზი-სრული-რეგულარობის) დამტკიცება.

1.1-ის დასკვნები

ლიტერატურის მიმოხილვიდან შეიძლება შემდეგი დასკვნების გაკეთება:

– სამეცნიერო ლიტერატურაში პრაქტიკულად არ გვხვდება თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების გაანგარიშების მეთოდების ისტორიული ანალიზი;
– ზოგიერთი შრომების გამოკლებით, განზოგადოებული იმპულსური ფუნქციები გამოიყენებიან მხოლოდ დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერისათვის, მაგრამ არა მათი ამოხსნების მისაღებად. ამავე დროს წყვეტილი ფუნქციის შემოღება იძლევა გაანგარიშების ისეთი პრინციპულად ახალი მეთოდების მიღების საშუალებას, რომლებიც აფართოებენ ამოხსნადი ამოცანების კლასს და ანზოგადებენ ყველა ამოხსნად ამოცანებს ერთიან მეთოდოლოგიურ საფუძველზე. დრეკადობის წრფივი თეორიის ისტორიის საფუძველზე დღეისათვის კიდევ უფრო მეტი ისტორიული მასალის გადმოცემა და მისი ანალიზია გასაკეთებელი.

2. შედეგები და მათი განსჯა

2.1. სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანების წარმოდგენა

როგორც ცნობილია, პრიზმული ღეროს თავისუფალი გრეხის ამოცანა დაიყვანება ჰარმონიულ პრობლემაზე, რომლის ამოხსნათა მეთოდები კარგადაა შემუშავებული. ადრეული ნაშრომები ღეროების გრეხაზე მიძღვნილია ამ ამოცანის ჩაკეტილი სახით ან ტრიგონომეტრიული მწკრივების საშუალებით ამოხსნისადმი; მათ მიეკუთვნება ბ. გალიორკინის სტატიები, რომლებშიც გამოკვლეულია ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედის ფორმის განივი კვეთის მქონე პრიზმის გრეხა (1919) [3] და პარაბოლური განივი კვეთის პრიზმები (1924) [3]; ამოცანა რიგი კვეთების გრეხის შესახებ, რომლებიც შემოსაზღვრულია ალგებრული მრუდებით, გადაწყვეტილია დ. ბენოვის (1935, 1937) და დ. გავრას (1939) [34] ნაშრომებში; მოგვიანებით პარაბოლური პრიზმების გრეხას იკვლევდა ვ. ბლოხი (1959). მთლიანი ან ღრუ ლილვების გრეხისას რადიალური ბზარის გავლენა შესწავლილია ა. ლოკშინის (1928) და ვ. ლისკოვის (1930) სტატიებში. გრეხის თეორიის ამოცანების ამოხსნის სხვადასხვა მეთოდებისადმი, (ექსპერიმენტალური მეთოდების ჩათვლით), მიძღვნილია ა. დინიკის მონოგრაფია, რომელიც გამოქვეყნებულია 1938 წელს.

1925 წელს გ. კოლოსოვმა და დ. გავრმა გრეხის ამოცანის ამოხსნისას პირველად გამოიყენეს კომპლექსური ცვლადები; მათ განიხილეს ამოცანა მცირე ცენტრალური კუთხით არაწრიული სექტორის გრეხის შესახებ. ამ მიმართულებით ფუნდამენტური შედეგები მიიღო ნ. მუსხელიშვილმა (1929), რომელმაც აჩვენა, რომ ცალმბული და ორადბმული მიდამოს გრეხის ამოცანა, რომელიც ასახავს მოცემულ მიდამოს შესაბამისად წრესა და წრიულ რგოლზე, დაიყვანება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის მოძებნაზე. პრიზმული ღეროების გრეხის ამოცანების ამოხსნისას კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდები გამოიყენებოდა ასეთი ღეროების სხვადასხვა პროფილებისათვის დ. ავაზაშვილის (1940), ა. ბატირევის

(1953), ხ. მუშტარის (1938), ა. უგოდჩიკოვის (1956) და სხვათა სტატიებში.

რ. კუზმინმა (1946) გამოიყენა კონფორმული ასახვა სხვა ფორმაში; მან მიიღო დასაგრეხი ღეროს სიხისტის უშუალო გამოთვლისათვის მოხერხებული ფორმულა. ამ ფორმულამ საშუალება მოგვცა გამოგვეთვალა სიხისტე იმ პროფილებისათვის, რომელთა კონტური შეიცავს კუთხის წერტილებს. სხვა ნაშრომში, რომელიც ეკუთვნის პ. კუფარიოვს (1937), კომპლექსური ცვლადის ფუნქციათა მეთოდი ვრცელდება ისეთ კონტურის შემთხვევაზე, რომელიც შეიცავს კუთხის წერტილებს. კუფარიოვის მეთოდი ო. ბაბაკოვმა (1954) გამოიყენა ზეტური პროფილის გრეხის განხილვისას.

კონფორმული ასახვის მეთოდით ე. შირიაევმა განიხილა ლილვის გრეხა, რომელსაც რადიალური და ასევე გრძივი რკალური ბზარი აქვს (1956). სხვა ნაშრომში შირიაევმა გამოიკვლია მრგვალი ლილვის გრეხა, რომელსაც სხვადასხვა სიღრმის ჭრილი აქვს (1958). წრიული ამონაჩარხების მქონე ლილვის გრეხას სწავლობდა ა. სკოროხოგატკო (1958, 1962) [35]. ღრუ საავიაციო პროფილების გრეხა, კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის საშუალებით განიხილა გ.ტირსკიმ (1959).

კუთხოვანისებრი, ჯვარისებრი და ტესებრი პროფილების გრეხის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი კონფორმული ასახვის საშუალებით მიიღო ვ.მახოვიკოვმა (1957). განავითარა რა კონფორმული ასახვის მიახლოებითი ხერხები, ა. უგოდჩიკოვმა (1956) [36] განიხილა მრგვალი ლილვის გრეხა, რომელსაც კბილაკები (ღარობები) აქვს და მილოვანი ლილვი, რომელსაც შიგა კბილაკები (ღარობებიანი ქურო) აქვს.

ღრუ ღეროების გრეხისა და ღუნვის ამოცანის ამოხსნის ახალი ხერხი 1948 წელს შემოგვთავაზა დ. შერმანმა [37]. მან შემოიტანა დამხმარე ფუნქცია, რომელიც დაკავშირებულია ორადბმული მიდამოს ერთ-ერთ საზღვარზე გრეხის კომპლექსურ ფუნქციასთან რაღაც თანაფარდობით; ეს დამხმარე ფუნქცია აკმაყოფილებს ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებას, რომლის ამოხსნაც დაიყვანება კვაზირეგულარულ (ხოლო ხანდახან სრულიად რეგულარულ) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრული სისტემის ამოხსნამდე. შერმანმა ამ ხერხით ამოხსნა წრეწირებითა და ელიფსებით (1950, 1951, 1953)

შემოსაზღვრული ორადბმული პროფილების გრეხის რიგი კონკრეტული ამოცანები.

შემდგომი თეორიული ძიებანი ამ მიმართულებით, რომლებმაც მიგვიყვანეს ღრუ ღეროების გრეხის რიგი ამოცანების ამოხსნამდე, ტარდებოდა დ. შერმანის (1953, 1955, 1969) [38], რ. სტეპანოვის და დ. შერმანის (1952) [39], ი. ამენზადეს (1958) [40] მიერ. შერმანის მეთოდი იყო გამოყენებული ლ. კაპანიანის (1952) [41], ვ.იაკოვლევის (1956) და აგრეთვე ი. ბახტიაროვის (1959) ნაშრომებში კოლოფა ღეროების გრეხისათვის, მ. ისმაილოვის (1959) ნაშრომში კი სამკუთხა პრიზმული ღრუს მქონე მრგვალი ლილვის გრეხისათვის. მ. ნეიმანის (1958) ნაშრომში მრავალწახნაგა თანაღერძული ღრუს მქონე მრგვალი ლილვის გრეხის ამოცანაში.

პრიზმული ღეროების, რომელთაც აქვთ გადამკვეთი წრეწირების ორი რკალით შემოსაზღვრული განივი კვეთი, გრეხისა და ღუნვის ამოცანების ზუსტი ამონახსნები, მიღებული იყო 1949 წელს ი. უფლიანდის მიერ ბიპოლარული კოორდინატების გამოყენებით; იმ მიდამოებისათვის, რომლებიც უშვებენ ამონახსნს ბიპოლარულ კოორდინატებში, ღუნვისა და გრეხის ამოცანების ამოხსნის დაწვრილებით გადმოცემა მოყვანილია მის მონოგრაფიაში (1950) [42]. მოგვიანებით ვ. ბლოხმა (1956) გამოაქვეყნა სტატია, მიძღვნილი ორთოგონალური წრეხაზების რკალებით შექმნილი მართკუთხედის გრეხის ამოცანისადმი ბიპოლარულ კოორდინატებში.

ლინზისებრი კვეთის მქონე ღეროს გრეხას განიხილავდნენ ი.ბურაკი და მ.ლეონოვი (1960) [43]. ს. გრიდნევმა ბიპოლარული კოორდინატები გამოიყენა ორადბმული პროფილის გრეხის ამოცანის შესწავლისას (1963) და დაიყვანა ასეთი ამოცანის ამოხსნა უსასრულო სისტემებამდე.

რგოლის სექტორის მიდამოსათვის გრეხის ამოცანის ამოხსნა მიიღო კ.კიტოვერმა (1954) [44] ელიფსებისა და ჰიპერბოლების რკალებით შექმნილი რიგი მიდამოებისათვის. გრეხის ამოცანის ზუსტი ამონახსნები ელიფსურ კოორდინატებში მიიღო ვ. ბლოხმა (1964).

ღეროების გრეხისა და ღუნვის შესახებ ამოცანის ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები შემუშავებულია დ. პანოვის მიერ (1934, 1936,

1938) [45]. ის ანვითარებდა მცირე პარამეტრის და გრაფიკულ მეთოდებს, შეისწავლიდა პრიზმატულთან ახლო მყოფი ღეროების გრეხას, ხრახნული პროფილის გრეხასა და ღუნვას; მან აგრეთვე განიხილა ორტესებრი კოჭისა და სოგმანის მქონე ლილვის გრეხის ამოცანა სასრულ სხვაობათა მეთოდით.

გრეხის თეორიაში მ. სლობოდიანსკის ნაშრომებში (1939, 1940, 1951) [46, 47, 48] სასრულ სხვაობათა მეთოდი გამოყენებული იყო მხოლოდ ერთი ცვლადით და ამოცანის ამონახსნი დადიოდა ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე; ამ მეთოდმა საშუალება მისცა სლობოდიანსკის, ხოლო შემდეგ ა.პივოვაროვს (1953) [49] გამოეთვალათ პოლიგონალური პროფილების შემავალ კუთხეებში კონცენტრაციის კოეფიციენტები. ანალოგიური მეთოდი იყო გამოყენებული ვ. ფადეევას (1949) მიერ ტრაპეციოდალური კვეთის მქონე ღეროს გრეხის შესახებ ამოცანის ამოხსნისას. ნაგლინი კუთხოვანას გრეხის შესახებ ამოცანა შეისწავლა ბ. ლოპოვოკმა (1952); ბ. როხოვსკაიამ (1946) სასრულ სხვაობათა მეთოდით განიხილა ნაგლინი პროფილების (კუთხოვანა, შველერი და ორტესებრი) გრეხის ამოცანა; მის სხვა ნაშრომში (1956) და აგრეთვე ე.ობოლენსკის (1959) სტატიაში ეს მეთოდი გამოყენებულია ღარობების მქონე ლილვის გრეხის ამოცანის ამოხსნისათვის.

პრიზმატული ღეროების ღუნვისა და გრეხის შესახებ ამოცანების სხვა მიახლოებით მეთოდებს შორის უმნიშვნელოვანესი ადგილი უკავიათ ვარიაციულ მეთოდებს, რომლებმაც დიდი პოპულარობა მოიპოვეს ლ. ლეიბენზონის და ლ.კანტოროვიჩის ნაშრომების წყალობით. გრეხის თეორიაში ლ. ლეიბენზონის პირველ ნაშრომში, რომელიც 1924 წელს გამოჩნდა, შესწავლილია ხრახნული პროფილის გრეხის ამოცანა. მასში მიღებულია გრეხაზე ხრახნის პროფილის სიხისტისათვის მიახლოებითი გამოსახულება. ამ ფორმულის შემდგომი დაზუსტება მოახდინა ვ. ვეტჩინკინმა (1926) [50].

დიდი მნიშვნელობა ქონდა ლ. ლეიბენზონის (1935) ნაშრომს პრიზმული ღეროების ღუნვის თეორიაში, რომელშიც დაწვრილებითაა დამუშავებული ამ ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ვარიაციული მეთოდი და აგრეთვე პირველად იქნა მიღებული თეორემა ღუნვისას მხები

ძაბვების ცირკულაციის შესახებ. ღუნვის ცენტრის მოძებნის ამოცანამ შემდგომი განვითარება ჰპოვა ნ. ზვოლინსკის (1936), დ. პანოვის (1934) და გ. პროკტორის (1936) ნაშრომებში.

ლ. ლეიბენზონის მრავალწლიანი გამოკვლევების შედეგები, ღეროების ღუნვისა და გრეხის თეორიაში და აგრეთვე ამოცანების ამოხსნის ეფექტური ხერხების შემუშავებაში, შეჯამებულია მის მონოგრაფიაში (1951) [51].

[52] 1933 წელს ლ. კანტოროვიჩმა შემოგვთავაზა ორმაგი ინტეგრალის მინიმუმის მოძებნის ამოცანის ამოხსნის ახალი მიახლოებითი მეთოდი, რომლის თანახმად პრობლემა დაიყვანება ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებებამდე (მეთოდის კრებადობა მის მიერ გამოკვლეულია მოგვიანებით, 1941). პ. ფრუმკინთან (1937) ერთობლივ სხვა სტატიაში, კანტოროვიჩმა წარმატებით გამოიყენა თავისი მეთოდი როგორც სიმეტრიული, ისე არასიმეტრიული კუთხოვანი და მართკუთხედის კვეთების გრეხის ამოცანების ამოხსნისას. ტ. ჩეპოვამ (1937) [53] განიხილა ტოლგვერდა ტრაპეციის და აგრეთვე მართი და ირიბი სიმეტრიული კუთხოვანების გრეხა; ვ. ბიდერმანმა (1950) შეისწავლა ტრაპეციისა და ტოლფერდა სამკუთხედის გრეხა. ა. კარპოვმა (1955) მოგვცა რომბის გრეხის ამოცანის ამონახსნი.

ა. ლურიემ (1939) [54] მიუყენა კანტოროვიჩის მეთოდი სიმეტრიულ პროფილს, რომელიც შემოსაზღვრულია პარალელური სწორებითა და ალგებრული მრუდებით გამოსახული ორწევრა განტოლებებით, ღუნვისა და გრეხის ამოცანებს. მართკუთხა და ტოლფერდა სამკუთხედების გრეხის შესახებ ამოცანა ერთობ დაწვრილებით განიხილა ნ. გულკანიანმა (1953) [55]. სპეციალური სახის არაორთოგონალური კოორდინატების შემოტანით ნ. არუთუნიანმა მოახერხა ამოეხსნა კუთხოვანისა და შველერის გრეხის ამოცანა (1942); სხვა ნაშრომში მან მიიღო იზოტროპული, ან კერძო სახის ანიზოტროპიის მქონე გრეხის ამოცანის ამოხსნა ელიფსური რგოლური სექტორისათვის.

პრიზმული ღეროს გრეხის ამოცანის ამოხსნის სხვა მიახლოებით მეთოდზე, დაფუძნებულს წერტილოვან ინტერპოლაციაზე, მიუთითა ლ. გალინმა (1939) [56]. შვარცის მაალტერნირებელი მეთოდით ტესებრი

კვეთის მქონე ღეროს გრეხის ამოცანის მიახლოებული ამონახსნი მიიღო ბ. ბონდარენკომ (1956) [57].

მ. ლეონოვმა შემოგვთავაზა თხელკედლიანი პროფილების სიხისტის განსაზღვრის მიახლოებითი მეთოდი, რომელიც დაფუძნებულია ტოლი მხები ძაბვების „შუა ხაზების" შემოტანაზე (1956, 1957). ანვითარებდნენ რა ამ მეთოდს მ. ლეონოვმა (1957, 1960), გ. კიტმა (1958, 1960) და სხვებმა მიიღეს, როგორც ცალადბმული, ისე ორადბმული მიდამოებისათვის მიახლოებითი ამონახსნები.

ჰ. ჰალიმჰანოვმა (1955, 1956) [58] მოგვცა გრეხის ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ნათალი ლილვებისათვის, რომელთა კვეთის კონტური შედგება ძირითადი წრეხაზის რკალებისა და ქორდებისაგან. მის ამონახსნში მუდმივები განისაზღვრება ძაბვის ფუნქციისაგან ინტეგრალების ნულად ქცევის პირობიდან, რომლებიც აღებულია კონტურის სწორხაზოვანი და რკალური უბნების მიხედვით. გრეხის ამოცანების შესწავლისათვის მიახლოებითი მეთოდები იყო გამოყენებული აგრეთვე გ. სარქისოვის და ა. ამენზადეს (1952) [59] მიერ – წესიერი მრავალწახნაგა პროფილებისათვის, ლ. მიტელმანის (1955, 1959) მიერ კვადრატისათვის, ნახევარწრისათვის, ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედისათვის და საავიაციო პროფილებისათვის, ლ. მიხაილოვის (1962) მიერ ნახევარწრიული კვეთის მქონე ღეროსათვის, რომელიც დასუსტებულია მრგვალი ცილინდრული ღრუთი.

პრიზმული ღეროს შეზღუდული გრეხის ამოცანა რომელსაც ნებისმიერი განივი კვეთი აქვს, განიხილებოდა ვ. პროკოპოვის (1959) მიერ, ხოლო სიმეტრიული პროფილისათვის – გ. გეონჯიანის (1959) [60] მიერ; ორივე ნაშრომში იგულისხმებოდა, რომ ნორმალური ძაბვები შეზღუდულ კვეთში თავისუფალი გრეხის დეპლანაციის პროპორციულია და გამოიყენებოდა ამოცანის ამოხსნის ვარიაციული მეთოდი; მაგალითისათვის შეისწავლებოდა ელიფსური და მართკუთხა განივი კვეთები. მართკუთხა განივი კვეთის მქონე ღეროს შეზღუდული გრეხა გამოიკვლია აგრეთვე ვ. ნეტრებკომ (1956). მან გამოიყენა მ. ფილონენკო-ბოროდიჩის მეთოდი კასტილიანოს პრინციპთან შეთავსებაში. ნეტრებკოს სხვა ნაშრომში (1954) იმავე ხერხით შესწავლილია მართკუთხა პრიზმის გრეხის ამოცანა მის ტორსებზე მხები ძაბვების

მოცემული კანონით განაწილებისას. ღრუ ელიფსური ცილინდრის შეზღუდულ გრეხას განიხილავდა ს. გრიდნევი (1963).

ვ. გალიორკინმა 1927 წელს მოგვცა რგოლური სექტორის სახის კვეთის მქონე პრიზმული ღეროს ძალით ღუნვის ამოცანის ზუსტი ამოხსნა. ძაბვის ფუნქციისათვის გამოსახულება მან მიიღო მწკრივის სახით. იმავე ნაშრომში გალიორკინმა შეისწავლა, მრუდწირული კოორდინატების საშუალებით, კონსოლური ღეროს ძალით სიმეტრიული ღუნვა, რომლის პროფილიც შემოსაზღვრულია პარაბოლების რკალებით, პარაბოლებით და წრფით, ელიფსებისა და ჰიპერბოლების რკალებით. უკანასკნელი შემთხვევა გამოკვლეულია აგრეთვე ვ. ტონოიანის (1961) სტატიაში.

დ. ავაზაშვილმა (1940) [61] ააგო კონსოლური პრიზმული ღეროს გრეხის ამოცანის ამონახსნი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის საშუალებით. რგოლის მიდამოზე კონფორმული ასახვით ბ. ობოდოვსკიმ მიიღო ელიფსური კვეთის ღრუ ძელის შეყურსული ძალით ღუნვის ამოცანის ამონახსნი (1960). ლ.კაპანიანმა (1956) ღუნვის ამოცანის ამოხსნისას გამოიყენა მიახლოებითი კონფორმული ანასახი, მრუდწირული კვადრატული ამონაჭერის მქონე წრისათვის. ვ. რაკივნენკომ (1962), განიხილა მრგვალი ცილინდრის ღუნვის საკითხი, როდესაც მას აქვს კვადრატული სახის განივი კვეთის მქონე ორი სიღრუვე.

სიმეტრიული ღუნვა ღეროსი, რომელსაც განივი კვეთი მართკუთხა მიდამოებისაგან აქვს შედგენილი, განიხილა ა. ბოჟენკომ (1948). სხვა სტატიაში (1954) მან შეისწავლა ნაგლინი პროფილების (შველერი, ორტესებრი, ტესებრი) არასიმეტრიული ღუნვა და განსაზღვრა ღუნვის ცენტრის მდებარეობა. ზ.გულკანიანმა (1955) განსაზღვრა ტოლგვერდა ტრაპეციისა და ტოლფერდა სამკუთხედის ღუნვის ცენტრის კოორდინატები მიახლოებითი მეთოდით. ნ. პოპოვმა მოგვცა მართკუთხა სამკუთხედის სახით კვეთით პრიზმის ღუნვის ამოცანის ამონახსნი ჩაკეტილი სახით.

დ. შერმანმა დამხმარე ფუნქციების თავისი მეთოდი განავრცო ღრუ პრიზმული ღეროების ღუნვის ამოცანებზე და კერძოდ, განიხილა ელიფსური ძელის შემთხვევა, რომელიც დასუსტებულია წრიული

ცილინდრული ღრუთი (1953) [62]. შერმანის მეთოდით ამოცანები ღრუ ღეროების ღუნვის შესახებ გამოიკვლია ი. ამენზადემ. წრე ელიფსური (1955) და მრუდწირული (1956) ნახვრეტებით წრე არათანაღერძული ელიფსური ნახვრეტით (1958) [63] და სხვა. კვეთი ელიფსის სახით, ორი წრიული ნახვრეტით, შეისწავლა ა. კოსმოდამიანსკიმ (1960).

[64] 1948 წელს ნ. არუთუნიანმა შემოგვთავაზა პოლიგონიალური განივი კვეთის ღეროს გრეხის შესახებ ამოცანის ამოხსნის ახალი მეთოდი, რომლის არსიც მდგომარეობს ძაბვათა ფუნქციის მოძებნისას დამხმარე ფუნქციის შემოტანაში და შემდგომ ამოცანის ამოხსნის დაყვანა სრულიად რეგულარულ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემამდე; შემდგომში მან განიხილა კუთხოვანის გრეხის შესახებ ამოცანა (1949). არუთუნიანის მეთოდით იყო გამოკვლეული სხვადასხვა განივი კვეთის მქონე ღეროების გრეხის შესახებ ამოცანები; კვეთი ტრაპეციის სახით განიხილეს ვ. აბრამიანმა და ნ. არუთუნიანმა (1951), შველერი და ტესებრი ე. ალექსანდრიანმა და ნ. გულკანიანმა (1953), ჯვარისებრი კვეთა და ცილინდრი სოლისებრი კილოთი – ბ.აბრამიანმა (1949, 1959), კოლოფა პროფილი ბზარით – ა. ბაბლოიანმა (1958). ა. ალექსანდრიანმა (1952) შეისწავლა ორტესებრის, კვადრატის და მართკუთხედის, ჩამოჭრილი კუთხით და პარალელოგრამის 45°-იანი კუთხით, შემთხვევა, სამკუთხა განივკვეთი და მართკუთხედი ბზარებით გამოიკვლია ნ. გულკანიანმა (1952, 1953); სექტორი კბილაკებით განიხილეს ბ.აბრამიანმა და ვ. ტონოიანმა (1959).

2.1.1. გრეხისა და ღუნვის ამოცანების დასმა და გადაწყვეტა

მართკუთხედის სახის ღრუ კვეთის მქონე პრიზმული ღეროების გრეხა (და ღუნვა) შეისწავლა ბ. აბრამიანმა (1950); შემდგომში მან გამოიკვლია გრძივი სიღრუეების მქონე მრგვალი ლილვის შემთხვევა (1959); ბ. აბრამიანისა და ა.ბაბლოიანის ნაშრომში (1960) გამოკვლეულია მრგვალი ღეროს გრეხა ამონაჩარხებითა და კბილაკებით, რომელსაც აქვს ცენტრალური მრგვალი სიღრუე. დამხმარე ფუნქციებისა და უსასრულო სისტემებამდე დაყვანის იმავე

მეთოდით ნ.გულკანიანმა (1960) შეისწავლა მართკუთხა პრიზმის გრეხა, რომელსაც ორი სიმეტრიული მართკუთხა სიღრუე აქვს. ვ. ტონოიანმა (1961) მოგვცა გრძივი ამონაჩარხების მქონე ღრუ ელიფსური ღეროს გრეხის ამოცანის ამონახსნი. დამხმარე ფუნქციის დაწვრილებითი მეთოდის საფუძვლიანი გადმოცემა, პრიზმული მთლიანი და ღრუ ღეროების, აგრეთვე შედგენილი ღეროებისა და ბრუნვითი სხეულების გრეხისას შეიძლება ვნახოთ ნ. არუთუნიანის და ბ. აბრამიანის (1963) მონოგრაფიაში [65].

პოლიგონალური პროფილის ღეროების ღუნვის ამოცანისადმი დამხმარე ფუნქციის მეთოდის გამოყენება და პრობლემის უსასრულო სისტემებამდე დაყვანა მოცემულია ნ. არუთუნიანისა და ნ. გულკანიანის სტატიაში (1954). ამ სტატიაში ნაპოვნია ღუნვის ცენტრის კოორდინატების ზუსტი მნიშვნელობები ტესებრისათვის, შველერისათვის და თანაბართაროებიანი კუთხოვანისათვის. ნ.გულკანიანმა (1959) [66] იპოვა ასევე ღუნვის ცენტრის კოორდინატები კვეთისათვის მართკუთხედის სახით, რომელსაც აქვს არასიმეტრიული მართკუთხა ამონაჭერი.

მ. სარქისიანმა (1956) არუთინიანის მეთოდით განიხილა ორტესებრის ღუნვის ამოცანა. ე. კირინმა (1963) – გამოიკვლია ჯვარისებრი განივი კვეთი; ვ.ტონოიანმა (1961) – ელიფსის სახის კვეთი ამონაჩარხებით. ა. ბაბლოიანის (1960, 1961) ნაშრომები მიძღვნილია მრგვალი ლილვის ღუნვის ამოცანისადმი გვერდითი ამონაჩარხებით, სექტორული პრიზმისა კბილაკით და ლილვისა კბილაკებით.

ნ. მუსხელიშვილმა (1932) შეიმუშავა სხვადასხვა მასალებისაგან შედგენილი და გვერდითი ზედაპირების გასწვრივ ერთმანეთთან შეკავშირებული ღეროების გრეხისა და ღუნვის თეორია; ასეთი ამოცანის ამონახსნი ერთმანეთთან შეკავშირებული ორი ძელის გრეხის შემთხვევისათვის მოყვანილია მის ცნობილ მონოგრაფიაში (გამ. 2 – 1935). ი. ვეკუამ და ა. რუხაძემ (1933) [67] შეისწავლეს მრგვალი ღეროთი დაარმატურებული წრიული კვეთის ცილინდრის გრეხა და აგრეთვე შედგენილი ღეროს გრეხა და ღუნვა, რომლის კვეთს აქვს ფოკუსური ელიფსების სახე; ა. რუხაძემ (1935) [68] განიხილა შედგენილი პროფილის ღუნვა და გრეხა, რომელიც ეპითროქოიდებით არის შექმნილი; ჰიპოთროქოიდებით გამიჯვნის შემთხვევა გამოიკვლია გ. ქუთათელაძემ

(1956) [69]. ორი წრიული სეგმენტის სახის შედგენილი ღეროს გრეხა, რომლებიც შეკავშირებულია ქორდის გასწვრივ, განიხილა ვ. ძიუბამ და ა. ასატურიანმა (1965).

შედგენილი ღეროს გრეხის შესახებ ზოგად ამოცანას ეკუთვნის კ.ჩობანიანის (1955) სტატია; მასში მოყვანილია თეორემა მხები ძაბვების ცირკულაციის შესახებ და განხილულია ტესებრი განივი კვეთის მქონე შედგენილი ღეროს ამოცანა. კ. ჩობანიანის სხვა ნაშრომებში განხილულია შედგენილი კვეთის ღუნვა (1956), ღუნვის ცენტრის კოორდინატების განსაზღვრა და ცვლადი დიამეტრის მქონე შედგენილი ლილვის გრეხა (1958) [70]. მრავალბმული შედგენილი ძელის გრეხა გამოიკვლია ი. სუხარევსკიმ (1954) [71]. ა. უგოდჩიკოვმა (1964) განიხილა ერთმანეთში ჩადგმული შედგენილი ღეროების გრეხა და ღუნვა; ამოცანის ამოხსნა იგება კონფორმული ასახვის საშუალებით და დაყვანილია წრფივი განტოლებების უსასრულო სისტემებზე.

პრიზმული ანიზოტროპული ღეროების გრეხისა და ღუნვის ამოცანები ფორმულირებული იქნა ს. ლეხნიცკის ნაშრომებში (1938, 1942, 1956); ამ გამოკვლევათა შედეგები და ანიზოტროპულ გარემოთა დრეკადობის თეორიის რიგი სხვა ამოცანების ამონახსნები შეჯამებულია მის მონოგრაფიაში (1950) [72]. უფრო ადრე ანიზოტროპულ პრიზმათა გრეხა განზოგადებული მემბრანული ანალოგიის საშუალებით შეისწავლა ა. ლოკშინმა (1927), განიხილავდა რა კვეთებს წრის, ელიფსის, მართკუთხედის და პარალელოგრამის სახით. ანიზოტროპული პრიზმების ღუნვისა და გრეხის ზოგიერთი ამოცანები გამოიკვლია ლ. ლეიბენზონმა (1940) ვარიაციული მეთოდით. საავიაციო პროფილის ანიზოტროპული ღეროს გრეხის ამოცანის მიახლოებით ამოხსნას ეძღვნება ვ. ვანტორინის (1939) სტატია; ანიზოტროპიული ღეროს გრეხის ზოგიერთი ამოცანები მიახლოებითი მეთოდით განიხილა ნ. არუთუნიანმა (1947, 1948) [73]. ანიზოტროპული ცილინდრის გრეხა შეისწავლეს ბ. აბრამიანმა და ა. ბაბლოიანმა (1958).

პარალელოგრამის ფორმის განივი კვეთის მქონე ანიზოტროპული ღეროს ღუნვა და გრეხა გამოიკვლია რ. მინასიანმა (1958) [74]. ანიზოტროპული ღეროების ღუნვის ამოცანათა რიგი განიხილა ვ. სარქისიანმა (1961, 1962), რომელმაც გამოიყენა მცირე პარამეტრის

ხარისხებად მწკრივად გაშლის მეთოდი. ხსნიდა რა ანიზოტროპული ღეროს ღუნვის ამოცანას კონფორმული ანასახის საშუალებით, ე. ანტონოვმა (1964) გამოსახა ღუნვის ცენტრის კოორდინატები ამსახველი ფუნქციის კოეფიციენტებით.

არაერთგვაროვანი პრიზმული ღეროს გრეხის ამოცანა ამოხსნეს ბ.აბრამიანმა (1951) და ა. მანუკიანმა (1952). ვ. სარქისიანმა და ვ. მიქაელიანმა (1965) შეადგინეს შედგენილი ანიზოტროპული ღეროს ღუნვის ცენტრის კოორდინატებისათვის ფორმულები. უკანასკნელ ხანებში გამოჩნდა ღუნვის (პ.გალფაიანი, 1960, 1961) და გრეხის (ა. ბაბლოიანი, 1959, პ. გალფაიანი და კ.ჩობანიანი, 1959) [75] ამოცანების ამონახსნები სხეულებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ გამაძლიერებელი თხელი საფარები. ს. ლეხნიცკიმ შეისწავლა გრეხის ზოგიერთი ამოცანა ცვლადი დრეკადობის მოდულის მქონე სხეულებისათვის (1964, 1965).

1950 წელს მ. ბერმანმა მოგვცა ღუნვის ცენტრის კოორდინატებისათვის ფორმულები გამოსახული ფუნქციებით, რომლებიც ხსნიდა იმავე განივი კვეთის მქონე ღეროსათვის გრეხის ამოცანას; მოგვიანებით ანალოგიურ შედეგებამდე მივიდა ვ. ნოვოჟილოვი (1957) [76]; ვ. პროკოპოვმა (1960) მოგვცა ამ ფორმულების განზოგადება ღუნვადი ღეროს მრავალბმული განივი კვეთის შემთხვევაში. აღნიშნული საკითხის შემდგომი შესწავლა ეკუთვნის გ. ჯანელიძეს (1963). ანიზოტროპული ღეროს შემთხვევაში ანალოგიური შედეგები მიიღო ვ. სარქისიანმა (1961, 1966). კ. ჩობანიანმა და ვ. მიქაელიანმა (1963) გამოიყვანეს ფორმულები სხვადასხვა მასალისაგან შედგენილი ღეროს ღუნვის ცენტრის კოორდინატებისათვის.

ბრუნვის სხეულების გრეხა შეისწავლებოდა სხვადასხვაგვარი მეთოდებით. ა.ლოკშინმა (1923) მრუდწირული კოორდინატების საშუალებით განიხილა კონუსის, ელიფსოიდის, ჰიპერბოლოიდის და ბრუნვის პარაბოლოიდის გრეხა; უფრო ფართო დასმით ბრუნვის სხეულების გრეხის შესახებ ამოცანა მრუდწირულ კოორდინატებში გამოიკვლია ბ. სოკოლოვმა (1944); მის მიერვეა განხილული საფეხურიანი ლილვის გრეხის ამოცანა რიტცის მეთოდის გამოყენებით (1939). ღრუ წაკვეთილი კონუსის გრეხა შეისწავლა ნ. პაპარინმა (1937).

კ. სოლიანიკ-კრასმა გამოიყენა მრუდწირული კოორდინატები იმ

ლილვების გრეხის ამოცანის ამოხსნისას, რომლებსაც გააჩნიათ სიღრუეები (1947) ან რგოლური ამონაჩარხები (1948, 1955). ამ გამოკვლევათა შედეგები შესულია აგრეთვე მის მონოგრაფიაში „ცვლადი კვეთის ლილვების გრეხა“ (1949) [77]. იმავე მეთოდით მან განიხილა ცვლადი კვეთის მქონე ღეროს ღუნვის რიგი ამოცანები. კერძოდ, გამოკვლეულია ცილინდრულ ღეროში სფერულ სიღრუესთან ძაბვების კონცენტრაცია (1955).

რგოლური ამონაჩარხის მქონე მრგვალი ლილვის გრეხისას ძაბვების კონცენტრაციის შეფასება, რომელიც კომპლექსური ცვლადი ფუნქციის თეორიის ვარიაციულ მეთოდთან შეხამების გამოყენებაზეა დაფუძნებული, მიიღო გ. პოლოჟიმ (1957). ბადეთა მეთოდით, გრეხისას ლილვის დიამეტრის მკვეთრი ცვლილების ადგილებში ძაბვათა კონცენტრაციის შესახებ ამოცანა, შეისწავლებოდა ბ.როზოვსკაიას (1956, 1958) მიერ. ცვლადი კვეთის მქონე მილის გრეხა განიხილეს ი.ამენზადემ და გ. სარქისოვმა (1959).

ბრუნვითი ანიზოტროპიული სხეულების გრეხა გამოკვლეულია ს.ლეხნიცკის (1940), დ. გრილიცკის (1957), ბ. აბრამიანისა და ა. ბაბლოიანის (1958) ნაშრომებში.

მრგვალი ლილვის გვერდითი ზედაპირის გასწვრივ განაწილებული ძალვების მოქმედება, რომელსაც მივყავართ მის დაგრეხამდე, განიხილეს ნ. ზვოლინსკიმ [79] და პ. რიზმა (1939), რომლებმაც შეისწავლეს დატვირთვის თანაბარი და წრფივი განაწილება. პრიზმული ღეროს უფრო ზოგადი შემთხვევა განიხილეს ლ. გილმანმა და ს. გოლუშკევიჩმა (1943), პ. რიზმა (1940). ლ. გილმანის სტატიაში (1937) ამოხსნილია ამოცანა დრეკადი რგოლის გრეხის შესახებ წყვილებით, რომლებიც თანაბრადაა განაწილებული მისი ღერძის გასწვრივ. ცილინდრის მსახველის გასწვრივ თანაბრადგანაწილებული მგრეხი მხები ძალვების შემთხვევა შეისწავლებოდა ს.ბაკანოვის (1959) მიერ. მთლიანი და ღრუ წრიული ცილინდრების გრეხა, რომლებზეც ღერძულსიმეტრიულად განაწილებული ზედაპირული დატვირთვები მოქმედებს, განიხილა ფურიე-ბესელის მწკრივების საშუალებით ვ. ბლოხმა (1954, 1956); იმავე პრობლემას მთლიანი ცილინდრისათვის უბრუნდებოდა პ. ლივშიცი (1962). ს. ლეხნიცკიმ (1961) გადაწყვიტა

ამოცანა ანიზოტროპული ღეროს გრეხის შესახებ, რომლის გვერდითი ზედაპირის გასწვრივ განაწილებულია ძალვები.

საფეხურიანი ლილვის გრეხა დატვირთვებით, რომლებიც მოდებულია გვერდით და ტორსულ ზედაპირებზე და აქვთ ღერძული სიმეტრია, შესწავლილია ბ. აბრამიანის და მ. ჯრბაშიანის (1951) მიერ; მათ მიერ ამოცანის ამოხსნა დაყვანილია წრფივი განტოლებების უსასრულო სისტემამდე. იმავე მეთოდით ბ.კოსტანდიანმა გადაწყვიტა ამოცანა საფეხურიანი ღრუ ლილვის გრეხის შესახებ (1956) [80]; მის მიერვეა განხილული მართკუთხედის ფორმის რგოლური ამონაჩარხის მქონე ლილვის გრეხა (1954) და ლილვის გრეხა მასზე დასმული დისკით (1958). კონუსური ღეროს და ცილინდრული ღეროს კონუსური ნაწილით გრეხა შეისწავლა ბ. აბრამიანმა (1958, 1960); ნ. გულკანიანთან თანაავტორობით მის მიერ (1961) განხილულია შედგენილი ღრუ ნახევარსფეროს გრეხა.

პრიზმული დრეკადი ღეროს წონასწორობის ამოცანას, მასზე ძალვების მოქმედებისას, რომლებიც მოდებულია ტორსებზე და თავისუფალია დატვირთვებისაგან გვერდით ზედაპირებზე, უწოდებენ სენ-ვენანის ამოცანას; დრეკადობის წრფივ თეორიაში ეს ამოცანა იშლება, ბუნებრივად, ორ მარტივ ამოცანად (გაჭიმვა და სუფთა ღუნვა წყვილებით), რომლებიც იხსნება ელემენტარული გზით და ორ უფრო რთულ ამოცანად (გრეხა და ღუნვა ძალისაგან), რომელიც განხილულია ზემოთ. დრეკადობის არაწრფივ თეორიაში არსებითი ხდება ურთიერთ გავლენა, გამოწვეული სხვადასხვაგვარი დატვირთვებით; აუცილებელია მეორადი ეფექტების გათვალისწინება, რომელთა შესწავლა დაწყებული იქნა 1938, 1939 წლებში ნ. ზვოლინსკისა და პ. რიზის ერთობლივ ნაშრომებში. ამ ნაშრომების ციკლიდან უკანასკნელში (1939) განიხილებოდა გაჭიმული ღეროს გრეხა. ნ. ზვოლინსკიმ შეისწავლა ღეროს გრეხა, რომელიც გაჭიმულია მასათა ძალებით (1939). გაჭიმული ღეროს ღუნვის ამოცანას ეძღვნება პ. რიზისა (1939) და ა.რუხაძის (1941) გამოკვლევები, რომელმაც განიხილა გავლენა ღეროს ღუნვაზე ღუნვის წყვილის განივი ძალისაგან (1947). მეორადი ეფექტები, რომლებსაც ადგილი აქვთ შედგენილი ღეროების გაჭიმვასა და ღუნვისას, იყო გამოვლენილი ა.გორგიძისა და ა. რუხაძის მიერ (1943). ამ

გამოკვლევათა დაზუსტება და განვითარება ჩატარდა შემდგომ ა. გორგიძის (1955, 1956) [81], რ. მინასიანის (1957), ა. რუხაძის (1954), ვ. მეცუგოვის (1954, 1956) [82] ნაშრომებში. ნაშრომთა ამ ციკლში ფართოდ გამოიყენებოდა მცირე პარამეტრების მეთოდი.

ოდნავ კონუსური და ბუნებრივად დაგრეხილი ღეროების დეფორმაციის შესახებ ამოცანებმა დაიკავეს მნიშვნელოვანი ადგილი მეცნიერთა გამოკვლევებში. აქ ასევე ძალზედ სასარგებლო აღმოჩნდა მცირე პარამეტრის მეთოდი. პირველად ეს მეთოდი გამოყენებული იყო დ. პანოვის მიერ ოდნავ კონუსური ღეროს გრეხის ამოცანის გადაწყვეტისას (1938). ბუნებრივად დაგრეხილი ღეროების გაჭიმვის, გრეხის და წყვილებით ღუნვის შესახებ ამოცანები შესწავლილი იქნა პ. რიზის (1939) მიერ. უფრო ზოგად დასმაში, არაორთოგონალური კოორდინატთა სპეციალური სისტემის გამოყენებით, სენ-ვენანის ამოცანა ბუნებრივად დაგრეხილი ღეროსათვის, ამოხსნილი იქნა ა.ლურიეს და გ. ჯანელიძის მიერ (1940) [83]; მოგვიანებით გ.ჯანელიძემ ეს მეთოდი განავრცო ოდნავ კონუსურ ღეროზე (1947). დაგრეხილი ღეროს ღუნვა წყვილძალებით დეკარტეს კოორდინატებში გამოიკვლიეს ა. გორგიძემ და ა. რუხაძემ (1944), ხოლო ღუნვა განივი ძალით – ა. რუხაძემ (1947). შედგომი გამოკვლევები აზუსტებენ და ავსებენ ამ ძირითად შედეგებს. დაწვრილებით შეისწავლება მეორადი ეფექტები, რთულდება დატვირთვების სქემები (ა. გორგიძე, ვ. მეცუგოვი, 1957; ა. რუხაძე, 1956; ა.შარანგია, 1955) და შედგენილი სუსტად კონუსური ღეროები (ს. ბერძენიშვილი, 1957).

მცირე პარამეტრის მეთოდი წარმატებით იქნა გამოყენებული სუსტად გაღუნული ღერძის მქონე ღეროს წონასწორობის ამოცანის ამოხსნისას; პირველად ამ ტიპის ამოცანები ამოიხსნა პ. რიზისა (1940, 1947) და ა. რუხაძის (1942) მიერ. შემდგომში განიხილებოდა გაჭიმვა (რ. მინასიანი, 1954), ღუნვა წყვილძალებით (ა. რუხაძე, 1953) და ღუნვა ძალისაგან (ა. გორგიძე, 1956).

ანიზოტროპული ღეროს გაჭიმვა და ღუნვა შესწავლილი იქნა 1949 წელს ს. ლეხნიცკის მიერ. მოგვიანებით გ. ხატიაშვილმა განიხილა უფრო რთული ამოცანა – ანიზოტროპული ღერო სუსტად გაღუნული ღერძით (1965) [84], მის მიერვე გამოკვლეულია სენ-ვენანის ამოცანა

პრიზმატულთან ახლოს შედგენილი ანიზოტროპული სხეულებისათვის (1963) [85].

ღეროს დრეკადი წონასწორობის ამოცანას, რომლის გვერდითი ზედაპირი დატვირთულია ძალვებით, რომლებიც წარმოადგენენ ღერძული კოორდინატის პოლინომურ ფუნქციებს, ეწოდება ალმანზის ამოცანა. ამ ამოცანის კერძო შემთხვევა, როცა გვერდითი დატვირთვა არ არის დამოკიდებული ღერძული კოორდინატისაგან, შეისწავლებოდა ჯერ კიდევ ჯ. მიჩელის მიერ. 1960 წელს გ.ჯანელიძემ გამოაქვეყნა ალმანზის ამოცანის ამოხსნის ზოგადი მეთოდი ძაბვებში, რომელსაც დავყავართ რიგი ორგანზომილებიანი ამოცანების ამოხსნამდე, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია რეკურენტული თანაფარდობებით. ეს მეთოდი იძლევა მიჩელ-ალმანზის ამოცანის ამოხსნის ზოგად ხერხს და ხსნის გზას კომპლექსური ცვლადის თეორიის გამოყენებისათვის. მიჩელის ამოცანის კერძო შემთხვევა, როცა გვერდით ზედაპირზე მოქმედებს თანაბრადგანაწილებული ნორმალური დატვირთვა შეისწავლა ა. ჰარისმა (1960); მან აჩვენა ღუნვის ცენტრების ხაზის არსებობა, რომლის მოძებნისათვის საკმარისია სენ-ვენანის ამოცანის გრეხის ჰარმონიული ფუნქციის განსაზღვრა. შედგენილი ძელებისათვის მიჩელისა და ალმანზის ამოცანების ამოხსნა მოგვცა გ. ხატიაშვილმა (1953, 1955) [86]. მიჩელის ამოცანასთან დაკავშირებით წამოჭრილი სასაზღვრო ამოცანების კლასიფიკაცია და მათი ამოხსნის თანმიმდევრობა მითითებულია ა. ლურიეს მიერ (1966).

ტრანსვერსალურად იზოტროპულ ცილინდრზე გვერდითი პოლინომური დატვირთვის მოქმედება, რომელსაც მივყავართ მის გრეხამდე და ღერძულსიმეტრიულ დეფორმაციამდე, შეისწავლებოდა ს. ლეხნიცკის (1961) მიერ. ა.კოსმოდამიანსკიმ (1956, 1961) განიხილა მიჩელისა და ალმანზის ამოცანები ანიზოტროპული კოჭისათვის. გ. ჯანელიძემ განავრცო მის მიერ შემოთავაზებული ალმანზის ამოცანის ამოხსნის მეთოდი ანიზოტროპული ღეროს შემთხვევაზე. უფრო დაწვრილებით ეს ამოცანა განიხილებოდა გ. ხატიაშვილის მიერ [81], რომელმაც გამოიკვლია მიჩელის ამოცანა შედგენილი ორთოტროპული და ანიზოტროპული ღეროებისათვის (1962) და აგრეთვე მოგვცა

ჯანელიძის ხერხის განზოგადება ალმანზის ამოცანის შემთხვევაში, შედგენილი ორთოტროპული ღეროსათვის (1964).

ს.პ. ტიმოშენკოს 1910 წელს [87] გამოცემულ წიგნში „ახალი მეთოდების გამოყენება ზოგიერთი ხიდის კონსტრუქციის მდგრადობის კვლევებისას“, განხილული აქვს ხიდების ფერმების ელემენტების შემოწმება მდგრადობაზე. კერძოდ, ხაზგასმულია, რომ ფერმის გასათვლელი ელემენტის სიმტკიცის უზრუნველსაყოფად საკმარისი არ არის მისთვის ისეთი დასაშვები დაძაბულობის შერჩევა, რომ თავიდან ავიცილოთ ნარჩენი დეფორმაციები ან დაღლილობის მოვლენები. საჭიროა აგრეთვე წონასწორობის იმ ფორმის შედარებითი მდგრადობის დამატებითი გამოკვლევები, რომელიც საფუძვლად უდევს განსახილველი ელემენტის გათვლებს. მხოლოდ მდგრადობის საკმარისი მარაგის შემთხვევაში იქნება ეს ელემენტი მთელი ნაგებობის მტკიცე შემადგენელი ნაწილი.

იმ დროისთვის ცალკეული ელემენტების შემოწმება მდგრადობაზე დაიყვანებოდა გრძივი ღუნვის ფორმულების გამოყენებაზე. სინამდვილეში გვხვდებოდა მდგრადობის უფრო რთული საკითხების მთელი წყება. ნაშრომში აღნიშნულია, რომ გრძივი ღუნვის შემთხვევაში უნდა გადაიწყვიტოს თამასის საიმედოობის საკითხი. ხშირად გვხვდება მრავალმალიანი მარყუჟების გასწვრივი ღუნვის შემთხვევები, ხანდახან საჭირო ხდება ფურცლების მდგრადობის განსაზღვრა. ცალკეული სამაგრები ჩვეულებრივ, ყოველგვარი გათვლების გარეშე არიან განლაგებული. ჩამოთვლილთაგან ზოგიერთ ამოცანას გააჩნია თეორიული გადაწყვეტა და ტიმოშენკომ დროულად მიიჩნია ტექნიკური გათვლებისას, ამ გადაწყვეტილებების პრაქტიკაში დანერგვა. სწორედ ამ გათვლების საიმედოობის დონის გაზრდით ჩნდება იმედი, რომ მომავალში შესაძლებელი იქნება დასაშვები დაძაბულობის უფრო მაღალი ნორმების მიღწევა.

2.1-ის დასკვნები

- სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანებში პრიზმული ღეროს თავისუფალი გრეხის ამოცანა დაიყვანება ჰარმონიულ პრობლემაზე,

რომლის ამოცანათა ამოხსნის მეთოდები კარგადაა დამუშავებული და გაანალიზებული;

– დრეკადი პრიზმული ძელების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დადგენა, როდესაც ძელის ბოლოებზე მოქმედებს ნებისმიერი ძალთა სისტემა, ასევე წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ერთ-ერთ ძირითად და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. მათემატიკური თვალსაზრისით იგი არ არის ბოლომდე მიყვანილი და გადაწყვეტილი, თუმცა ე.წ. „სენ-ვენანის პრინციპის“ დახმარებით ხერხდება ამ ამოცანის გადაწყვეტა, რომელიც მიახლოებითია და არ შეიძლება ჩაითვალოს ზუსტად. სწორედ, ამგვარ კლასიკურ მიდგომადაა ცნობილი სენ-ვენანის მოსაზრება, რომელიც ლიტერატურაში დამკვიდრდა „სენ-ვენანის პრინციპის“, კერძოდ კი სენ-ვენანის ნახევრად შებრუნებული მეთოდის საშუალებით.

2.2. დრეკადი ტანის სტატიკის შერეული სივრცითი ამოცანების შესწავლის ისტორია

დრეკადობის მათემატიკური თეორიის შერეულ ამოცანებად ჩვეულებრივ დრეკადი წონასწორობის ისეთ ამოცანებს გულისხმობენ, როცა სხეულის ზედაპირზე განლაგებულია სხვადასხვაგვარი ტიპის სასაზღვრო პირობების გამყოფი ხაზები. თუ განსახილველი დრეკადი სხეულის ზედაპირი შედგება რამდენიმე გლუვი წახნაგისაგან, მაშინ შერეული ამოცანის ხარისხობრივად განსხვავებული ორი ძირითადი ვარიანტი შეიძლება წარმოგვიდგეს.

1) თითოეული წახნაგის ფარგლებში სასაზღვრო პირობების ტიპი არ იცვლება. ასეთი შერეული ამოცანების უმარტივეს მაგალითებს წარმოადგენენ დრეკადი ფენის წონასწორობა, რომლის ერთ წახნაგზე მოცემულია ძაბვები, ხოლო მეორეზე გადაადგილებები და ასევე ანალოგიური ამოცანები სოლისათვის, ღრუ ცილინდრისათვის, კონუსისათვის და სხვა. მითითებული კონკრეტული ამოცანების ამონახსნები შეიძლება მივიღოთ ფურიეს, ჰანკელის და მსგავსი ინტეგრალური გარდაქმნების გამოყენებით. როგორც მიუთითეს გ. პოპომა და ნ.როსტოვცევმა (1966) [88], ამგვარი ტიპის ზოგადი

პრობლემები პრინციპში დაიყვანება განტოლებათა უსასრულო სისტემებამდე.

2) სხეულის ერთ წახნაგზე მაინც გვაქვს სხვადასხვაგვარი ტიპის სასაზღვრო პირობების გამყოფი ხაზი. ასეთი ტიპის პრობლემები, რომლებიც, ზოგადად თუ ვიტყვით, დაიყვანება ინტეგრალურ განტოლებებამდე, ჩვენ გვინდა აქ გავარჩიოთ უფრო დეტალურად, რადგან სახელდობრ მათ მისცეს ბიძგი, პოტენციალის თეორიისა და დრეკადობის თეორიის ბევრი მნიშვნელოვანი შერეული ამოცანის ამოხსნის სხვადასხვაგვარი მეთოდების განვითარებას. ამასთან ერთად მსგავს შერეულ ამოცანებს მიეკუთვნება რიგი გამოყენებითი საკითხებისა და კერძოდ, კონტაქტური ამოცანები და ზოგიერთი ამოცანა ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ.

დღეისათვის ზედმიწევნით დეტალურად შესწავლილია დეფორმირებული წრიული ან ელიფსური ხისტი ტვიფარით, დრეკადი ნახევარსივრცის საკონტროლო ამოცანები. პირველად მსგავსი ამოცანა განიხილებოდა ჯერ კიდევ ჟ. ბუსინესკის მიერ წრიული ცილინდრის უხახუნოდ ღერძული შეწნევის შემთხვევისათვის. ამოცანათა ამ კატეგორიას მიეკუთვნება ჰ. ჰერცის კლასიკური პრობლემა დრეკად ტანთა კუმშვის შესახებ ისეთ პირობებში, როცა საკონტაქტო ფართობი ელიფსი აღმოჩნდება. საკითხთა ამ წრის შემდგომ განვითარებაში ერთობ არსებითი წვლილი შეიტანეს საბჭოთა მეცნიერებმა. ა. დინიკმა (1909) და ნ. ბედიაევმა (1924) ჩაატარეს ძაბვების გამოთვლა სხეულებში, რომლებიც ერთმანეთს ეხებიან წრიულ ან ელიფსურ ფართობზე (იხ. აგრეთვე მ. კროლევეცი (1966). საკონტაქტო ამოცანებში საკმაოდ დიდი რაოდენობის მნიშვნელოვანი სამუშაოები შესრულდა ოცდაათიან და ორმოციან წლებში. ვ. აბრამოვმა (1939) და ა. ლურიემ (1940) მოგვცეს საკონტაქტო ამოცანების ამონახსნი არაცენტრალურად დატვირთული მრგვალი და ელიფსური ტვიფარის შესახებ. ამ მიმართულებით არსებითი შედეგები მიიღო ი. შტაერმანმა (1939, 1941, 1943), რომელმაც განიხილა ბრუნვის სხეულების კონტაქტის სხვადასხვა შემთხვევები, მათი თანაშეხების ზედაპირის სიმცირის შესახებ დაშვების გარეშე, და აგრეთვე გამოიკვლია პირველად ამოცანა ტვიფარის მკვრივად მიბრჯენის შესახებ. 1941 წელს ა. ლურიემ ლამეს ფუნქციის

საშუალებით დაწვრილებით განიხილა ზოგიერთი საკონტაქტო ამოცანა, ამასთან შეიმუშავა ბუნებრივი და ერთსახოვანი მიდგომა ჰერცის ამოცანისადმი და მკვრივად მიბრჯენის შესახებ. მ. ლეონოვისა (1939, 1940) [89] და ლ. გალინის (1946, 1947) ნაშრომებში მოცემულია ნახევარსივრცისათვის რიგი საკონტაქტო ამოცანების შემდგომი განზოგადება. ორიგინალური და მიმოხილვითი ხასიათის დიდი მასალა, რომელიც ეხება განხილულ პრობლემებს, შედის ი. შტაერმანის (1949) [90], ლ. გალინის (1953) [91], ა. ლურიეს (1955) მონოგრაფიებში და აგრეთვე დ. შერმანისა (1950) და გ.შაპიროს (1950) მიმოხილვით სტატიებში.

მომდევნო წლებში დრეკადობის თეორიის ზოგადი განტოლებების გამოყენებაზე და კერძოდ, პაპკოვიჩ-ნეიბერის ფუნქციის გამოყენებაზე დაფუძნებული მეთოდების განვითარებამ, შესაძლებლობა მოგვცა ნახევარსივრცის დრეკადი წონასწორობის ბევრი საერთო შერეული ამოცანა დაგვეყვანა პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანების ზოგიერთ კლასებამდე. ამასთან ამ ამოცანებიდან მიზანშეწონილია გამოვყოთ ის შემთხვევა, როცა ნახევარსივრცის მთელ საზღვარზე მოცემულია მხები ძაბვები, რომელიღაც სასრულ მიდამოში S სასაზღვრო სიბრტყისა z=0. ცნობილია ნორმალური გადაადგილება $u_z = f(x,y)$, ხოლო S-ის გარეთ (S' მიდამოში) მოცემულია ნორმალური ძაბვა $\sigma_z = \sigma(x,y)$. ასე, საკონტაქტო ამოცანისათვის ხახუნის და დატვირთვების გარეშე გვაქვს $\sigma\equiv 0$, ხოლო ფუნქცია f განისაზღვრება ტვიფარის ფუძის ფორმით. არსებითია, რომ მითითებული კლასის შერეული ამოცანები საბოლოო ანგარიშში შეიძლება დავიდეს ერთი ჰარმონიული ფუნქციის მოძებნამდე, რომელიც მოცემულია S მიდამოში, ამასთან S' მიდამოში ცნობილია მისი ნორმალური წარმოებული. პოტენციალის თეორიის მსგავსი ამოცანების მეთოდურმა დამუშავებამ საშუალება მოგვცა ზუსტად ამოგვეხსნა ზოგიერთი საკონტაქტო და მსგავსი შერეული ამოცანები. ამ მეთოდებიდან ძირითადები არიან: სფეროიდალური და ელიფსოიდალური კოორდინატების გამოყენება (ა.ლურიე); გრინის ფუნქციის აგება და გამოყენება (ლ. გალინი, მ.ლეონოვი, 1953); ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი (ი. შტაერმანი,

ვ.მოსაკოვსკი, 1953); ტოროიდული კოორდინატებისა და ინტეგრალური გარდაქმნების გამოყენება (ი.უფლიანდი 1956, 1967) [92]; კომპლექსური პოტენციალების მეთოდი (მ.როსტოვცევი, 1953, 1957). ჩვენ აქ სპეციალურად არ გამოვყოფთ წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს, რომელიც წარმატებით განავითარა ი.სნეგინმა, რამდენადაც მისი ეფექტურობა არსებითად გამჟღავნდება უფრო რთული შერეული ამოცანების გადაწყვეტისას, რასაც ქვემოთ შევეხებით.

დასახელებულმა და აგრეთვე ბევრმა სხვა ავტორმა უკანასკნელი ათწლეულების განმავლობაში მოგვცეს სივრცითი დრეკადობის თეორიის ახალი შერეული ამოცანების ამომწურავი ამონახსნები, მათ რიცხვში კონტაქტურისაც. ასე, ლ.გალინმა (1947) და ვ. რვაჩიოვმა (1949) [93] განიხილეს ნახევარსივრცეში სოლისებრი ტვიფარის ჩაწნევის საკითხი; ნ. კილჩევსკის (1958, 1960) ნაშრომებში მოცემულია ჰერცის ამოცანის განზოგადება და მითითებულია დრეკადი კონტაქტის ამოცანის რომელიღაც ექსტრემალურ პრობლემასთან კავშირი; ვ.რვაჩიოვმა (1956, 1957) გადაწყვიტა ამოცანები ტვიფარის შესახებ ზოლისა და მრავალკუთხედის სახით, აგრეთვე ტვიფარის შემთხვევა, როცა მას ფუძე მეორე რიგის მრუდით აქვს შემოსაზღვრული. გ. პოპოვის ნაშრომები მიძღვნილია შერეული ამოცანებისადმი კონტაქტის წრიული მიდამოსათვის და ტვიფარისათვის ნახევარსიბრტისა და კვადრანტის სახით; ნ.ბოროდაჩევმა (1962, 1964, 1966). ა. ხრუსტალიოვმა (1965) გამოიკვლიეს რიგი თერმოდრეკადი ამოცანებისა ნახევარსივრცისათვის. განსაკუთრებით საყურადღებოა ამოცანა ნახევარსივრცეზე ღრუ წრიული ცილინდრის მოქმედების შესახებ, რომელიც ლიტერატურაში ცნობილია რგოლური შტამპის ამოცანის სახელით. ამ ამოცანის ზუსტი ამოხსნა დაკავშირებულია ოვალური კვეთის რგოლის არატაბულირებულ ფუნქციებთან (იხ. ნ. ლებედევი, 1937). იგივე ამოცანის ამოხსნის სხვა სახის მიახლოებითი მეთოდები შემოთავაზებულია ა.ალექსანდროვის (1955), ი. არკადიევის (1962), ვ. გუბენკოს და ვ. მოსაკოვსკის (1960) [94], კ. ეგოროვის (1963), გ. პოპოვის (1967) მიერ. უკანასკნელ წლებში დაისახა ამ ამოცანისადმი და მასთან მიმსგავსებული ამოცანებისადმი, რომლებიც დაფუძნებულია წყვილი ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებაზე და დაკავშირებულია

ბელერ-ფოკის გარდაქმნებთან (ვ.გრინჩენკო და ა. ულიტკო, 1963; ა. ბაბლოიანი, 1964; ა.რუხოვეცი და ი. უფლიანდი 1965-1967), და აგრეთვე სამმაგი ინტეგრალური განტოლებების გამოყენებაზე (ნ. ბოროდაჩევი და ფ. ბოროდაჩიოვა, 1966), მიდგომის კიდევ ერთი გზა. მითითებული მეთოდები საშუალებას გვაძლევენ მივიღოთ ეფექტური მიახლოებები, რომლებიც დაფუძნებულია ფრედჰოლმის ინტეგრალურ განტოლებათა რიცხვით ამონახსნებზე.

გამოქვეყნებულია შერეული ამოცანებისადმი მიძღვნილი ნაშრომთა დიდი რაოდენობა, რომლებიც დაკავშირებულია დრეკად ფუძეზე მდებარე კოჭებისა და ფილების ღუნვის საკითხებთან. გამოვყოფდით ა. იშკოვას (1947), მ. ლეონოვის (1939) და ვ. პაკმოვის (1960) გამოკვლევებს, რომლებიც ეხება დრეკად ნახევარსივრცეზე მრგვალი ფილის ღუნვას, და ასევე მ. გორბუნოვა-პოსადოვის (1953) და ბ. კორენევის (1954, 1960) [95] მონოგრაფიებს. ამ მიმართულების ბევრი ნაშრომის შედეგებსა და დიდ ბიბლიოგრაფიას მკითხველი იპოვის ა. იშკოვასა და ბ. კორენევის (1966) მიმოხილვით მოხსენებაში.

კონტაქტურ ამოცანებთან ერთად, ზემოთ განხილული პოტენციალის თეორიის შერეული ამოცანები ნახევარსივრცისათვის შეიძლება იქნან განმარტებულნი, როგორც შემოუსაზღვრელი დრეკადი ტანის, რომელიც დასუსტებულია ბრტყელი ხვრეტებით, რასაც უკავია S მიდამო (ან S'), დეფორმაციის შესახებ ამოცანები. მართლაც ხვრეტების ნაპირების ჩატვირთვის შემთხვევაში, სიმეტრიულით ხვრეტების სიბრტყის მიმართ, საკმარისია განვიხილოთ ნახევარსიბრტყე, რომლის საზღვარზე S მიდამოში (ან S'-ში) მოცემულია ძაბვები, ხოლო მის გარეთ მხები ძაბვები და ნორმალური გადაადგილებები აღარ არიან. ანტისიმეტრიული ჩატვირთვის შემთხვევაში წრიული ხვრიტისათვისაც კი წარმოიქმნება ზოგიერთი დამატებითი სიძნელე, გადაწყვეტილი ვ. მოსაკოვსკისა (1955) და ი. უფლიანდის (1967) ნაშრომებში, ამასთან უკანასკნელ ნაშრომში ეს ამოცანა განხილულია როგორც ზოგადი შერეული ამოცანის კერძო შემთხვევა, როცა ნახევარსივრცის მთელ საზღვარზე ნორმალური ძაბვაა $S(S')$ მიდამოში ცნობილი მხები გადაადგილება, ხოლო $S'(S)$ მიდამოში მოცემულია მხები ძაბვები. ორი

სხვადასხვა გარემოს კონტაქტის შესახებ საინტერესო ამოცანა, რომელთა საერთო საზღვარზე არის მრგვალი ხვრეტი, გადაწყვეტილია ვ. მოსაკოვსკისა და მ. რიბკას (1964) მიერ; ამ დროს ხორციელდება გრიფიტ-სნედონის ცნობილი კრიტერიუმის განზოგადება არაერთგვაროვანი სხეულის შემთხვევაზე (იხ. აგრეთვე ამავე ავტორების სტატია, 1965). ხვრეტების მქონე სხეულების დეფორმაციებთან დაკავშირებულ ნაშრომთაგან მივუთითებთ კიდევ ვ. გრინჩენკოს და ა. ულიტკოს (1965), ვ. ალექსანდროვისა და ბ. სმეტანინის (1965) [96] საინტერესო სტატიებზე და აგრეთვე ი. უფლიანდის (1958) ნაშრომზე, რომელიც ეძღვნება ნახევრადუსასრულო ბრტყელი ჭრილის მქონე ტანის წონასწორობის შესახებ ამოცანას.

ჩვენს მიერ განხილულ კონტაქტურ ამოცანებთან დაკავშირებულ ნაშრომთა უმეტესობაში იგულისხმებოდა, რომ ხახუნი ტვიფარსა და დრეკად ტანს შორის არ არსებობდა. გაცილებით დიდ მათემატიკურ სირთულეებს წარმოადგენს მეორე ზღვრული მდგომარეობა, როცა ტვიფარი და ფუძე იმყოფება შეჭიდულობის პირობებში (ასეთი ამოცანა არის დრეკადობის თეორიის ძირითადი შერეული ამოცანების კერძო შემთხვევა). უფრო მარტივ შემთხვევაში საქმე დაიყვანება ნახევარსივრცეში ორი ჰარმონიული ფუნქციის მოძებნაზე პირველი და მეორე რიგის განუყოფელი სასაზღვრო პირობებით. პირველად ასეთი ამოცანა წრიული შტამპისათვის იქნა გადაწყვეტილი ვ. მოსაკოვსკის (1954) მიერ, ორი ანალიზური ფუნქციის წრფივი შეუღლების ბრტყელ ამოცანაზე დაყვანის გზით. შემდგომში ი. უფლიანდმა (1965, 1967) მოგვცა ამ ამოცანის უშუალო ამოხსნა ტოროიდალური კოორდინატებისა და მელერ-ფოკის ინტეგრალური გარდაქმნების საშუალებით. ბ. აბრამიანის, ნ. არუთუნიანისა და ა. ბაბლოიანის (1966) სტატიაში განხორციელებულია კიდევ ერთი მიდგომა ამავე ამოცანისადმი, რომელიც დაფუძნებულია წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა გამოყენებაზე. კონტაქტურ ამოცანებს, შეჭიდულობის არსებობისას, ეძღვნება აგრეთვე ვ. მოსაკოვსკის (1963) ნაშრომი. დრეკადობის თეორიის ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა ნახევარსივრცისათვის, რომელსაც სასაზღვრო პირობების სწორხაზოვანი გამყოფი საზღვარი

აქვს, მოგვცა ი. უფლიანდმა (1957) კონტოროვიჩ-ლებედევის ინტეგრალური გარდაქმნის საშუალებით.

ტვიფარის სასაზღვრო ხაზის სიახლოვეს ძაბვათა ქცევის გამოკვლევას, როცა იგი იმყოფება შეჭიდულობის პირობებში, ეძღვნება გ. სავინისა [97] და ვ. რვაჩიოვის (1963) სტატია.

დრეკად ნახევარსივრცეში ხისტი ტვიფარის ჩაწნევის შესახებ კლასიკური ამოცანის ბუნებრივ განზოგადებას წარმოადგენს საკონტაქტო ამოცანა შემოუსაზღვრელი დრეკადი ფენისათვის ამ საკითხთა კვლევა ინტენსიურად ტარდებოდა ორმოცდაათიან წლებში, ამასთან ნახევარსივრცის შემთხვევისაგან განსხვავებით, აქ უკვე ვეღარ ხერხდებოდა ზუსტი ამონახსნების მიღება, და შეიძლებოდა მხოლოდ შესაბამისი ამოცანის დაყვანა ინტეგრალურ განტოლებებზე. პირველ ნაშრომად აქ უნდა მივიჩნიოთ ბ. კოგანის სტატია (1954), რომელშიც შედგენილია და რიცხობრივად გადაწყვეტილია პირველი გვარის ინტეგრალური განტოლება მრგვალ ტვიფარსა და ფენას შორის საკონტაქტო წნევისათვის. მსგავსი ამოცანის უფრო ეფექტური ამონახსნი მოგვცა ნ. ლებედევმა და ი. უფლიანდმა (1958) [98], რომლებიც განიხილავდნენ გეგმაში მრგვალი, ხისტი ტვიფარის ღერძულ ჩაწნევას დრეკად ფენაში, რომელიც იდო ხისტ ფუძეზე, ხახუნის არ არსებობისას. ეს ამოცანა დაიყვანებოდა წყვილ ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty \Phi(\lambda) I_0(\lambda r)\, d\lambda = f(r) \quad (0 \le r < a) \\ &\int_0^\infty \lambda \Phi(\lambda) I_0(\lambda r) \frac{d\lambda}{1-g(\lambda)} = 0, \quad (a < r < \infty) \end{aligned}\right\} \quad g(\lambda) = \frac{\lambda h + e^{-\lambda h}}{\lambda h + ch\lambda h sh\lambda h},$$

სადაც a – ტვიფარის რადიუსია, h – ფენის სისქე, $f(r)$ – მოცემული ფუნქცია, რომელიც დაკავშირებულია ტვიფარის ფუძის ფორმასთან, $\Phi(\lambda)$ – საძიებელი სიდიდე. ახალი უცნობი ფუნქციისაგან კვადრატურის სახეში ამონახსნის წარმოდგენის გზით

$$\Phi(\lambda) = \left[1 - g(\lambda)\right] \int_0^a \varphi(t) \cos \lambda t\, dt .$$

მეორე განტოლება კმაყოფილდება იგივურად, ხოლო პირველი დაიყვანება ფრედჰოლმის განტოლებაზე, რომელსაც უწყვეტი

სიმეტრული გული აქვს. ამოხსნის ასეთი გზა შესაძლებლობას იძლევა ჩავატაროთ რიგი რიცხვითი გაანგარიშებები, კერძოდ, ვიპოვოთ შტამპის გადაადგილებასა და P ღერძულ ძალას შორის დამოკიდებულება მარტივი ფორმულით

$$P = 2\pi \int_0^a \varphi(t) dt .$$

კ. ეგოროვმა (1960) გამოიყენა მსგავსი მეთოდიკა ტვიფარის არაღერძული ჩაწნევის შემთხვევაზე ვ. პუპირევისა და ი. უფლიანდის სტატიაში (1960) და უკანასკნელის მონოგრაფიაში (1967) მოცემულია ამონახსნი შერეული ამოცანის დრეკადი ფენისათვის, და აგრეთვე განხილულია ფენასა და ფუძეს შორის შეჭიდულობის შემთხვევა. არსებითია მივუთითოთ, რომ წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდმა საშუალება მოგვცა ეფექტურად განგვეხილა უფრო რთული ღერძულსიმეტრიული ამოცანაც სხვადასხვა რადიუსის ორი ტვიფარით ფენის კუმშვის შესახებ (ი. კუზმინი და ი. უფლიანდი, 1967). ი. ვოროვიჩმა და ი.უსტინოვმა (1959) მიიღეს სინგულარული ინტეგრალური განტოლება უშუალოდ $\Phi(\lambda)$ ფუნქციისათვის და შეიმუშავეს მისი ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდი a/h-ს ხარისხებად მწკრივში გაშლის გზით. ანალოგიური მეთოდი იყო გამოყენებული დ. გრილიცკის მიერ მრავალფენიანი გარემოს გრეხის შესახებ ამოცანაში მასთან შეჭიდული ტვიფარის საშუალებით და მსგავს კონტაქტურ ამოცანებში. წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდმა საშუალება მისცა რიგ ავტორებს (მაგალითად. გ. ვალოვი, 1914, ს. კოტლიარი, 1964; ვ. დევნოროვიჩი, 1964) [99] ამოეხსნათ სხვადასხვაგვარი საკონტაქტო ამოცანები დრეკადი ფენისათვის, მათ რიცხვში თერმოდრეკადიც. საკონტაქტო და შერეული ამოცანები ანიზოტროპული ტანებისათვის განიხილებოდა ს. ლეხნიცკის (1950), დ. გრილიცკისა და ი.კიზიმას (1962, 1964) [100] , რ. სუნჩელეევის (1965, 1966) მიერ.

სპეციალური ეფექტური მეთოდი ტვიფარის დრეკად ფენაზე ზემოქმედების შესახებ საკონტაქტო ამოცანებისადმი, დაყრდნობილი ინტეგრალურ განტოლების უშუალო განხილვაზე, ტვიფარის ქვეშ წნევისათვის, იყო შემოთავაზებული ვ.ალექსანდროვისა და ი. ვოროვიჩის (1960, 1964) მიერ. ამოცანის ამონახსნს ჰქონდა მცირე

პარამეტრით გაშლის სახე – ტვიფარის მახასიათებელი ზომის შეფარდება ფენის სისქესთან. არსებითია, რომ ეფექტური შედეგები ამ დროს მოხერხდა არა მარტო წრიული, არამედ გეგმაში ელიფსური შტამპისათვის, და ასევე ფუძის ზოგიერთი სხვა ფორმებისთვისაც. მითითებულმა მეთოდმა მიიღო შემდგომი განვითარება ვ. ალექსანდროვისა (1963, 1964, 1967) [101] და ი. ვოროვიჩის ნაშრომებში. იგი დღეისათვის შეიძლება ჩაითვალოს ერთერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდად განსახილველი კლასის საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნისათვის, ფენის სისქისა და ტვიფარის მახასიათებელი ზომის ფარდობის ნებისმიერ სიდიდისას.

ნაშრომთაგან, რომლებიც ეძღვნება უფრო რთულ საკონტაქტო პრობლემებს, აღვნიშნოთ ვ. გუბენკოს სტატია (1960), რომელშიც გამოკვლეულია რგოლური ტვიფარების დრეკად ფუძეზე ზემოქმედება და აგრეთვე ი.ვოროვიჩისა და ვ.კოპასენკოს (1966) ნაშრომი კონტაქტური ამოცანის შესახებ ნახევარზოლისათვის.

წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა საშუალებით, შეიძლება წარმატებით გადაწყდეს ამოცანები დრეკად ფენაში ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ, რომელიც დასუსტებულია თანაღერძული ხვრეტებით, პარალელურებით ფენის საზღვრებისა. ასეთი ტიპის უმარტივეს ამოცანას (ი. უფლიანდი, 1959) წარმოადგენს დრეკადი ფენის წონასწორობა, რომელიც შუა სიბრტყეში შეიცავს ერთ სიმეტრიულად ჩატვირთულ წრიულ ხვრეტს. ი.მარკუზოვმა (1963) გამოიკვლია იგივე საკითხი წონასწორული ბზარის ზომების პოვნის შესახებ ამოცანასთან კავშირში გ.ბარებლატის მეთოდით.

სხვა ნაშრომებისაგან, რომლებიც ეხება ჭრილებისა და ხვრელების მქონე სხეულების წონასწორობას, მივუთითებთ ვ. პანასიუკის (1960) [102], ნ. ლებედევის და ი. უფლიანდის (1960), ი. კუზმინისა (1966) და ნ. პალცუნის (1967), ბ.მიხაილოვის (1974), გ. ყიფიანის (1989) [103]. სტატიებსა და აგრეთვე გ. სავინის, ა.კოსმოდამიანსკის და ა. გუზის (1967), ნ. პრეობრაჟენსკის (1989), ბ.მიხაილოვისა და გ. ყიფიანის (1988), ა. ფილინის (1987) მიმოხილვით ნაშრომებს.

გადავიდეთ ახლა კონტაქტურ ამოცანებზე, რომლებიც ეხება უსასრულო ცილინდრის წონასწორობას. ამ საკითხების განხილვისას

ყველაზე ეფექტური აღმოჩნდა წყვილ ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდი, დაკავშირებული ფურიეს გარდაქმნებთან ღერძული კოორდინატით. ამ ხერხის დამახასიათებელ თავისებურებას წარმოადგენს ის გარემოება, რომ კონტაქტის ნახევრადუსასრულო მიდამოს შემთხვევაში ეს განტოლებები კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდების საშუალებით, რომლებიც მოცემულ ზოლში ანალიზური ფუნქციის ფაქტორიზაციის შესაძლებლობას ეყრდნობიან, უშვებენ ზუსტ ამონახსნს. ამ მიმართულების პირველ ნაშრომად იქცა ბ. კოგანის (1956) სტატია, მიძღვნილი უსასრულო ცილინდრის, რომელიც ჩაჭედილია უხახუნოდ ნახევრადუსასრულო ხისტ გარსაკრში ღერძულსიმეტრიული დაძაბული მდგომარეობის შესწავლისადმი დაშვებით, რომ კონტაქტის მიდამოში მოცემულია მუდმივი რადიალური გადაადგილება, ამოცანა დაიყვანება წყვილ განტოლებაზე, სახით

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\infty f(\lambda)e^{i\lambda\xi}d\lambda = 0, && (\xi > 0), \\ &\int_0^\infty \frac{f(\lambda)I_1^2(\lambda)e^{i\lambda\xi}d\lambda}{(\lambda^2 - 2 + 2\nu)I_1^2(\lambda) + \lambda^2 I_0^2(\lambda)} = u_0, && (\xi < 0) \end{aligned}\right\}$$

რომელთა ზუსტი ამოხსნა ხორციელდება რაიმე მეღომორფული ფუნქციის უსასრულო ნამრავლის სახით აგებით. ბ. კოგანის, ა. ხრუსტალიოვის და ფ.ვეინშტეინის (1958-1965) უფრო გვიანდელ ნაშრომებში ეს მეთოდიკა იყო გამოყენებული სხვადასხვა შერეულ ამოცანებში, როგორც მთლიანი, ასევე ღრუ ცილინდრისათვისაც და აგრეთვე ტრანსვერსალური ანიზოტროპიის შემთხვევაშიც. მსგავსი ამოცანების ამოხსნის მეთოდი, დაფუძნებული მათი ვინერ-ჰოპფის ინტეგრალურ განტოლებაზე დაყვანაზე კონტაქტური ძაბვებისათვის, შეიმუშავა გ.პოპოვმა (1964) [104]. მის მიერვეა მოცემული კონტაქტის ორი სიმეტრიული უბნის მქონე უსასრულო ცილინდრისათვის საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა. მივუთითებთ კიდევ გ. ვალოვის (1966) სტატიაზე, სადაც ტრიგონომეტრიული გულით წყვილი ინტეგრალური განტოლებების საშუალებით განხილულია ღრუ უსასრულო ცილინდრის გრეხის შესახებ ამოცანა.

ბოლო პერიოდში, წყვილ მწკრივთა ახალი აპარატის განვითარების შედეგად მოხერხდა ამოხსნადი საკონტაქტო ამოცანების არსებითი

გაფართოება. შერეული ამოცანებისადმი მიმართებაში დრეკადი სფეროსათვის წყვილ მწკრივთა ქვეშ (ან წყვილ ჯამთა განტოლებების ქვეშ) იგულისხმება განტოლებათა სისტემა

$$\left.\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n A_n K_n(x) &= f_1(x), \qquad (a \le x < c),\\ \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n A_n K_n(x) &= f_0(x), \qquad (c < x < b), \end{aligned}\right\}$$

რომლისგანაც უნდა განისაზღვროს A_n კოეფიციენტები, ამასთან იგულისხმება, რომ გულები $K_n(x)$ ქმნიან $(a,\ b)$ შუალედში შეკრულ სისტემას, ხოლო α_n და γ_n მოცემულია წყვილ მწკრივთა საშუალებით, რომლებიც შეიცავენ გაშლას ლეჟანდრის პოლინომებად; ნ.არუთინიანის, ბ. აბრამიანის და ა. ბაბლოიანის (1964, 1966) ნაშრომებში ამოხსნილ იქნა რამდენიმე საინტერესო ამოცანა დრეკადი სფეროს დეფორმაციის შესახებ, და აგრეთვე ბრუნვის ელიფსოიდის შესახებ, შერეული სასაზღვრო პირობებისას. მათ მიერ განხილულია სფეროს ღერძულსიმეტრიული კუმშვა ორი სიმეტრიულად განლაგებული, ერთნაირი ხისტი ტვიფარით, ხახუნის არ არსებობის დაშვებით. ეს ამოცანა მოხერხდა დაყვანილიყო ზემოთ მითითებული სახის წყვილ მწკრივზე, რაც $K_n(x) = P_n(x),\ \ \alpha_n = n + \dfrac{1}{2},\ \ \gamma_n = 1 + \beta_n$ (β_n სიდიდეებს $n \to \infty$-ისას აქვთ $1/n$ რიგი), $a = -1$, $b = 1$. თუ აღვნიშნავთ $V(x)$-ით წყვილ მწკრივთაგან პირველი ჯამის მნიშვნელობას, როცა $x > c$, მაშინ ამოხსნა დაიყვანება ინტეგრალურ განტოლებაზე

$$V(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_c^x \frac{dy}{\sqrt{x-y}}\int_c^1 V(\xi)S(\xi,y)d\xi = \Phi(x),$$

სადაც

$$S(\xi,y) = \sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n P_n(\xi)\cos\left[\left(n+\frac{1}{n}\right)\arccos y\right]$$

და $\Phi(x)$ – ცნობილი ფუნქციაა. მსგავსი მეთოდითაა მოცემული დრეკადი სფერო მასთან შეჭიდული და სიმეტრიულად განლაგებული ერთნაირი ორი ტვიფარით, გრეხის ამოცანის ამონახსნი. ლეჟანდრის პოლინომებად წყვილ მწკრივთა მეთოდით მოცემულია აგრეთვე ზოგიერთი შერეული ამოცანა დრეკადი სფეროს და გაწელილი

ბრუნვის ელიფსოიდის კუმშვისა და გრეხის შესახებ. და ბოლოს, განხილულია საკონტაქტო ამოცანა დრეკად სფეროში ხისტი ტვიფარის ჩაწნევისა. ამასთან წყვილი მწკრივები ლეჟანდრის პოლინიმებად დაყვანილ იქნა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემაზე. მაგალითის სახით განიხილებოდა სფერო, რომელიც უძრავადაა უხახუნოდ ნახევარსფერულ ამონაღებში და დატვირთულია ზედაპირის დანარჩენ ნაწილში.

წყვილი მწკრივები ლეჟანდრის პოლინომებად შეიძლება იყოს ასევე ეფექტურად გამოყენებული სფერული კოორდინატების საშუალებით სფერული ჩანართის მქონე ნახევარსივრცის გრეხის შერეული ამოცანის ამოხსნისას (იხ. ა. რუხოვეცი და ი. უფლიანდი, 1967).

აღსანიშნავია აგრეთვე ნ. ბოროდაჩევის (1967) საინტერესო სტატია, რომელშიც წყვილი მწკრივები ბესელის ფუნქციებად გამოყენებულია ნახევრადუსასრულო ცილინდრის ტორსში წრიული ტვიფარის ჩაწნევის შესახებ ღერძულსიმეტრიულ ამოცანაში.

საჭიროა მივუთითოთ დრეკადობის თეორიის სივრცითი შერეული ამოცანების კიდევ ერთ ნაწილზე, რომელმაც უკანასკნელ წლებში მიიღო დიდი განვითარება. კერძოდ, საკონტაქტო ამოცანები წრფივად დეფორმირებადი ფუძისათვის და მასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე, არაერთგვაროვან დრეკად ნახევარსივრცეზე ტვიფარის ზემოქმედების შესახებ. ფუძემდებელი ნაშრომები აქ ეკუთვნის ბ. კორენევს (1954, 1957, 1960). შემდგომში ამ პრობლემებით იყვნენ დაკავებული ვ. მოსაკოვსკი (1958), გ. პოპოვი (1959), ა. რაკოვი და ვ. რვაჩიოვი (1961), ნ. როსტოვცევი (1961, 1964) და რიგი სხვა ავტორებისა. უფრო დაწვრილებითი ცნობები ამ საკითხებზე შედის ბ. იშკოვასა და ბ. კორენევის მიმოხილვით მოხსენებაში (1966).

დასასრულ აღვნიშნოთ, რომ მნიშვნელოვანი რაოდენობა ცნობებისა და დიდი ბიბლიოგრაფია დრეკადობის თეორიის შერეული სივრცითი ამოცანების შესახებ, რომლებიც შესწავლილია მეოცე საუკუნის 60-იანი წლების ჩათვლით, მოიპოვება დ. შერმანის (1962), გ.აბრამიანის და ა. ალექსანდროვის (1966), გ. პოპოვისა და ნ.როსტოვცევის (1966), ნ. კილჩევსკისა და ე. კოსტიუკის (1966), ვ.რვაჩიოვის (1967) მიმოხილვებში.

2.2.1. დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანების დასმა და ამოხსნის მეთოდები

დღეისათვის ერთერთი ყველაზე მნიშვნელოვანი და კარგად დამუშავებული დრეკადობის თეორიის ნაწილი, სადაც მიღწევები განსაკუთრებულად დიდია, არის ე.წ. დრეკადობის ბრტყელი თეორია. ბრტყელი ამოცანების დამუშავებაში წარმატება აიხსნება მისი განხილვისას კომპლექსური ცვლადის ანალიზური ფუნქციის თეორიის გამოყენებით. პირველი შედეგები ამ მიმართულებით, რითაც მთლიანობაში განისაზღვრა ბრტყელი თეორიის თანამედროვე სახე, მიღებული იყო გ. კოლოსოვისა და ნ.მუსხელიშვილის ფუძემდებლურ გამოკვლევებში.

დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანა გულისხმობს დრეკადი გარემოს დეფორმაციას, რომელიც მოცემული სიბრტყის (გრძელი ცილინდრის დეფორმაცია თავისუფალი ფუძეებით) პარალელურია, ან მის ბრტყელ დაძაბულ მდგომარეობას (თხელი ფირფიტის დეფორმაცია ძალებით, რომლებიც მდებარეობს მის სიბრტყეში). ამ შემთხვევებში დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა დაიყვანება ბიჰარმონიული განტოლებისათვის სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნაზე. ბიჰარმონიულ განტოლებამდე დადის, ნორმალური დატვირთვების ქვეშ მოქცეული დრეკადი ფირფიტების, წონასწორობის ამოცანებიც. მათემატიკური ფორმულირებით ბრტყელი ამოცანები და ფირფიტების ღუნვის ამოცანები ერთმანეთის მსგავსია, ასევე მსგავსია. მათი ამოხსნის მეთოდებიც. ამიტომ მიზანშეწონილია ამ ორი ტიპის ამოცანის ერთობლივი განხილვა.

2.2.1.1. ბრტყელი ამოცანის ამოხსნის ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენა

ნ. მუსხელიშვილის აღნიშვნებში ნაგულისხმევია, რომ ბრტყელი ამოცანის ძირითადი თანაფარდობები ცნობილია. დრეკადი გარემოს S არე, წარმოადგენს Oxy სიბრტყის ბმულ ნაწილს, შემოსაზღვრულს ერთი ან რამდენიმე შეკრული კონტურით $L_1, L_2, \cdots, L_m, L_{m+1}$ საერთო

წერტილების გარეშე. ამასთან, უკანასკნელი მოიცავს ყველა დანარჩენს. L_{m+1} კონტურის არ არსებობისას გვაქვს ნახვრეტებიანი სიბრტყის უსასრულო არე. განიხილება აგრეთვე შემთხვევები, როცა L_k კონტურებს შორის გვაქვს სასრული სიგრძის ან უსასრულო შეუკრელი ნაწილები (სიბრტყე ბზარებით, ნახევარსიბრტყე ნახვრეტებით და ა.შ.) იგულისხმება მასათა ძალების არქონა.

ძაბვები და დეფორმაციები კოლოსოვ-მუსხელიშვილის $\varphi(z)$, $\psi(z)$ კომპლექსურ პოტენციალებში გამოისახება ფორმულებით

$$\left.\begin{aligned} &X_x + Y_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right], \\ &Y_y - X_x + 2iX_y = 2\left[\bar{z}\varphi''\psi(z) + \psi'(z)\right], \\ &2\mu(u+iv) = x\varphi(x) - 2\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

ამ ფორმულებზე პირველად მიუთითა გ. კოლოსოვმა 1909 წელს ფუძემდებლურ ნაშრომში „კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის ერთი გამოყენების შესახებ დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ბრტყელ ამოცანაში“. მათი მკაცრი დასაბუთება მოცემულია მოგვიანებით ნ. მუსხელიშვილის მიერ (იხ. მისი მონოგრაფია „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“, 1933, გამ. 5-1966) [105].

ნ. მუსხელიშვილის კალამს ეკუთვნის 80-მდე სამეცნიერო გამოკვლევა. მისმა ნაშრომებმა დიდი გავლენა იქონიეს დრეკადობის თეორიისა და მათემატიკური ფიზიკის შემდგომ განვითარებაზე მთელ მსოფლიოში. ნ. მუსხელიშვილის მეთოდების საფუძველზე დაწერილია უამრავი ნაშრომი. მისი შედეგები ფართოდაა გამოყენებული აგრეთვე ტექნიკის სხვადასხვა ამოცანებში. ნ. მუსხელიშვილის ფუნდამენტური მონოგრაფია „დრეკადობის მათემატიკური თეორიის ზოგიერთი ძირითადი ამოცანა“, რომელიც პირველად 1933 წელს გამოსცა სსრ კავშირის მეცნიერებათა აკადემიამ, შემდგომ კიდევ ხუთჯერ დაიბეჭდა. მისი მონოგრაფიები გადათარგმნილია უცხო ენებზე. არ შეიძლება არ აღინიშნოს, რომ თარგმანების გამოქვეყნებას უცხოელ მეცნიერთა წრეებში აღფრთოვანებით შეხვდნენ. უცხოეთის სამეცნიერო და რეფერატული ჟურნალების ფურცლებზე გამოქვეყნდა რეცენზიები, რომლებშიც მონოგრაფიას ძალზე მაღალი შეფასება აქვს მიცემული.

ქვემოთ მოყვანილია ნაწყვეტები ცნობილი ინგლისელი მექანიკოსის პროფესორ რ. ჰილის რეცენზიიდან, რომელიც ინგლისურ ჟურნალში „Nature“ (ტ. 174, № 4433, 1954წ.) გამოქვეყნდა სათაურით: „ეტაპი დრეკადობის თეორიაში“.

ამ თარგმანის გამოჩენა, მხედველობაშია ზემოთ აღნიშნული მონოგრაფია, რომელიც ყოველმხრივ ჩინებულია, პირველხარისხოვანი მნიშვნელობის მოვლენას წარმოადგენს. მუსხელიშვილმა აჩვენა, რომ ზოგად ამოხსნებს (გადაადგილებათა და დაძაბულობათა ველის კომპლექსურ წარმოდგენებს) აქვს არა მარტო თეორიული მნიშვნელობა, არამედ საგრძნობი უპირატესობა რიგ სასაზღვრო ამოცანებში საყოველთაოდ მიღებულ მეთოდებთან შედარებით.

„მუსხელიშვილის ნაწარმოებებმა არ შეიძლება უაღრესად ღრმა შთაბეჭდილება არ მოახდინოს მკითხველზე თავისი მკაფიობით, სასიამოვნო დარბაისლური სტილითა და ყოველგვარი დეტალისადმი კეთილსინდისიერი დამოკიდებულებით, არსად არ გვხვდება დაუხვეწელობა (ნაშრომები კი შეიცავენ 1000 გვერდზე მეტს), ყოველი არსებითი ადგილი მკაფიოდაა ახსნილი: მსჯელობა უმაღლეს დონეზეა აყვანილი დამატებებშიდაც კი. დასასრულს რეცენზენტი აღნიშნავს: „სამწუხაროა, რომ ავტორის თვალთახედვა არის თვალთახედვა მათემატიკოსისა, რომელიც მექანიკაში მუშაობს. საკითხი არაა მთელი სიგრძე-სიგანით განხილული: გაშუქებულია ერთი ასპექტი, მაგრამ რა ბრწყინვალედ!“ ანალოგიური შეფასება გვხვდება მრავალ სხვა რეცენზიებშიც.

აღსანიშნავია, რომ ცალადბმულ და სასრულ S არეში, შეყურსული ძალებისა და მომენტების არ ქონისას, პოტენციალები $\varphi(z)$ და $\psi(z)$ ჰოლომორფულია. მრავალბმული სასრული არეს შემთხვევაში კი ძაბვებისა და გადაადგილებების ცალსახობისა და სასრულობის მოთხოვნას S-ში მივყავართ წარმოდგენებამდე

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+x)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-Z_k)+\varphi^*(z),\\ \psi(z) &= -\frac{1}{2\pi(1+x)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-Z_k)+\psi^*(z),\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

სადაც $\varphi^*(z)$ და $\psi^*(z)$ ჰოლომორფულებია S-ში, $Z_k - L_k$-ს შიგნით წერტილებია, $X_k + iY_k L_k$-ზე გარე ძალების მთავარი ვექტორია. უსასრულო S არესათვის, როცა L_{m+1} კონტური არ გვაქვს, ხოლო ძაბვები სხეულის უსასრულოდ დაშორებულ ნაწილებში სასრულია, φ და ψ წარმოდგენებს უსასრულოდ დაშორებული წერტილის სიახლოვეს ექნებათ სახე

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z) &= -\frac{X+iY}{2\pi(1+x)}\ln z + \varphi_0(z) + \Gamma_z,\\ \psi(z) &= x\frac{X-iY}{2\pi(1+x)}\ln z + \psi_0(z) + \Gamma'_z.\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Γ, Γ' კომპლექსური მუდმივებით განისაზღვრება ძაბვები და გადაადგილებები უსასრულობაში, $X+iY-$ გარე ძალების მთავარი ვექტორია L არეს სრულ საზღვარზე, ხოლო $\varphi_0(z)$ და $\psi_0(z)$ ჰოლომორფულებია $z=\infty$ მიდამოში. გადაადგილების ვექტორი შემოსაზღვრულია $\Gamma = \Gamma' = 0$, $X+iY=0$ პირობებისას.

2.2.2. დრეკადობის თეორიის ძირითადი ბრტყელი ამოცანების ფორმულირება

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ძირითად ამოცანებად ჩვეულებრივ გულისხმობენ შემდეგ სამს:

პირველი ძირითადი ამოცანა მოითხოვს სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრას, როცა მის საზღვარზე მოცემულია გარე ძალები. ეს ამოცანა დაიყვანება ანალიზური ფუნქციის თეორიის შემდეგ სასაზღვრო ამოცანამდე:

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + c(t),\ L\text{-ზე} \tag{64}$$

სადაც $f(t)$–L-ზე მოცემული ფუნქციაა, რომელიც განისაზღვრება გარე ძალებით ფორმულით

$$f(t) = i\int_0^s (X_n + iY_n)\,ds,$$

ამასთან s არის L_k კონტურის რკალი. იგი ათვლილია თითოეულ L_k-ზე

მისი რომელიღაც ფიქსირებული წერტილიდან დადებითი მიმართულებით, ხოლო $C(t)=C_k$ L_l-ზე, C_k-კომპლექსური მუდმივია.

მეორე ძირითადი ამოცანაა სხეულის დრეკადი წონასწორობის განსაზღვრა მისი საზღვრის წერტილების მოცემული გადაადგილებებით. ამ შემთხვევაში S არეში φ და ψ ანალიზური ფუნქციების მოძებნისათვის უნდა გვქონდეს სასაზღვრო პირობა

$$x\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=g(t)\,,\quad L\text{-ზე} \tag{65}$$

სადაც $g(t)$ მოცემული ფუნქციაა, $g(t)=2\mu(u+iv)$ L-ზე.

ძირითად შერეულ ამოცანას სიმარტივისათვის ჩამოვაყალიბებთ სასრული ცალადბმული არესათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია ერთი შეკრული კონტურით. ამ ამოცანაში საზღვრის ნაწილზე $L'=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$, სადაც a_kb_k $(k=1,\cdots,n)$-ის გარკვეული წესით განლაგებული კონტურის არაგადამფარავი რკალებია, მოცემულია გარე ძაბვები, ხოლო $L''=b_1a_2+b_2a_3+\cdots+b_na_{n+1}$ $(a_{n+1}=a_1)$ სხვა ნაწილზე მოცემულია გადაადგილებები. ანალიზური ფუნქციების შესაბამის ამოცანას აქვს სახე

$$k\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=h(t)+c(t)\,. \tag{66}$$

(64) და (65) პირობები დაცული უნდა იყოს თითოეულ L_k კონტურზე. $c(t)$ მუდმივას, რომელიც ფიგურირებს (64)-ის მარჯვენა ნაწილში შეუძლია მიიღოს სხვადასხვა მნიშვნელობა სხვადასხვა კონტურზე. მხოლოდ ერთ მათგანზე შეგვიძლია იგი დავაფიქსიროთ სურვილისამებრ (ჩვეულებრივ მიიჩნევენ, რომ $c_{m+1}=0$), ხოლო სხვა კონტურებზე ისინი სრულიად ნებისმიერი რჩებიან და განსაზღვრას ექვემდებარება ამოცანის გადაწყვეტის მსვლელობაში. სრულიად ასევე c_k მუდმივები (66)-ის მარჯვენა ნაწილში (გარდა ჩვენს მიერ შერჩეულისა) ისინი არაა წინასწარ მოცემული და ექვემდებარებიან განსაზღვრას φ და ψ ფუნქციებთან ერთად.

დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში განიხილება აგრეთვე ე.წ. **მესამე ძირითადი ამოცანა,** როცა გარემოს საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის ნორმალური მდგენელი და გარე ძაბვების ვექტორის მხები მდგენელი. ეს შეესაბამება დრეკადი ტანის მოცემული

ფორმის ხისტ პროფილთან ურთიერთშეხებას, როცა დრეკად და ხისტ სხეულებს შორის კონტაქტი ხდება მთელ მათ საზღვარზე.

თუ ნებისმიერი მუდმივა (64) და (66)-ის მარჯვენა ნაწილებში ისეა დაფიქსირებული, როგორც მითითებულია ზემოთ, მაშინ φ და ψ-სათვის დამატებით პირობებს ექნებათ შემდეგი სახე:

პირველ ამოცანაში

$$\varphi(0) = 0, \quad \mathrm{Im}\varphi'(0) = 0 .$$

მეორე და შერეულ ამოცანებში

$$\varphi\ (0)\ =\ 0\ \text{ან}\ \psi(0) = 0 .$$

ამით ამოიწურება φ და ψ-ის ამორჩევის ნება.

დამტკიცებულია, რომ დასმულ ამოცანათაგან თითოეულს არ შეიძლება ქონდეს ერთი ამონახსნის მეტი. პირველი ძირითადი ამოცანის ამოხსნის არსებობისათვის არეს საზღვარზე მოდებული გარე ძალვების მთავარი ვექტორისა და მთავარი მომენტის ნულთან ტოლობის პირობებია აუცილებელი. (64)-ის მარჯვენა ნაწილში ფიგურირებული $f(t)$ ფუნქციის ცალსახობისა და უწყვეტობისას, ეს ორი პირობა დაიყვანება ერთზე (ნ. მუსხელიშვილი, 1966).

$$\mathrm{Re}\int_L f(t)\overline{dt} = 0 .$$

ფირფიტების ღუნვის თეორიაში მტკიცდება, რომ თხელი ერთგვაროვანი დრეკადი ფირფიტის, რომელიც მოქცეულია მის ზედაპირზე განაწილებული ნორმალური დატვირთვის მოქმედების ქვეშ, შუა სიბრტყის ჩაღუნვა $\omega(x,\ y)$ აკმაყოფილებს არაერთგვაროვან ბიჰარმონიულ განტოლებას

$$\Delta\Delta\omega = \frac{q}{D}, \tag{67}$$

სადაც q – დატვირთვის ინტენსიობაა, ხოლო D – ცილინდრული სიხისტე.

(67)-ის რაიმე კერძო ამონახსნის მოძებნის შემდეგ, ჩვენ შეგვიძლია გურსას ცნობილი ფორმულით წარმოვადგინოთ ამ განტოლების ზოგადი ამონახსნი ორ ანალიზურ φ და x ფუნქციაში, ამასთან $\chi'(z) = \psi(z)$. მათი მეშვეობით გამოისახება ძირითადი სიდიდეები, რომლებიც განსაზღვრავენ ფირფიტის დაძაბულ მდგომარეობას.

ადგილი აქვს შემდეგ ფორმულებს (ს. ლეხნიცკი, 1938), რომლებიც კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულების ანალოგიურია:

$$\left.\begin{aligned} &M_y - M_x + 2iH_{xy} = 4D(1-\nu)\left[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\right] + M_y^0 - M_x^0 + 2iH_{xy}^9, \\ &M_x + M_y = -8D(1-\nu)\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] + M_x^0 + M_y^0, \\ &N_x - iN_y = -8D\varphi''(z) + N_x^0 - iN_y^0. \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

აქ M_x, M_y – მღუნავი მომენტებია, H_{xy} – მგრეხი მომენტი, N_x, N_y – გადამჭრელი ძალები, რომლებიც მოდიან სიგრძის ერთეულზე; $M_x^0, \cdots, N_y^0$ – იგივე სიდიდეები, რომლებიც მიეკუთვნება (67) განტოლების ამორჩეულ კერძო ამონახსნს. φ და ψ ფუნქციების განსაზღვრულობის ხარისხი იგივეა, რაც ბრტყელ ამოცანაში.

(67) განტოლებიდან ჩაღუნვის განსაზღვრისათვის აუცილებელია მას მივუერთოთ სასაზღვრო პირობები, რომლებიც შეესაბამებიან საზღვრის ჩამაგრების ამა თუ იმ ხასიათს.

აქ გვაქვს შემდეგი სამი ძირითადი ამოცანა. ჩამოვაყალიბოთ ისინი შეკრული კონტურით შემოსაზღვრული ცალადბმული გარემოსათვის.

I. ფირფიტის კიდე ჩამაგრებულია – ნიშნავს, რომ ფირფიტის შუა ზედაპირის მიერ დაკავებული S არის საზღვარზე უნდა გვქონდეს შემდეგი თანაფარდობები

$$\omega = 0, \quad \frac{d\omega}{dn} = 0, \tag{69}$$

სადაც n – კონტურისადმი გარე ნორმალია.

II. ფირფიტის კიდე თავისუფალია – სასაზღვრო პირობებს აქვთ სახე

$$\left.\begin{aligned} &\nu\Delta\omega + (1-\nu)\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\sin 2\theta\right] = 0, \\ &\frac{\partial\Delta\omega}{\partial n} + \frac{1-\nu}{2}\frac{d}{ds}\left[\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right)\sin 2\theta + 2\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\cos 2\theta\right] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

სადაც θ – კუთხეა, რომელსაც ადგენს გარე ნორმალი Ox ღერძთან, ტოლობათა მარცხენა ნაწილები წარმოადგენენ შესაბამისად მღუნავ მომენტსა და განზოგადებულ გადამჭრელ ძალას, მიკუთვნებულებს სიგრძის ერთეულისადმი და მოქმედებს ფირფიტის ელემენტზე n ნორმალით.

III. ფირფიტის კიდე დაყრდნობილია – კიდის თავისუფალ დაყრდნობას პასუხობს შემდეგი პირობები:

$$\left.\begin{aligned} &\omega \equiv 0, \\ &\nu\Delta\omega + (1-\nu)\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\cos^2\theta + \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\sin^2\theta + \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}\sin 2\theta\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

გარდა სასაზღვრო პირობების ამ ძირითადი სახეებისა, არაიშვიათად გვხვდება გამოყენებისათვის განსაკუთრებით საინტერესო, შერეული პირობები, როცა, მაგალითად საზღვრის ერთი ნაწილი ჩამაგრებულია, სხვა დაყრდნობილი, და დანარჩენი თავისუფალი.

ვინაიდან w ფუნქციისა და მისი ნორმალური წარმოებულის სასაზღვრო მნიშვნელობით ყოველთვის შეიძლება მოიძებნოს x და y-ით ამ ფუნქციის კერძო წარმოებულების სასაზღვრო მნიშვნელობები, ამოცანა ერთი ფირფიტის ღუნვის შესახებ ბრტყელი დრეკადობის თეორიის პირველი ამოცანის ტოლფასია. პირველი ამოცანის სასაზღვრო პირობები ზუსტად ემთხვევა (64) პირობას.

თავისუფალ საზღვარზე (70) პირობას, როგორც ეს იყო აღნიშნული ს.ლეხნიცკის (1938) და ი. ვეკუას (1942) ნაშრომებში, მათი სათანადო გარდაქმნებით დაიყვანება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე, რომელიც (65)-ის ანალოგიურია. განსხვავება მდგომარეობს მხოლოდ იმაში, რომ მუდმივა x (65)-ის მარცხენა ნაწილში იცვლება სხვა მუდმივათი: $x^{+} = (3+\nu)(1-\nu)$, ხოლო მარჯვენა ნაწილი მოიცემა $ict + c_1$ სახის მამრავლის სიზუსტით, სადაც c – ნივთიერი, c_1-კომპლექსური მუდმივაა. თუმცა, ცალადბმული არეს განსახილველ შემთხვევაში ეს მუდმივები შეიძლება მივიჩნიოთ ნულად.

და ბოლოს კიდეების თავისუფალი დაყრდნობის (71) პირობები შეიძლება φ და ψ ფუნქციებით ჩაიწეროს სახით (ა. კალანდია, 1953)

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\left\{\lambda_0\varphi'(t) - \left(\frac{dt}{ds}\right)^2\left[t\varphi''(t) + \psi'(t)\right]\right\} = g_1(t), \\ &\operatorname{Re}\left\{\frac{dt}{ds}\left[\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)\right]\right\} = g_2(t), \end{aligned}\right\} L\text{-ზე} \tag{72}$$

სადაც g_1, $g_2 - L$-ზე მოცემული ფუნქციებია, $\lambda_0 = 2(1+\nu)/(1-\nu)$.

არ არის ძნელი დავრწმუნდეთ, რომ (72) ამოცანა და დრეკადობის ბრტყელი თეორიის მესამე ამოცანა ერთმანეთის ტოლფასია.

ზემოთ ნათქვამიდან ნათელია, რომ ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდები, ხანდახან, თითქმის ყოველგვარი ცვლილების გარეშე უდგება თხელი ფირფიტების ღუნვის ამოცანებს. ეს შესაძლებლობა პირველად გამოყენებული იქნა ა. ლურიეს მიერ (1928).

2.2.3. ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მეთოდები

ქვემოთ მოცემულია ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მოკლე დახასიათება, რომლებიც ეფუძნება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის გამოყენებას. ძირითადად ჩვენ შემოვიფარგლებთ იმ შემთხვევის განხილვით, როცა დრეკადი გარემო ავსებს ცალადბმულ სასრულ არეს, შემოსაზღვრულს შეკრული კონტურით. L-ის მიმართ შიდა ძირითადი S არეს, აქ S^+-ით აღვნიშნავთ, ხოლო გარეს (რომელიც S^+-ს შეავსებს სრულ სიბრტყემდე) – S^--ით.

2.2.3.1. ფუნქციის ჰოლომორფულობა (ანალიზურობა)

გავიხსენოთ ზოგიერთი ელემენტარული ცნება და დაშვება, რომლებიც უკავშირდება ანალიზური ფუნქციის თეორიას და გამოიყენება შემდგომი მსჯელობისას.

კოშის ინტეგრალის ქვეშ იგულისხმება გამოსახულება

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z}, \qquad (73)$$

სადაც t – L კონტურის წერტილის აფიქსია, ხოლო z – სიბრტყის ნებისმიერი წერტილის აფიქსი. თუ z – ემთხვევა L კონტურის t_0 წერტილს, მაშინ (73) ინტეგრალის ქვეშ კოშით, მისი მთავარი მნიშვნელობა გაიგება.

$F(z)$ ფუნქცია, რომელიც (73) ფორმულითაა განსაზღვრული, ჰოლომორფულია როგორც S^+ არეში, ასევე S^--შიც $f(t)$-ს საკმარისი სიგლუვისას (მაგალითად თუ იგი აკმაყოფილებდეს ჰელდერის პირობას

L-ზე) უწყვეტია შესაბამის შეკრულ $S^+ + L$ და $S^- + L$ არეებში. ამ ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობები L-დან მარცხნივ და მარჯვნივ, რომელიღაც $t_0 \in L$ წერტილში, აღნიშნული შესაბამისად $F^+(t_0)$ და $F^-(t_0)$ მოიცემა სოხოცკი-პლემელის ცნობილი ფორმულებით.

როგორც S^+-ში. ასევე S^--ში ჰოლომორფულ და F^+ და F^- უწყვეტი ზღვრული მნიშვნელობების მქონე ფუნქციას ნ. მუსხელიშვილის მიხედვით, უბან-უბან ჰოლომორფულს უწოდებენ. უბან-უბან ჰოლომორფული ფუნქციის მაგალითს, $f(t)$-ს ფუნქციის მიმართ ცნობილი პირობებისას იძლევა (73) ინტეგრალი.

იმისათვის, რომ მოცემული, L-ზე უწყვეტი $f(t)$ ფუნქცია იყოს რომელიც $f(z)$ ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობა, რომელიც ჰოლომორფულია S^+-ში, აუცილებელი და საკმარისია პირობა

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} = 0 \quad \text{ყველა} \quad z \in S^- - \text{ისთვის.} \tag{74}$$

ანალოგიურად, იმის პირობა, რომ ფუნქცია $f(t)$ იყოს ზღვრული მნიშვნელობა $f(z)$ ფუნქციის, რომელიც ჰოლომორფულია S^--ში, არის ტოლობა

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)dt}{t-z} = const \quad \text{ყველა} \quad z \in S^+ - \text{სათვის.} \tag{75}$$

იმ შემთხვევაში, როცა S^+ წარმოადგენს წრეს ერთეული რადიუსით, წინამდებარე პირობებს შეიძლება მივცეთ რამდენადმე სხვა, შემდგომი მიზნებისათვის უფრო მოხერხებული სახე (ნ. მუსხელიშვილი, 1966). მოცემული $f(z)$ ფუნქციით, რომელიც ჰოლომორფულია S^+-ში, განვსაზღვროთ კომპლექსური არგუმენტის სხვა ფუნქცია შემდეგი ტოლობით

$$f_*(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{76}$$

ხანდახან ამ ფუნქციისათვის ჩვენ გამოვიყენებთ აღნიშვნას

$$f_*(z) = \bar{f}\left(\frac{1}{z}\right). \tag{77}$$

კოში-რიმანის პირობის უშუალო შემოწმებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ $f_*(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია S^- არეში,

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის ჩათვლით და პირიქით. თუ ფუნქცია $f(z)$ ჰოლომორფულია S^--ში, მაშინ ჰოლომორფული იქნება z-საგან S^+ არეში.

(76) აღნიშვნა შეიძლება გამოვიყენოთ უფრო ზოგად შემთხვევაშიც, როცა, მაგალითად, $f(z)$-ს S^+-ის შიგნით აქვს პოლუსების სასრული რიცხვი. $f_*(z)$ ფუნქციას მაშინ ექნება იმავე რიგის პოლუსები წერტილებში, რომლებიც $f(z)$-ის პოლუსების ასახვებია ერთეულოვან წრეწირში.

(76) ფუნქციის ზღვრული მნიშვნელობებისათვის გვექნება

$$f_*(\bar{t}) = \overline{f^+(t)}, \quad f_*^+(t) = \overline{f^-(t)}. \tag{78}$$

(74)-ის გამოყენებით $f_*(z)$ ფუნქციის მიმართ, მივიღებთ პირობას

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z} = const \text{ ყველა } z \in S^+\text{-სათვის.} \tag{79}$$

აუცილებელს და საკმარისს იმისათვის, რომ წრეწირზე უწყვეტი $f(t)$ ფუნქცია იყოს რომელიღაც ისეთი $f(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობა, რომელიც ჰოლომორფულია S^+-ში. მუდმივას, რომელიც ტოლობის მარჯვენა ნაწილში ფიგურირებს, აქვს განსაზღვრული მნიშვნელობა $\overline{f(0)}$. ანალოგიურად, (75) პირობა მიიღებს სახეს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z} = 0 \text{ ყველა } z \in S^-\text{-სათვის.} \tag{80}$$

(76) ოპერაცია იძლევა S^+-ში ჰოლომორფული, მოცემული $f(z)$-ით S^--ში, ჰოლომორფული ფუნქციის კონსტრუირების ერთ შესაძლებელ ხერხს. ცხადია, რომ წრეში ჰოლომორფული ფუნქციის გავრცელება შეიძლება განხორციელდეს ხერხების ურიცხვი სიმრავლით. სახელდობრ, გავრცელების მითითებებული ხერხი არის ერთი იმ მცირეთაგან, რომლის გამოყენება შედარებით იოლია.

$f(z)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია როგორც S^+-ში, ისე S^--ში ფორმულით

$$f(z) = \begin{cases} f(z), \text{ როცა } |z|<1 \\ f_*(z), \text{ როცა } |z|>1. \end{cases}$$

აშკარაა, რომ $f(z)$ უბან-უბან ჰოლომორფულია. გარდა ამისა, იგი ანალიზურად განგრძობადია $|t| = 1$ წრეწირის იმ უბნებით, რომლებზეც $\operatorname{Im} f(t) = 0$. $f(z)$-ის უკანასკნელი თვისება უშუალოდ გამომდინარეობს (78)-დან.

ჰოლომორფული ფუნქციების ამგვარი გავრცობა ხშირად გამოიყენება დასახული მიზნებით იმ შემთხვევაშიც, როცა S^+-ნახევარსიბრტყეა. მაშინ (76)-ის ნაცვლად მიიჩნევენ (ნ. მუსხელიშვილი, 1966).

$$\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}. \tag{81}$$

ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის მრავალნაირი მეთოდებიდან, რომლებიც ცნობილია სამეცნიერო ლიტერატურაში დღეისათვის, აქ შევეხებით ძირითადად იმათ, რომლებიც ყველაზე უფრო ეფექტურებია როგორც სასაზღვრო ამოცანების ზოგადი გამოკვლევების აზრით, ისე კერძო შემთხვევებში კონკრეტულად მათი შესწავლისათვის. უპირველესად ყოვლისა, მხედველობაში გვექნება შემდეგი ოთხი მეთოდი.

1. ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდი კონფორმული ასახვის გამოყენებით;

2. დაყვანა ფუნქციონალურ (კერძოდ, ინტეგრალურ) განტოლებებამდე კონფორმული ასახვის გამოყენებით (ერთბმული არეების შემთხვევა);

3. ზოგადი მეთოდები, რომლებსაც მივყავართ ინტეგრალურ განტოლებებამდე კონფორმული ასახვის გარეშე;

4. დაყვანა წრფივი შეუღლების ამოცანამდე.

რიგ სპეციალურ შემთხვევებში, განსაკუთრებით მრავლადბმულ გარემოთა შესწავლისას, მიზანშეწონილად მიიჩნევა განხილვისას ამა თუ იმ მეთოდთა ურთიერთშეხამებით შემოტანა.

წარმოვადგინოთ მითითებული მეთოდების მოკლე აღწერა.

2.2.3.2. მოცემული ფუნქციის კონფორმული ასახვა

ბრტყელი ამოცანის ამოხსნისას ხშირად სასარგებლოა წინასწარ კონფორმულად ავსახოთ მოცემული არე, რომელიც შევსებულია დრეკადი გარემოთი, სიბრტყის რომელიღაც სხვა არეზე დამხმარე ζ ცვლადით. სასრული ცალადბმული S არესათვის, რომელიც შემოსაზღვრულია შეკრული კონტურით, ჩვეულებრივ მიმართავენ ერთეული რადიუსის წრეზე ასახვას სასრული ორადბმული მიდამოსათვის – წრიულ კონცენტრირებულ რგოლზე. ნახევარუსასრულო არეს შემთხვევაში, რომელსაც ორივე მხარეს უსასრული სამი მიმავალი საზღვარი აქვს – ნახევარსიბრტყეზე და ა.შ.

ჩვენ აქ მივუთითებთ კონფორმული ასახვის გამოყენების ერთ ვარიანტზე მითითებულ შემთხვევათაგან პირველში (ნ. მუსხელიშვილი, 1956). ვთქვათ

$$z=\omega(\zeta),$$

არის თანაფარდობა, რომელიც ახდენს ერთეული წრის $|\zeta|<1$, რომლის კონტურიც ჩვენ აღვნიშნეთ γ-თი საჭირო კონფორმული ასახვის რეალიზებას S არეზე. ფუნქციებს $\varphi(z)$ და $\psi(z)$, რომლებიც ახალი ξ ცვლადითაა გამოსახული აღვნიშნავთ $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$.

პირველი ამოცანის (64) სასაზღვრო პირობები მიიღებენ სახეს

$$\varphi(\sigma)+\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}+\overline{\psi(\sigma)}=f(\sigma) \quad \gamma\text{-ზე}, \tag{82}$$

სადაც $\sigma-\gamma$ კონტურის წერტილია, $\sigma=e^{i\partial}$, $f-\gamma$-ზე მოცემული ფუნქციაა.

დავუშვათ, ფურიეს კომპლექსური მწკრივების სახით გაშლების შემდეგი შესაძლებლობა.

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\sum_{-\infty}^{\infty}b_k\sigma^k, \quad f(\sigma)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_k\sigma^k, \tag{83}$$

და დავუშვათ, რომ ერთეულ წრეში ($|\zeta|<1$-ისას)

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(\zeta)=\sum_{0}^{\infty}a_k\zeta^k,\ \psi(\zeta)=\sum_{0}^{\infty}a'_k\zeta',\\&\psi(\zeta)=\sum_{1}^{\infty}ka_k\zeta^{k-1}.\end{aligned}\right\} \tag{84}$$

მაშინ (82)-ის საფუძველზე, წინარე მწკრივების კრებადობის მიმართ ცნობილი პირობებისას, ჩვენ მივდივართ უცნობი კოეფიციენტების a_k, a'_k განსაზღვრისთვის განტოლებათა შემდეგ სისტემებამდე

$$a_m + \sum_{k=1}^{\infty} k\overline{a_k} b_{m+k-1} = A_m \quad (m = 1,2,\cdots), \tag{85}$$

$$a'_m + \sum_{k=1}^{\infty} k\overline{a_k} b_{-m+k-1} = A_{-m} \quad (m = 0,1,2,\cdots). \tag{86}$$

დამტკიცებულია, რომ (85) წრფივ განტოლებათა უსასრულო სისტემა გადაწყვეტადია, თუ დაცულია სტატიკის პირობები, და რომ მისი ამონახსნი (86)-თან ერთად იძლევა განსახილველი ბრტყელი ამოცანის ამონახსნს მოცემული $f(t)$ ფუნქციის საკმარისი სიგლუვისას.

პრაქტიკისათვის განსაკუთრებული მნიშვნელობა აქვს შემდეგ ფაქტს. იმ შემთხვევაში, როცა ამსახველი ფუნქცია წარმოადგენს პოლინომს

$$\omega(\zeta) = c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots + c_n\zeta^n \quad (c_1 \neq 0, c_n \neq 0). \tag{87}$$

(85) უსასრულო სისტემა გადაგვარდება შემდეგ სასრულ სისტემად

$$\left.\begin{array}{l} a_m = A_m \quad (m \geq n+1) \\ a_1 + \overline{a}_1 b_1 + 2\overline{a}_2 b_2 + \cdots + n\overline{a}_n b_n = A_1 \\ a_2 + \overline{a}_1 b_2 + 2\overline{a}_2 b_3 + \cdots + (n-1)\overline{a}_{n-1} b_n = A_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + \overline{a}_1 b_n = A_n. \end{array}\right\} \tag{88}$$

ხოლო (86) ფორმულა გვაძლევს

$$a'_m + \sum_{k=1}^{m+n+1} k\overline{a}_k b_{-m+k-1} = A_{-m} \quad (m = 0,1,2,\cdots). \tag{89}$$

ამოცანა დაიყვანება (88) სასრული სისტემის ამოხსნაზე.

მითითებული მეთოდი, აშკარაა, გამოსადეგია წრიულ რგოლზე ასახვის შემთხვევაშიც.

ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანის ამოხსნისას ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდი კონფორმულ ასახვასთან ერთად (შეერთებაში) ფართოდ გამოიყენება დღემდე. ის ხანდახან გამოიყენება რამდენადმე შეცვლილი სახითაც (იხ. მაგალითად, დ. შერმანი, 1951, კ. გრეი, Quart J. Mech. and Appl. Mech., 1953, 1954).

2.2.3.3. კოშის ტიპის ინტეგრალების გამოყენება

ამოცანის ეფექტური ამოხსნისათვის განსაკუთრებით სასარგებლო აღმოჩნდა ქვემოთ გადმოცემული მეთოდი, რომელიც უხამებს კონფორმულ ასახვას კოშის ტიპის ინტეგრალების აპარატის გამოყენებას (ნ. მუსხელიშვილი, 1966, §§ 78-85). ის მდგომარეობს შემდეგში.

(82) სასაზღვრო პირობებიდან გამომდინარე და პირობის გამოსახვიდან, რომ $\psi(\sigma)$ წარმოადგენს სასაზღვრო მნიშვნელობას $\psi(\zeta)$ ფუნქციის წრეწირზე, რომელიც ჰოლომორფულია წრის შიგნით და ნული ხდება როცა ζ=0, მივიღებთ (79)-ის საფუძველზე, ფუნქციონალურ განტოლებას

$$\varphi(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{(\sigma-\zeta)}d\sigma=A(\xi)\,,\ \ (\zeta\in\gamma)\,, \tag{90}$$

$$A(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\sigma)d\sigma}{\sigma-\zeta}\,.$$

დამტკიცებულია, რომ ფიქსირებული $\operatorname{Im}\left[\varphi'(0)/\omega'(0)\right]$ მუდმივისას, (90) განტოლება ცალსახად განსაზღვრავს $\varphi(\zeta)$ ფუნქციას. მისი განსაზღვრის შემდეგ $\psi(\zeta)$ ფუნქცია მოიძებნება უშუალოდ (82)-დან კოშის ინტეგრალის საშუალებით.

(90) ფუნქციონალური განტოლება საშუალებას გვაძლევს სრულიად ელემენტარული საშუალებებით ავაგოთ ამოცანის ზუსტი ამონახსნები არეების ფართო კლასისათვის. მიახლოებითი ამონახსნი კი შეიძლება პრინციპში მივიღოთ ცალადბმული არეს ყველაზე ზოგადი შემთხვევისათვის.

ნათქვამის საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ამსახველი $\omega(\zeta)$ ფუნქცია რაციონალურია. ამ შემთხვევაში გამოსახულება

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)}\,,$$

რომელიც ინტეგრალის ნიშნის ქვეშ ფიგურირებს (90)-ში, წარმოადგენს სასაზღვრო მნიშვნელობას ფუნქციისა

$$\frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\zeta}\right), \tag{91}$$

რომელიც ჰოლომორფულია γ-ის გარეთ, პოლუსების სასრული რიცხვის – $\omega(\zeta)$ ფუნქციის განსაკუთრებული წერტილების გამოკლებით.

რადგან (90) ინტეგრალში წერტილი ζ ძევს γ-ს შიგნით, ეს ინტეგრალი გამოითვლება სასრული სახით და წარმოადგენს რაციონალურ ფუნქციას, რომელიც შეიცავს გაშლის უცნობი კოეფიციენტების რაღაც რიცხვს.

აქედან გამომდინარეობს, სწორედ, ნ. მუსხელიშვილის ცნობილი წინადადება, რომლის თანახმადაც ბრტყელი ამოცანის ამოხსნა, არეების განსახილველი კლასისათვის, შეიძლება მივიღოთ კვადრატურებში, წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სასრული სისტემის ამოხსნამდე სიზუსტით. კერძოდ შემთხვევაში $\varphi(\zeta)$ ფუნქციის (87) სახის პოლინომური ასახვა (90)-ში, წარმოგვიდგება, კოშის $A(\zeta)$ ინტეგრალებსა და ζ-თი n ხარისხის პოლინომს, რომელიც შეიცავს უცნობის კოეფიციენტების სახის თვით $\varphi(\zeta)$-ის პირველ n კოეფიციენტს, ჯამის სახით. განტოლებათა წრფივი სისტემა, მიღებული ამ უკანასკნელთა განსაზღვრისათვის, ზუსტად ემთხვევა (88) სისტემას. ორივე საძიებელი ფუნქცია $\varphi(\zeta)$ და $\psi(\zeta)$, განისაზღვრება ჩალეტილი სახით ამ სისტემის ამონახსნითა და მოცემული f ფუნქციით.

თუ ფუნქცია $\omega(\zeta)$ არარაციონალურია, მაგრამ მისი წრეში გაშლა ცნობილია, მეთოდს მივყავართ წრფივ განტოლებათა უსასრულო სისტემამდე, ეს კი იძლევა საშუალებას ავაგოთ ამოცანის ამონახსნი ნებისმიერი მოცემული სიზუსტით.

2.2.3.4. მრავლადბმულ არეებში კომპლექსური წარმოდგენა

$\varphi'(\sigma)$ დრეკადი ველების კომპლექსური წარმოდგენა ანალიზური ფუნქციების სხვადასხვაგვარ ინტეგრალურ წარმოდგენებთან ნაერთში წარმოადგენს ბრტყელი ამოცანის ინტეგრალურ განტოლებებამდე დაყვანისათვის მოხერხებულ აპარატს. დღეისათვის ცნობილია ასეთი

განტოლებების აგების რამდენიმე ვარიანტი. მივუთითოთ ზოგიერთ მათგანზე.

$\varphi'(\sigma)$ მიმართ ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება შეიძლება მივიღოთ (3.30) ფუნქციონალური განტოლებიდან, თუ მას წინასწარ ჩავწერთ რამდენადმე სხვა სახით და მერე მივასწრაფებთ ξ წერტილს შიგნიდან γ წრეწირის წერტილისაკენ (ნ. მუსხელიშვილი, 1966, § 79), ამ ინტეგრალური განტოლების ელემენტარული გამოკვლევა საშუალებას იძლევა დავამტკიცოთ მისი ამონახსნის არსებობა (მაშასადამე, შესაბამისი ბრტყელი ამოცანის ამოხსნის არსებობაც), თუ, რა თქმა უნდა, პირველი ამოცანის შემთხვევაში სასრული გარემოსათვის დაცულია სტატიკის პირობები. უფრო დაწვრილებით ამ განტოლების გამოკვლევა ჩაატარა დ. შერმანმა (1938). მან შეისწავლა ინტეგრალური განტოლების მახასიათებელი წერტილების განაწილება და დაამტკიცა, რომ იგი ამოხსნადია ორივე ძირითადი ამოცანისათვის მიმდევრობის მიახლოების მეთოდით.

მრავლადბმული არეების შემთხვევის მომცველ, უფრო ზოგად მეთოდს წარმოადგენს ინტეგრალურ განტოლებებამდე მიყვანის მეთოდი, რომელიც წინასწარ არ თხოულობს კონფორმულ ასახვას. ერთ-ერთი ასეთი მეთოდი იყო წამოყენებული ნ. მუსხელიშვილის (1966, § 98) მიერ. მის არსს ჩვენ განვმარტავთ დაშვებით, რომ გარემო სასრულო და ცალადბმულია.

(64) განტოლებაში, რომელიც გამოსახავს ამოცანის სასაზღვრო პირობას, გადავიდეთ შეუღლებულ მნიშვნელობაზე და (74)-ის თანახმად ჩავწეროთ იმის პირობა, რომ ფუნქცია $\psi(t)$–z-ით სასაზღვრო მნიშვნელობაა ფუნქციის, რომელიც ჰოლომორფულია S^+-ში. ჩვენ მივიღებთ მაშინ ფუნქციონალურ განტოლებას

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\bar{t}\varphi'(t)dt}{t-z} = A(z) \quad \text{ყველა } z \in S^- \text{-სთვის,}$$

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}dt}{t-z}.$$

თუ ჩვენ გამოვსახავთ იმ პირობას $\varphi(t)$ და $\overline{\varphi'(t)}$-სათვის, მაშინ გვექნება ორი სხვა ტოლობა, რომელიც ანალოგიური იქნება წინასი. ამ

სამი ტოლობის კომბინირებით, მათში z-ით მარჯვნიდან ზღვარზე წინასწარი გადასვლის შემდეგ მივიღებთ ფრედჰოლმის განტოლებას $\varphi(t)$-სათვის, რომელიც მითითებული აქვს ნ.მუსხელიშვილს.

$$\overline{\varphi(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\, d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\, d\,\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} = -A(t_0)\,. \qquad (92)$$

წინამდებარესთან ერთობ მსგავსი, მაგრამ არსით განსხვავებული ბრტყელი ამოცანის განტოლება ააგო დ. შერმანმა (1940) სხვა გზით, რაზედაც ჩვენ უფრო დაწვრილებით ქვემოთ აღვნიშნავთ:

დ. შერმანის (1935-1937) გამოკვლევების თანახმად, (92) განტოლება ვარგისია ნებისმიერი მრავლადბმული არესათვის; მას ყოველთვის აქვს ამონახსნი, რომელიც იძლევა შესაბამისი ბრტყელი ამოცანის ამონახსნს. გარდა ამისა ოდნავ წინასწარ შეცვლილი (92) განტოლებისათვის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდია გამოსადეგი (დ. შერმანი, 1940).

ბრტყელი ამოცანის ინტეგრალური განტოლება, ასევე ვარგისი ნებისმიერი მრავლადბმული არესათვის, იყო აგებული უფრო ადრე ს. მიხლინის (1934, 1935) მიერ. ამ მიზნით განხილვაში შემოდის ე.წ. გრინის კომპლექსური ფუნქცია, ხოლო შემდეგ მისი საშუალებით – შვარცის განზოგადებული გული, ანალიზური არეში, მაგრამ არა ცალსახად. მრავლადბმულ არეში განზოგადებულ გულს გააჩნია თვისება, ანალოგიური შვარცის ჩვეულებრივი გულის თვისებისა. მიხლინის განტოლება ცალადბმული არესათვის თანხვდება (92) განტოლებას. ს. მიხლინმა ჩაატარა აგებული განტოლებების გამოკვლევა; დამტკიცებული იქნა მათი ამოხსნადობა და აგრეთვე, მათი ამოხსნისათვის მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის სამართლიანობა. შედეგები გადმოცემულია მის მონოგრაფიაში (1949), რომელიც შეიცავს აგრეთვე, ბრტყელი ამოცანის ამოხსნისათვის შვარცის გულის გამოყენებას ზოგიერთ კერძო შემთხვევაში.

ლ. მაღნარაძის გამოკვლევებმა (1937, 1938) გვიჩვენეს, რომ მუსხელიშვილის განტოლება ინარჩუნებს ძალას ტეხილი საზღვრის კუთხეების შემთხვევაშიც, თუ ინტეგრალებს, რომლებსაც განტოლება შეიცავს, გავიგებთ გარკვეულად უფრო განზოგადებული აზრით.

მრავლადბმული არეს ზოგად შემთხვევაში ინტეგრალური განტოლების მარტივი და მრავალმხრივ მოხერხებული ფორმა იყო ნაპოვნი 1940 წელს დ. შერმანის მიერ. მოვიყვანოთ შერმანის განტოლების გამოყვანა, შემოვიფარგლოთ რა, უწინდებურად, ცალადბმული სასრული არეს შემთხვევით. ამჯერად, პირველი და მეორე ძირითადი ამოცანები განვიხილოთ ერთდროულად, გავაერთიანებთ რა სასაზღვრო პირობებს შემდეგ ტოლობაში:

$$k\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)\ L\text{-ზე} \tag{93}$$

სადაც $k=1$-ს პირველი ამოცანის შემთხვევაში და $k=-\chi$-ს მეორე შემთხვევაში. შერმანიდან გამომდინარე, მივიჩნიოთ S არეში

$$\left.\begin{aligned}\varphi(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\omega(t)dt}{t-z},\\ \psi(z)&=\frac{k}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\omega(t)}dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar{t}\,\omega'(t)dt}{t-z},\end{aligned}\right\} \tag{94}$$

სადაც $\omega(t)$–L კონტურის წერტილის რაიმე ფუნქციაა, რომელიც ექვემდებარება განსაზღვრას, თუ ამ ფორმულებში გადავალთ ზღვარზე, როცა z წერტილი შიგნიდან მიისწრაფის წერტილისაკენ $t_0\in L$, და ჩავსვამთ (93)-ში ნაპოვნ სასაზღვრო პირობებს, მაშინ ზოგიერთი მარტივი გარდაქმნის შემდეგ მივიღებთ თანაფარდობას

$$k\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\omega(t)d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\overline{\omega(t)}d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0}=f(t_0). \tag{95}$$

ეს ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლებაა $\omega(t_0)$-სათვის, რომლის შესახებაც ზემოთ გვქონდა ლაპარაკი. ის ატარებს ლაურიჩელა-შერმანის განტოლების სახელს.

მრავლადბმული გარემოს შემთხვევაში მიზანშეწონილია, შერმანიდან გამომდინარე, (94) წარმოდგენას რამდენადმე სახე ვუცვალოთ, რის შედეგადაც შეიცვლება (95) განტოლებაც.

გამოკვლევა გვიჩვენებს, რომ ლაურეჩელა-შერმანის ერთგვაროვან განტოლებას არ გააჩნია არატრივიალური ამონახსნები და მის ერთადერთ ამონახსნს იძლევა საწყისი სასაზღვრო ამოცანა (94) ფორმულებით.

(94) წარმოდგენა გამოსადეგია აგრეთვე ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნისათვის. თუმცა ამ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვექნება ინტეგრალურ განტოლებებთან, რომლებიც შეიცავენ კოშის ტიპის გულებს, რომელთა თეორია დამუშავებულია დღეისათვის ისეთივე სისრულით, როგორც ფრედჰოლმის განტოლებებისათვის (ნ. მუსხელიშვილი, 1946, 1952; ნ. ვეკუა, 1950).

ინტეგრალური განტოლებები უთუოდ წარმოადგენენ სასაზღვრო პირობების ზოგადი გამოკვლევებისათვის მოხერხებულ საშუალებას, კერძოდ მათი ამონახსნის არსებობის დამტკიცებისათვის. თუმცა, ამასთან ერთად, ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდს თვლიან ნაკლებეფექტურად და არც თუ უსაფუძვლოდ. ამ მეთოდის საფუძველზე ამოცანების პრაქტიკული ამოხსნის ცდები, მისი ჩვეული სქემით, რომელიც იყენებს გათვლებისათვის ინტეგრალური განტოლებების დისკრეტულ ანალოგს, ნაკლებად მანუგეშებელია თანამედროვე გამოთვლითი საშუალებებითაც კი. ამიტომ მრავლადბმული გარემოს ზოგადი შემთხვევისათვის, ამოხსნის უფრო მეტად მისაღები ალგორითმის არ ქონის გამო, გვიწევს ამოხსნების, რომლებიც ამოცანების ამა თუ იმ კლასს მოერგება, ეფექტური სპეციალური მეთოდების ძიება.

ამ აზრით დიდ მნიშვნელობას იძენს ზემოთ ჩამოთვლილი მეთოდების სხვადასხვა კომბინაციები. ჩვენ მხედველობაში გვაქვს, უპირველეს ყოვლისა, ფუნქციონალური განტოლებების შეხამება ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდთან, ფუნქციათა წრფივი შეუღლების მეთოდისა კონფორმულ ასახვასთან, და აგრეთვე ამოხსნის უფრო ზოგადი სქემები, რომლებიც გზადაგზა ინტეგრალურ განტოლებათა აპარატს იყენებენ. ამ სპეციალურ ხერხთაგან ზოგიერთი ქვემოთ იქნება მითითებული.

2.2.3.5. ბრტყელი ამოცანის ამოხსნის ხერხები

დ. შერმანის (1947, 1951) რიგ შრომებში შემუშავებული იქნა ბრტყელი ამოცანის ამოხსნის ეფექტური ხერხი (სასრული და უსასრულო) ორადბმული არეების განსაზღვრული კლასებისათვის, რომლებიც შემოსაზღვრულია ორი შეკრული მრუდით. მეთოდის

ძირითად ნიშნად, რომელიც დასაშვები არეების კლასს განსაზღვრავს, ითვლება მოთხოვნა, რომ ბრტყელი ამოცანა ცალადბმული არესათვის (არეს შემომსაზღვრელ შეკრულ კონტურთაგან ერთის მიმართ გარე ან შიგა) უშვებს ამონახსნს ჩაკეტილი სახით. ამრიგად, არეს საზღვრად შეიძლება გამოდიოდნენ წრეწირები, ელიფსები, წესიერი მრავალწახნაგები მომრგვალებული წვეროებით და ა.შ. უსასრულო არეს მაგალითია – მოთხოვნილი სახის ორი ნახვრეტის მქონე სიბრტყე განხილვაში შეიძლება ჩავრთოთ ნახევარსიბრტე ორი ნახვრეტით (სამადბმული არე, თუ ჩავთვლით, რომ ნახვრეტები მისი სწორხაზოვანი საზღვრიდან მდებარეობენ შორს და ამ უკანასკნელზე მოითხოვება სასაზღვრო პირობების შესრულება მხოლოდ მიახლოებულად). ამ ტიპის ამოცანები განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია სამთო საქმეში გამოყენებისათვის. მეთოდის არსის გადმოცემისას ჩავთვალოთ გარკვეულობისათვის S არე სასრულოდ, რომელიც შემოსაზღვრულია L_1 (შიდა) და L_2 (გარე) მრუდეებით.

შემოვიტანოთ განხილვაში დამხმარე $\omega(t)$ ფუნქცია, რომელიც განსაზღვრულია L_2-ზე, თანახმად ტოლობისა

$$\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=2\omega(t) \quad (t\,L_2\text{-ზეა}) \tag{96}$$

თუ ჯერ შევკრებთ, ხოლო მერე გამოვაკლებთ ერთმანეთს წევრ-წევრად (96)-სა და (94)-ს, ჩავთვლით რა რომ $C_2=0$, მივიღებთ,

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(t)=\omega(t)+f(t),\\&\psi(t)=-\left[\overline{\omega(t)}+\bar{t}\,\omega'(t)\right]+\left[f(t)-\bar{t}f'(t)\right]\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

$\omega(t)$-ს საშუალებით შემოვიღოთ ორი ახალი $\varphi_0(z)$ და $\psi_0(z)$ ფუნქცია, შემდეგი სახის

$$\left.\begin{aligned}&\varphi_0(z)=\varphi(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\omega(t)dt}{t-z}-F(z),\\&\psi_0(z)=\psi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}dt-G(z),\end{aligned}\right\} \tag{98}$$

სადაც

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{f(t)dt}{t-z},\quad G(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{f(t)-\bar{t}f'(t)}{t-z}dt.$$

თუ უფრო გამოვკვეთავთ საძიებელ φ და ψ ფუნქციებს, ჩავთვლით, რა მათ L_2-ის გარეთ ნულის ტოლად, მაშინ (97) ტოლობა,

როგორც ამაში ადვილად დავრწმუნდებით გახდება L_2 კონტურს იქით, ახლად შემოღებული ფუნქციების ანალიზურად გაგრძელებადობის პირობა. ამ, ყველგან გარდა L_1-სა, ჰოლომორფული φ_0 და ψ_0 ფუნქციებისათვის (64) ტოლობის საფუძველზე L_1-ზე გვექნება სასაზღვრო პირობა

$$\varphi_0(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\Omega[t;\omega(t)], \tag{99}$$

სადაც Ω – რაღაც წრფივი ოპერატორია.

მეთოდის ძირითადი მოთხოვნის თანახმად ჩვენ მივიჩნევთ, რომ (99) დამხმარე ბრტყელი ამოცანა გადაწყვეტადია სასრულო სახით. აშკარად ეს ყოველთვის იქნება სახელდობრ ასე, თუ ფუნქცია, რომელიც ასახავს არეს წრეზე L_1-ის გარეთ, რაციონალურია.

Ω მარჯვენა ნაწილით, რომელიც დროებით ითვლება t-გან მოცემულ ფუნქციად, მოიძებნება მუსხელიშვილის ფუნქციონალურ განტოლებათა მეთოდით; (99) ამოცანის ამოხსნა ჩაკეტილი სახით და ნაპოვნი φ_0, ψ_0 ფუნქციები შეიტანება (96) პირობაში. ეს იძლევა $\omega(t)$-ს განსაზღვრისათვის თანაფარდობას ფრედჰოლმის მეორე გვარის ინტეგრალური განტოლების სახით. შემდეგ გამოიყენება $\omega(t)$-ს გაშლა ფურიეს კომპლექსურ მწკრივებში და ინტეგრალური განტოლება დაიყვანება წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემაზე.

2.2.3.6. ლაურიჩელა-შერმანის განტოლების გამოყენება

რიგ შემთხვევებში ინტეგრალური განტოლებები შეიძლება უშუალოდ გამოყენებულ იქნან ამოცანათა ეფექტური ამოხსნისათვის. ჩვენ მივუთითებთ ლაურიჩელა-შერმანის განტოლების გამოყენების ერთ შესაძლებლობაზე.

დავუშვათ, რომ ჩვენთვის ცნობილია $\omega(\zeta)$ ფუნქცია, რომელიც ახდენს წრის კონფორმულ ასახვას არეზე (L კონტურის მიმართ ან შიდა ან გარეზე). თუ (95) განტოლებაში მოვახდენთ ცვლადის შეცვლას $t=\omega(\sigma)$ ტოლობის თანახმად, მაშინ მივიღებთ ინტეგრალურ განტოლებას ერთეული რადიუსის წრეხაზზე. ამ განტოლების გული

ელემენტარულად გამოისახება $\omega(\sigma)$-თი და ინარჩუნებს მარტივ სტრუქტურას ბევრ შემთხვევაში. მაგალითად (87) სახის ნებისმიერი ასახვის შემთხვევაში. ყველა ამ შემთხვევაში ახლად მიღებული ინტეგრალური განტოლებისათვის გამოიყენება ფურიეს მწკრივების მეთოდი, რასაც მივყავართ ამოცანის ეფექტურ ამოხსნამდე.

2.2.3.7. ჰელდერის პირობის გამოყენება

წრფივი შეუღლების სასაზღვრო ამოცანის ქვეშ ჩვენ ვიგულისხმებთ შემდეგ ამოცანას: მოიძებნოს $F(z)$ ფუნქცია, რომელიც ჰოლომორფულია L ხაზის გასწვრივ გაჭრილ კომპლექსურ სიბრტყეზე, სასაზღვრო პირობით

$$F^{+}(t)=a(t)F^{-}(t)+b(t)\,, \tag{100}$$

სადაც $a(t)$ და $b(t)$–L-ზე მოცემული ფუნქციებია, $F^{+}(t)$ და $F^{-}(t)-$ -ზე საძიებელი $F(z)$ ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობებია, L ხაზის გასწვრივ არჩეული დადებითი მიმართულების მიმართ, მარჯვნივ და მარცხნივ. იგულისხმება, რა ეს სასაზღვრო პირობები არსებობენ ყველგან, გარდა, შესაძლოა, L ხაზის $C_1, C_2, \cdots, C_m$, წერტილებს სასრულო რიცხვისა, რომელთა მოდამოში $F(z)$ გვაძლევენ შეფასებას

$$|F(z)|\le\frac{A}{|z-C_k|^{\alpha}} \quad (A \text{ და } \alpha\text{-მუდმივებია, } \alpha<1).$$

ხანდახან იძებნება (100) სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნები, რომლებიც დაუშვებს პოლუსს L-ზე არამდებარე, სიბრტყის რომელიმე წერტილში. ჩვეულებრივად ასეთ წერტილად მიიღება უსასრულოდ დაშორებული წერტილი.

ჩვენ განვიხილავთ (100) ამოცანას შემდეგი დაშვებებისას: L შედგება სასრულო რიცხვის არაგადამკვეთი შეკრული ან შეუკვრელი გლუვი კონტურებისაგან, $a(t)$ და $b(t)$ ფუნქციები აკმაყოფილებენ ჰელდერის პირობას L-ზე, გარდა პირველი გვარის წყვეტის წერტილების სასრული რიცხვისა, $a(t)\neq 0$. ამ დაშვებებში (100) ამოიხსნება ცხადი სახით (კვადრატურებში). ამოხსნას (რომელსაც აქვს პოლუსი უსასრულობაში) აქვს სახე

$$F(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{b(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z)\,, \tag{101}$$

სადაც $P(z)$–ნებისმიერი პოლინომია, ხოლო $X(z)$ – ერთგაროვანი ამოცანის $F^+(t)=a(t)F^-(t)$ ე.წ. კანონიკური ამონახსნი, რომელიც იგება ცხადი სახით (კვადრატურებში).

ამონახსნის აგებისათვის, რომელსაც გააჩნია განსაზღვრული რიგი უსასრულობაში, მოითხოვება დავადოთ შეზღუდვები $P(z)$ პოლინომს, და ასევე $b(t)$ ფუნქციას (იხ. ნ. მუსხელიშვილი, 1966).

დრეკადობის ბრტყელი თეორიის ამოცანების დაყვანა წრფივი შეუღლების ამოცანებამდე წარმოადგენს ასეთი ამოცანების ამოხსნის (განსაკუთრებით შერეული ამოცანების) ერთ-ერთ ეფექტურ მეთოდს.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ ძირითადი შერეული ამოცანის ამოხსნა ნახევარსიბრტყისათვის მისი წრფივ შეუღლების ამოცანამდე დაყვანის გზით (ნ.ნუსხელიშვილი, 1966).

ვთქვათ იზოტროპულ სხეულს უკავია ქვედა ნახევარსიბრტყე $y<0$, რომელსაც აღვნიშნავთ S^--ით. ზედა ნახევარსიბრტყე აღვნიშნოთ S^+-ით, ნამდვილი ღერძი – L-ით, L-ზე დადებით მიმართულებად მივიღოთ $-\infty$-დან $+\infty$-მდე.

ამოვიღეთ ძაბვებისა და გადაადგილებების ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენის ფორმულებიდან, კერძოდ ვისარგებლოთ ფორმულებით

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}\,, \tag{102}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\chi\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}\,, \tag{103}$$

სადაც $\Phi(z)$ და $\Psi(z)$–S^- არეში საძიებელი ჰოლომორფული ფუნქციებია, რომლებსაც დიდი $|z|$-ებისას აქვთ სახე

$$\Phi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi z}+0\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\Psi(z)=\frac{X-iY}{2\pi z}+0\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

(X,Y) – გარე ძალვების მთავარი ვექტორია, რომლებიც მოდებულია L-ზე.

S^- არეში, ორი ჰოლომორფული $\Phi(z)$ და $\psi(\zeta)$ ფუნქციის ნაცვლად შემოვიღოთ უბან-უბან – ჰოლომორფული ერთი $\Phi(z)$ ფუნქცია,

რომელიც განსაზღვრულია როგორც S^--ში, ისე S^+-ში, ამასთან ზედა ნახევარსიბრტყეში S^+, ის იქნება განსაზღვრული ისე, რომ მისი მნიშვნელობები გააგრძელებენ ანალიზურად $\Phi(z)$-ის მნიშვნელობებს ქვედა ნახევარსიბრტყეში S^- დაუტვირთავი უბნების გავლით (თუკი ასეთები არსებობენ). განვსაზღვროთ $\Phi(z)$ S^+-ში შემდეგი ფორმულით

$$\Phi(z) = -\overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(\bar{z})}.$$

ეს ფორმულა იძლევა $\psi(z)$ ფუნქციისათვის გამოსახულებას $\Phi(z)$ ფუნქციით, რომელიც ვრცელდება S^+-ზეც.

$$\Psi(z) = -\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\Phi'(z);$$

მაშასადამე, ძაბვების კომპონენტები გამოისახება ერთი $\Phi(z)$ ფუნქციით, რომელიც განსაზღვრულია როგორც S^+-ში, ასევე S^--შიც.

კერძოდ, გვექნება ფორმულა

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \tag{104}$$

ხოლო (103) ფორმულიდან მივიღებთ

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \Phi(z) + \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}. \tag{105}$$

ვთქვათ

$$L' = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

წარმოადგენს ნამდვილი ღერძის $a_k b_k$ მონაკვეთების ერთობლიობას, და ვთქვათ L'-ზე მოცემულია გადაადგილებათა კომპონენტები, ხოლო დანარჩენ ნაწილში $L'' = L - L'$ −გარე ძალვები. ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება ჩავთვალოთ, რომ L''-ზე მოცემული გარე ძალვები ტოლია ნულის (ზოგადი შემთხვევა ადვილად დაიყვანება ამაზე).

ჩავთვალოთ, რომ ფუნქცია $\Phi(z)$ უწყვეტად განგრძობადია მარცხნივ და მარჯვნივ α-ზე, გარდა, შესაძლოა, a_k, b_k წერტილებისა, ხოლო ამ წერტილების მიდამოებში

$$|\Phi(z)| \le \frac{A}{|z - a_k|^\alpha}, \quad |\Phi(z)| \le \frac{A}{|z - b_k|^\alpha} \quad (\alpha < 1).$$

ჩავთვალოთ ასევე, რომ

$$\lim (z-\bar{z})\Phi'(z)=0 .$$

როცა z მიისწრაფის ნამდვილი ღერძის t წერტილისაკენ, რომელიც განსხვავდება a_k და b_k წერტილებისაგან.

ამ დაშვებებისას (104) ფორმულიდან გამომდინარეობს

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t) \quad L''\text{-ზე}$$

ანუ $\Phi(z)$ ფუნქცია ჰოლომორფულია მთელ სიბრტყეზე, გაჭრილია L-ის გასწვრივ და ქრება უსასრულობაში.

(105) ფორმულებიდან კი გვექნება

$$\Phi^+(t)=-\Phi^-(t)+2\mu g'(t) \quad \left(t\in L'\right) \tag{106}$$

სადაც $g(t)$ – მოცემული ფუნქციაა, $g(t)=u(t)+iv(t)$, $u(t)$-თი და $v(t)$-თი აღნიშნულია L'-ზე ცნობილი, გადაადგილებების კომპონენტების სასაზღვრო მნიშვნელობები, ჩავთვალოთ, რომ $g'(t)$ წარმოებული აკმაყოფილებს ჰელდერის პირობას.

თუ გამოვიყენებთ (101) ფორმულას, შეუღლების (106) ამოცანის ამოხსნისათვის მივიღებთ

$$\Phi(z)=\frac{\mu X(z)}{\pi i}\int_L \frac{g'(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z),$$

სადაც $X(z)$ (კანონიკური ამონახსნი) აქვს სახე

$$X(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\frac{1}{2}+\beta}(z-b_k)^{-\frac{1}{2}-i\beta} \quad \left(\beta=\frac{\ln x}{2\pi}\right).$$

რადგანაც $\Phi(z)$ ქრება უსასრულობაში, ხოლო $X(z)$-ის რიგი უსასრულობაში ტოლია – n, $P(z)$ პოლინომის ხარისხი არ უნდა აჭარბებდეს $(n-1)$-ს:

$$P(z)=C_0 z^{n-1}+C_1 z^{n-2}+\cdots+C_{n-1}.$$

განსახილველი ამოცანის წრფივი შეუღლების ამოცანაზე დაყვანისას ჩვენ გავაწარმოეთ სასაზღვრო პირობები $a_k b_k$ მონაკვეთების გასწვრივ; მაშასადამე, ჯერჯერობით ჩვენ მოვახერხეთ დაგვეკმაყოფილებინა სასაზღვრო პირობები $a_k b_k$-ს გასწვრივ მუდმივი c_k შესაკრებების სიზუსტით. გვრჩება გავითვალისწინოთ პირობები $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$, თუმცა, როგორც ადვილი დასანახია, საკმარისია დავაკმაყოფილოთ პირობები

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n .$$

ეს პირობები დაიყვანება შემდეგზე:

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} (u' + iv')dt = g(a_{k+1}) - g(b_k) \quad (k = 1,2,\cdots,n-1) \tag{107}$$

თუ (107) ტოლობაში ჩავსვამთ $u(t)+ib(t)$-ს ნაცვლად მის გამოსახულებას Φ ფუნქციით, მივიღებთ $n-1$ წრფივ განტოლებათა სისტემას.

$P(z)$ პოლინომის C_0 კოეფიციენტი განისაზღვრება გარე ძალვების მოცემული (X, Y) ვექტორით:

$$C_0 = -\frac{X + iY}{2\pi} .$$

თუ ჩავსვამთ C_0-ის მნიშვნელობას (107) სისტემაში, მივიღებთ $C_1, C_2, \cdots, C_{n-1}$ კოეფიციენტების მიმართ წრფივ განტოლებათა $n-1$ სისტემას. ეს სისტემა ცალსახად ამოხსნადია ძირითადი შერეული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობის თეორემის საფუძველზე.

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდები, რომელთა შესახებ ზემოთ გვქონდა ლაპარაკი დრეკადობის თეორიის ბრტყელ ამოცანასთან დაკავშირებით, არსებითად იყო განვითარებული ი. ვეკუას გამოკვლევებში კერძო წარმოებულებში დიფერენციალური განტოლებების თეორიის უფრო ზოგადი ამოცანებისადმი მიყენების კუთხით. ი. ვეკუას მონოგრაფიაში (1948) ამ თვალსაზრისით გამოკვლეულია ვრცელი კლასი ელიფსური განტოლებებისა ორი დამოუკიდებელი ცვლადის შემთხვევაში და მოცემულია ავტორის მიერ განვითარებული აპარატის გამოყენებები (დრეკადი ცილინდრის სტაციონარული რხევები, თხელი ფირფიტების ღუნვა და სხვა).

აქვე გვმართებს მოვიხსენიოთ იმავე მეთოდების მრავალრიცხოვანი გამოყენებები დრეკადი გარსების თეორიაში (ი. ვეკუა, ა. გოლდენვეიზერი, გ. სავინი).

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდებთან ერთად, რომლებიც საშუალებას იძლევა ამოვხსნათ ბრტყელი ამოცანა შედარებით ზოგადი სახის არეებისათვის, შეიძლება ვიპოვოთ ეფექტური ამონახსნები ზოგიერთი კონკრეტული ფორმის არეებისათვის კერძო

ხერხებით, მაგალითად ფურიე და მელინის ინტეგრალური გარდაქმნების საშუალებით.

ფურიეს გარდაქმნები წარმოადგენს ერთობ მოხერხებულ აპარატს უსასრულო ზოლის დრეკადი წონასწორობის სხვადასხვაგვარი ამოცანების განხილვისათვის. ამგვარი სახის უმარტივესი ამონახსნები ნაპოვნი იყო ჯერ კიდევ ლ.ნ.ჯ. ფაილონის მიერ. ეს მეთოდიკა, რომელმაც მიიღო ფართო განვითარება საბჭოთა მეცნიერების ნაშრომებში, ოცდაათიანი წლების ბოლოს იყო განზოგადებული და შეჯამებული პ.პაპკოვიჩის ცნობილ მონოგრაფიებში (1939, 1941). შემდგომში სხვადასხვა ავტორების მიერ განხილული იყო მნიშვნელოვანი რაოდენობა ახალი ამოცანებისა, რომლებიც შეეხებოდა ზოლის, ნახევარზოლის დეფორმაციებს, რომლებიც შეესაბამებოდნენ ფენოვან გარემოს და ანიზოტროპულ ტანებს, თბურ ძაბვებს და სხვა. დაინტერესებულ პირებს შეუძლიათ დაწვრილებით გაეცნონ დ. შერმანის (1962) მიმოხილვით ნაშრომებს. გ. პოპოვისა და ნ. როსტოვცევისა (1966), ს.ლეხნიცკის (1957) და მ. შერემეტიევის (1968) მონოგრაფიებს.

აქვე მივუთითებთ ი. ალპერინის (1930), მ. ბელენკოვის (1952) და ს.ბირმანის (1954) სტატიებს, რომლებიც შეეხება შერეულ ამოცანებს უსასრულო ზოლისათვის, და ასევე ი. მარკუზონისა (1963), ვ. ტონოიანის ნაშრომებს, რომლებშიც შერეული ამოცანების ზოგიერთი კლასები ნახევარსიბრტყისა, ზოლისა და კვადრანტისათვის გადაწყვეტილია წყვილი ან სამმაგი ტოლობებით, რომლებიც დაკავშირებულია ფურიეს გარდაქმნებთან.

რიგი საინტერესო ამოცანები ამოიხსნა ბიპოლარულ კოორდინატებში, ფურიეს ინტეგრალების საშუალებით. მსგავსი სახის ამოცანები, რომლებიც ძირითადად წრიულ „ნამგალასთან“ არის დაკავშირებული, განიხილებოდა ი. უფლიანდის (1950, 1963), გ. სავინის (1951), მ. სავრუკის (1957), ვ. ეგანიანის (1959, 1964) და სხვა ავტორების მიერ.

დრეკადობის თეორიის ზოგიერთი ბრტყელი ამოცანა უსასრულო სოლისათვის ზუსტ გადაწყვეტას ღებულობს მელინის ინტეგრალური გარდაქმნების საშუალებით. თავდაპირველი გამოკვლევები ამ წრის

საკითხებისა ეკუთვნით ი. ბრატცსა და ვ.აბრამოვის (1937). სოლზე შეყურსული ძალის მოქმედების შესახებ ამოცანა პირველად განიხილეს ა. ლურიემ და ბ. ბრაჩკოვსკიმ (1941). ანიზოტროპული სოლის ამოცანა გამოკვლეეული იქნა პ. კუვარევის (1941) მიერ. მითითებულ ამოცანებზე ბიბლიოგრაფია მოყვანილია ი. უფლიანდის (1963) წიგნში.

ფურიესა და მელინის ინტეგრალურ გარდაქმნათა მეთოდის განვითარება კოშის ტიპის ინტეგრალების აპარატთან შეთავსებაში შედის ს. ბელონოსოვის (1962) ნაშრომებში, რომლებიც განეკუთვნებიან არეებს კუთხის წერტილებით და კერძოდ ზოლსა და სოლს.

2.2-ის დასკვნები

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ, მუსხელიშვილის გამოკვლევები პრობლემების ფართო ჯგუფს მოიცავს. აღნიშნულმა შრომებმა დიდი გავლენა მოახდინეს მექანიკისა და მათემატიკის რიგი დარგების შემდგომ განვითარებაზე.

ნ. მუსხელიშვილის მეთოდებმა დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში გამოყენება და შემდგომი განვითარება ჰპოვეს ს.მიხლინის, დ.შერმანის, გ.სავინის, დ.ვაინბერგისა და სხვა ნაშრომებში ამ მეთოდების საშუალებით ამოხსნილია მრავალი ამოცანა, რომლებმაც ფართო გამოყენება ჰპოვეს ტექნიკაში. ლ.გალინის, ა.კალანდიას, ი.ქარცივაძის, ი.შტაერმანის, რ.ბანცურის და სხვა ნაშრომებში ნ.მუსხელიშვილის შედეგებმა შემდგომი გამოყენება და განვითარება ჰპოვა საკონტაქტო ამოცანების თეორიაში.

გამოკვლევები ძელების გრეხისა და ღუნვის ამოცანებში სხვადასხვა მიმართულებით გაგრძელებულ იქნა ა. გორგიძის, ა. რუხაძის და სხვათა მიერ.

2.3. მყარი დეფორმადი სხეულის მექანიკის განვითარების ისტორია თხელკედლიან სივრცით სისტემებისათვის

2.3.1. ბრტყელი დრეკადობის თეორიის ამოცანების გამოკვლევების ძირითადი შედეგები

ნაშრომები, რომლებსაც ჩვენ შევეხებით, ძირითადად მჭიდროდაა დაკავშირებული კომპლექსური ცვლადის მეთოდებთან და ამ თვალსაზრისით ისინი გამოდგება მათი გამოყენების საილუსტრაციოდ და შემდგომი განვითარებისათვის.

ძირითადი ამოცანების ამოხსნა ერთგვაროვანი გარემოსათვის. კონკრეტული შინაარსის პირველი შედეგები, რომლებიც განეკუთვნება ბრტყელი პროფილების წონასწორობას მიღებული იყო გ. კოლოსოვისა და ნ. მუსხელიშვილის მიერ.

92-ში მითითებული მეთოდით ნ. მუსხელიშვილმა მოგვცა პირველი და მეორე ძირითადი ამოცანების მარტივი ამონახსნი წრის, წრიული რგოლისა და უსასრულო სიბრტყისთვის წრიული ნახვრეტით. დამუშავებული იქნა მრავალი კერძო მაგალითი სხვადასხვა სახის გარე ზემოქმედებებისათვის. ამგვარი სახის არეებისათვის არ მოითხოვება წინასწარი კონფორმული ასახვა. გამოიყენა რა კონფორმული ასახვა, მუსხელიშვილმა გადაწყვიტა იმ დროისათვის რთული ამოცანა მთლიანი ელიფსის წონასწორობის შესახებ. მოგვიანებით იგივე ამოცანას იგი წყვეტდა სხვა ხერხებით (იხ. 96).

ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდით იყო გამოკვლეული ამოცანა თანაფოკუსური ელიფსური რგოლის შესახებ (ა. კალანდია, 1953). ამ ამოცანის ეფექტური ამოხსნის ალგორითმი კიდევ უფრო ადრე მითითებული იქნა მ. შერემეტიევის მიერ, რომელიც იყენებდა ფუნქციონალური განტოლებების მეთოდს კონფორმულ ასახვებთან ნაერთში (იხ. 93).

დასახელებული მეთოდი ყველაზე მოხერხებული აღმოჩნდა ცალადბმული არეებისათვის. როგორც ეს ზემოთ იყო აღნიშნული, მას ყოველთვის მივყავართ ეფექტურ ამოხსნამდე, თუ არეს ასახვა განხორციელებულია რაციონალური ფუნქციით. მეთოდის პირველი გამოყენებები იყო მითითებული თვით ნ.მუსხელიშვილის მიერ,

რომელმაც მოგვცა ჩაკეტილი ამონახსნები ძირითადი ამოცანების რიგი კონკრეტული შემთხვევებისათვის. ამოცანათა ამ სერიიდან ჩვენ გამოვყოფდით წრიული დისკის წონასწორობას კონტურული შეყურსული დატვირთვების მოქმედების ქვეშ და უსასრულო ფირფიტას ელიფსური ნახვრეტით. მუსხელიშვილის შედეგები, რომელზედაც აქ ითქვა, მიღებული იყო ოციანი და ოცდაათიანი წლების შრომებში (მათ შორის განსაკუთრებით უნდა აღვნიშნოთ მისი მემუარი გამოცემული 1922 წელს). ყველა ეს შედეგები სხვებთან ერთად, რომელიც ეკუთვნის იმავე ავტორს, დაწვრილებითაა გადმოცემული, არა ერთხელ ზემოთ ციტირებულ, ნ. მუსხელიშვილის მონოგრაფიაში.

აღვნიშნოთ ამავე მეთოდის კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი გამოყენება, რომელიც მიუთითა გ. სავინმა. განვიხილოთ ამოცანა ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ უსასრულო ფირფიტაში, რომელიც დასუსტებულია რაიმე ნახვრეტით. მივიჩნევთ რა ნახვრეტის კონტურს სწორხაზოვან მრავალწახნაგად, ავსახოთ წრის შიგა ნაწილი ნახვრეტის გარეთა არეზე შვარცი-კრისტოფელის ინტეგრალის საშუალებით. გავშლით რა ამ ინტეგრალს ζ-ს ხარისხების მწკრივად და დავტოვებთ რა მწკრივში მისი პირველი წევრების სასრულო რიცხვს, ჩვენ მივიღებთ მიახლოებით ამონახსნს, რომელსაც გადაყავს წრეხაზი საწყისი კონტურის მახლობელ მრუდში

$$z=\omega(\zeta)=C\left(\frac{1}{\zeta}+\sum_{k=1}^{n}C_k\zeta^k\right) \qquad (108)$$

სახით, ან კერძო შემთხვევაში

$$z=C\left(\frac{1}{\zeta}+m\zeta^n\right), \qquad (109)$$

სადაც C, $C_k, m-$ რაიმე მუდმივებია. თუ შევცვლით (108)-ში C, C_k, n მუდმივებს შეგვეძლება მივიღოთ ნახვრეტები წრის, ელიფსის, ოვალის, მრუდწირა სამკუთხედისა და ოთხკუთხედის და ა.შ. ფორმით. (108) ასახვისას მეთოდს დაუყოვნებლად მივყავართ ამონახსნამდე ჩაკეტილი სახით, ეს კი იძლევა მითითებული სახის ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის შესაძლებლობას.

ამ გზით გ. სავინმა და მისმა მოწაფეებმა განიხილეს ბევრი კონკრეტული ამოცანა ერთგვაროვან ველში, სხვადასხვაგვარი ფორმისა

და კონფიგურაციის ნახვრეტების დროს ძაბვების კონცენტრაციის შესახებ. ამ ამოცანების ამონახსნები მიყვანილია რიცხვით შედეგებამდე, რომლებიც წარმოდგენილია ცხრილებისა და დიაგრამების სახით. გარდა ამისა, განსაკუთრებულად მნიშვნელოვან შემთხვევებში, აგებულია კონტურული ძაბვების გრაფიკები. მსგავსი სახით იხსნება სავინის მიერ ამოცანები, ნახვრეტის მქონე თხელი ფირფიტების ღუნვის შესახებ, რომლებიც მოქცეულია უსასრულობაში მომენტებისა და ნორმალური ძალვების მოქმედების ქვეშ. ეს შედეგები დაწვრილებით გადმოცემულია გ.სავინის წიგნში (1951), რომელმაც შეასრულა მნიშვნელოვანი როლი ამ წრის საკითხების შემდგომ დამუშავებაში.

ძაბვების შესახებ საკითხებით ნახვრეტების მქონე ფირფიტებში, როცა მათ მრუდწირული მრავალკუთხედის ფორმა აქვთ, გ. სავინთან ერთდროულად დაკავებული იყო მ. ნეიმანი (1937, 1958), რომელმაც გამოიყენა ორიგინალური მიდგომა მიახლოებითი ანასახების არჩევისას; ის ძირითადად შეისწავლიდა ძელების გრეხას, რომლებიც დასუსტებულია ამონაჩარხებით.

93-ში გადმოცემული მეთოდი შეიძლება გამოყენებული იქნას რაღაც სახეცვლილებებით ნახევრადუსასრულო არეების შემთხვევისას, როცა გარემოს საზღვრად გვევლინება მრუდი, რომელიც გვცილდება უსასრულობაში ორივე მხარეს. ამ შემთხვევაში უფრო მოსახერხებელია ვისარგებლოთ ასახვით ნახევარსიბრტყეზე მეთოდის გამოყენება ზოგად დასმაში ნაჩვენებია ნ. მუსხელიშვილის (1966) მონოგრაფიაში, სადაც მოყვანილია აგრეთვე ამგვარი სახის ზოგიერთი კერძო ამოცანის ამოხსნა.

გამოყენებისათვის განსაკუთრებულ ინტერესს წარმოადგენს ნახევარსიბრტყეები, რომელიც დასუსტებულია ამონაჭერით ან აქვს შვერილები სწორხაზოვან საზღვართან. ასეთი ტიპის ამოცანებს უკანასკნელ ხანებში დიდი ყურადღება ეთმობა.

ნ. კურდინის მიდგომა ამ ამოცანებისადმი წარმოგვიდგება ყველაზე უფრო წარმატებულად. იყენებდა რა მუსხელიშვილის მეთოდს, მან მოახერხა დეტალურად გაერჩია მითითებული სახის ზოგიერთი საინტერესო შემთხვევა (1962).

ფუნქციის თეორიის მეთოდების გამოყენების შესაძლებლობა

ფირფიტების ღუნვის ამოცანებში პირველად ილუსტრირებული იქნა ა. ლურიეს (1928) ნაშრომში, სადაც განიხილებოდა ფირფიტა დაყრდნობილი კიდეებით, რომლის შუა ზედაპირის არე კონფორმულად აისახებოდა წრეზე რაციონალური ფუნქციის მეშვეობით. უფრო დაწვრილებითი შესწავლა ამ საკითხისა იყო ჩატარებული მოგვიანებით ა. კალანდიას (1953) მიერ. ა. ლურიეს (1940) სხვა ნაშრომში მოცემულია იგივე მეთოდით მიღებული ამონახსნები ღუნვის თეორიის სამი ძირითადი ამოცანის წრის შემთხვევისათვის. აქ, ისევე როგორც იმავე ავტორის წინა ნაშრომში, გამოიყენებოდა მუსხელიშვილის მეთოდი (93).

ზემოთ ციტირებული ს. ლეხნიცკის ნაშრომი (1938) შეიცავს კომპლექსური ცვლადის მეთოდების გამოყენებას ფირფიტების ღუნვის ამოცანებში. მასში გამოიყვანება ძირითადი სიდიდეების ზოგადი კომპლექსური წარმოდგენები იზოტროპული და ანიზოტროპული შემთხვევებისათვის, საბოლოო სახით ფორმულირდება ძირითადი ამოცანები კომპლექსური ცვლადის ტერმინებში და მოიცემა მათი ამონახსნები ზოგიერთ კერძო შემთხვევებში.

ა. ლურიესა და ს. ლეხნიცკის მითითებული ნაშრომებით დაიწყო ფირფიტების ღუნვის თეორიაში ინტენსიური გამოკვლევები.

93-ის მეთოდით მ. ფრიდმანმა (1945) იპოვა ფირფიტის ღუნვის ზოგიერთი კონკრეტული ამოცანის ამონახსნები, რომელთაც აქვთ მრუდწირული ნახვრეტი, იღუნება მომენტებითა და ძალვებით, რომლებიც მის კიდეზეა მოდებულია.

განსაკუთრებული ყურადღება ეთმობოდა კიდეებით დაყრდნობილი ფირფიტის წონასწორობის ამოცანას. მის შესწავლას მიეძღვნა ზ.ჰალილოვის (1950), მ. ფრიდმანის (1952), დ. შერმანის (1959), ა.კალანდიას (1953) ნაშრომები.

ფუნქციის წრფივი შეუღლების მეთოდი (იხ. 97) აღმოჩნდა ერთობ მოხერხებული საშუალება ამოცანების ზოგადი გამოკვლევებისათვის, და ასევე მათი ეფექტური ამოხსნისათვის სპეციალურ შემთხვევებში. მას გააჩნია აშკარა უპირატესობა სხვებთან შედარებით შერეული და საკონტაქტო ამოცანების შესწავლისას, სადაც მნიშვნელოვანია შეგვეძლოს ამოხსნის თავისებურებათა გამოყოფა. ამ ტიპის ამოცანებს განვიხილავთ ქვემოთ.

ამ მეთოდის გამოყენება ბრტყელი ამოცანებისადმი პირველად მითითებული იყო ნ. მუსხელიშვილის ნაშრომში (1941), სადაც განიხილებოდა დრეკადი ნახევარსიბრტყის შემთხვევა. ძირითადი ამოცანების ამონახსნები ამ შემთხვევაში ნაპოვნი იქნა მარტივ და ფრიად ეფექტურ ფორმაში. ამ მეთოდის შემდგომი არსებითი განზოგადოება შემოთავაზებული იყო ი. ქარცივაძის (1943) მიერ, რომელმაც ის განავრცო წრიული არეს შემთხვევაზე, და აგრეთვე წრეზე ასახვის უფრო ზოგად შემთხვევაზე რაციონალური ფუნქციის საშუალებით. იმავე ავტორს ეკუთვნის მითითებული არეებისათვის მეთოდის გამოყენება კონკრეტული ამოცანების ამოსახსნელად. ქარცივაძის შედეგები დაწვრილებითაა გადმოცემული ნ. მუსხელიშვილის წიგნში (1966). წრიული ხვრელის მქონე სიბრტყისათვის შერეული ამოცანა განიხილებოდა ბ. მინცბერგის (1948) მიერ.

ამავე მეთოდით ნ. მუსხელიშვილმა მიუთითა ბრტყელი დრეკადობის თეორიის მესამე ძირითადი ამოცანის ამოხსნაზე ჩაკეტილი სახით.

ხისტი პროფილით შეუღლების ამოცანა სხვა მეთოდებით შეისწავლა გ.პოლოჟიმ. ამოცანის სასაზღვრო პირობები წინასწარ იქნა მოქცეული ზოგიერთი გარდაქმნების ქვეშ, რომლებმაც გაამარტივეს ამ პირობების ფორმა საზღვრის სწორხაზოვან უბნებზე. სწორედ ამან მისცა ავტორს შესაძლებლობა მიეთითებინა ამოცანის ცხადი ამოხსნა, ჯერ ამოზნექილი მრავალკუთხედებისათვის (1949, 1950), ხოლო შემდეგ, ერთობ დახვეწილი გამოკვლევების შემდგომ კუთხის წერტილებში ძაბვების ქცევის შესახებ, გადაადგილებების ვექტორის უწყვეტობის პირობისას, ყველაზე ზოგადი სახის მრავალკუთხედებისათვის, და ასევე ნებისმიერი მრავალკუთხა ნახვრეტის მქონე უსასრულო ნახევარსიბრტყისათვის (1957).

შეისწავლიდა რა ძირითად ბრტყელ ამოცანებს კუთხეების მქონე ცალადბმული არეებისათვის ს. ბელონოსოვმა (1954, 1962) შემოგვთავაზა მათი ისეთი ამოხსნის მეთოდი, რომელიც საშუალებას იძლევა მიეცეს თეორიული დასაბუთება კუთხეების მომრგვალებაზე დაფუძნებულ, მიახლოებითი ამოხსნის პრაქტიკულ ხერხს: მოცემული არეს

ნახევარსიბრტყეზე $\mathrm{Re}\zeta > 0$ კონფორმული ასახვა საშუალებას იძლევა φ და ψ კომპლექსური პოტენციალების მოსაძებნად გამოვიყენოთ ლაპლასის ცალმხრივი გარდაქმნის აპარატი. მიღებული მეთოდის, ანალოგიურად ნ.მუსხელიშვილის მიერ, იგება საკმაოდ მარტივი სტრუქტურის ინტეგრალური განტოლებები, რომლებიც მოიხმარება გარკვეული აზრით არეებისათვის, კუთხის წერტილებით. თუ L კონტური არ შეიცავს კუთხის წერტილებს და საერთოდ საკმარისად გლუვია, მაშინ ინტეგრალური განტოლების გული არის ფრედჰოლმური, ხოლო უბან-უბან გლუვი კონტურის ზოგად შემთხვევაში ის მიეკუთვნება კარლემანის გულების ტიპს.

ს. ბელონოსოვის ინტეგრალური განტოლებები, როგორც მან აჩვენა (1962), ამოხსნადია ძირითად ამოცანათაგან თითოეულისათვის. უსასრულო სოლის ან ზოლის კერძო შემთხვევებში ინტეგრალური განტოლებები იხსნება კვადრატურებში, რასაც მივყავართ ამ შემთხვევაში სასრულო სახით ამოცანების ამოხსნამდე. ს.ბელონოსოვის ციტირებულ წიგნში განსაზღვრულია აგრეთვე არეების კლასი, რომლებისთვისაც ძირითადი ამოცანები ამოხსნადია კვადრატურებში მითითებული მეთოდით. ეს კლასი, გარდა არეებისა, რომლებიც ფორმით მახლობელია სოლთან, ზოლთან და ჰიპერბოლასთან, შეიცავს თავის თავში აგრეთვე წრიულ კონცენტრულ რგოლს.

ზემოთ გადმოცემული დ. შერმანის მეთოდი (95) მის მიერ თავდაპირველად შემოთავაზებული იყო ორადბმული პროფილების განსაზღვრული კლასის, გრეხისა და ღუნვის ამოცანების ამოხსნისათვის. ბრტყელი დეფორმაციისადმი შეფარდებით ის იყო ილუსტრირებული (1951) ნახევარსიბრტყის მაგალითად, რომელიც დასუსტებულია არაერთნაირი ორი წრიული ნახვრეტით. შერმანის უფრო გვიანდელ გამოკვლევებში მიმდინარეობდა მეთოდის არსებითი გარდაქმნები, რამაც მოხსნა დიდი მოცულობის შუალედური გამოთვლითი ოპერაციების ჩატარების აუცილებლობა. შედეგად ამოხსნის პროცესი გახდა თვალმისაწვდომი და მიიღო თავის ძირითად ნაწილში რეკურენტული თანაფარდობების ხასიათი.

დ. შერმანისა და მისი მოწაფეების მრავალრიცხოვან ნაშრომებში, რომლებიც გამოქვეყნებულია უკანასკნელ წლებში, მოცემულია მეთოდის

გამოყენება ბრტყელი დეფორმაციის შესახებ კონკრეტულ ამოცანებში. განხილული იყო ამოცანები წონადი ნახევარსიბრტყის შესახებ ორი ნახვრეტით (წრიულით და ელიფსურით), რომლებიც განლაგებულია გარემოს წრფივი საზღვრიდან მნიშვნელოვანი დაშორებით; დრეკადი წრის შესახებ ნახვრეტით, საკმაოდ ზოგადი მოხაზულობისა; ნახევარსიბრტყის შესახებ ნახვრეტით, რომლის კიდის გასწვრივ ჩარჩილულია რგოლი სხვა მასალისაგან, და სხვა ანალოგიური ამოცანები. შედეგების საფუძვლიანი მიმოხილვა ინტეგრალური განტოლებების მეთოდის გამოყენებაზე სრული ბიბლიოგრაფიით მოყვანილია დ. შერმანის ნარკვევში (1962).

მრავალბმული არეს ცალკეული შემთხვევისათვის გამოიყენებოდა შვარცის განზოგადებული ალგორითმი, რომელიც ზოგად ფორმაში განავითარა ს. მიხლინმა (1949) ძირითადი ბიჰარმონიული ამოცანის მიმართ. მეთოდის პირველი ილუსტრაცია გაკეთდა იმავე ავტორის მიერ (1934) ელიფსური ნახვრეტის მქონე, წონადი ნახევარსიბრტყის მაგალითზე, როცა უსასრულობაზე ძაბვები განაწილებულია ჰიდროსტატიკური კანონით.

შვარცის მიხედვით თანდათანობით მიახლოებების კრებადობა გამოიკვლეოდა არეს მიმართ ზოგიერთი შეზღუდვებისას, ს. მიხლინისა და ა. გორგიძის ნაშრომებში. მეთოდის კრებადობა ზოგად შემთხვევაში დადგენილი იქნა ს.სობოლევის (1936) მიერ.

შვარცის ალგორითმს არ გააჩნია სწრაფი კრებადობა, რომელიც უნდა გვახსოვდეს მეთოდის პრაქტიკული გამოყენებისას. მიუხედავად ამისა რიგ შემთხვევებში მან შეიძლება მოგვცეს დამაკმაყოფილებელი შედეგები. მაგალითებად გამოგვადგება ა. კოსმოდამიანსკის ნაშრომები (1961, 1964), რომლებიც ეხება ორი არაერთნაირი ნახვრეტის შემთხვევას უსასრულო გარემოში.

ფირფიტაში, ბევრი ნახვრეტებით, ძაბვების შესწავლისას ერთერთ ძირითად საკითხს წარმოადგენს მოცემული ნახვრეტის სიახლოვეს გარემოს შესუსტების, რომლებიც გამოწვეულია მეზობელი ნახვრეტების არსებობით, ხარისხის განსაზღვრა. ამ საკითხებს, რომლებიც იწვევენ დიდ ინტერესს სამთო საქმეში, მიეძღვნა დ. შერმანისა და მისი

მიმდევრების ნაშრომები, რომელთა შესახებ ზემოთ ითქვა. მივუთითოთ ზოგიერთ განზოგადებაზე ამ მიმართულებით.

იმ შემთხვევაში, როცა გარემო შესუსტებულია ნებისმიერი სასრულო რიცხვის ნახვრეტით ა. კოსმოდამიანსკი (1961, 1962) იყენებდა ბუბნოვ-გალიორკინის მეთოდს. საძიებელი φ და ψ კომპლექსური პოტენციალებისათვის ის სარგებლობდა განუსაზღვრელი კოეფიციენტების მქონე, სპეციალური სახის ფუნქციების უსასრულო ჯამის სახით წარმოდგენებით და იღებდა მიახლოებითი ამოხსნისათვის ალგებრულ განტოლებათა სასრულო რიცხვის სისტემებს, მეთოდს მივყავართ განსაკუთრებით კარგ შედეგებამდე წრიული ნახვრეტების შემთხვევაში.

მიახლოების რიგის უსაზღვრო გაზრდისას ალგებრული სისტემები ხდება უსასრულო. იმავე ავტორების გამოკვლევებმა გვიჩვენა, რომ ამ სისტემებს გააჩნიათ ხელსაყრელი თვისებები ნახვრეტების ერთმანეთთან, როგორც გნებავთ, მცირე სიახლოვისასაც კი. არაწრიული მრუდწირული ნახვრეტების შემთხვევაში მიზანშეწონილი ხდება იმ მეთოდების გამოყენება, რომლებიც ახლოსაა იდეაში ნ. მუსხელიშვილის მეთოდთან (ა. კოსმოდამიანსკი, 1962). მითითებული მიახლოებითი ხერხები კოსმოდამიანსკის და ზოგიერთი სხვა ავტორის მიერ იყო გამოყენებული ამოცანების ამოხსნისათვის რიგ კონკრეტულ შემთხვევებში.

გ. მუხარინოვმა (1937, 1939), გამოიყენა რა მიმდევრობითი მიახლოების რაღაც ალგორითმის ანალოგი, დამუშავებული გ. გოლუზინის მიერ დირიხლეს ამოცანისათვის, შეისწავლა ამოცანა ფირფიტისა და დისკისათვის, როცა გარემო შესუსტებულია წრიული ფორმის, ნებისმიერად განლაგებული, ნებისმიერი სასრულო რიცხვის ნახვრეტებით.

მნიშვნელოვან ინტერესს იწვევს დრეკადობის თეორიის პერიოდული ამოცანა. წარმოვიდგინოთ შემოუსაზღვრელი ერთგვაროვანი გარემო, რომელიც შესუსტებულია ერთნაირი და პერიოდულად განლაგებული ნახვრეტების უსასრულო რიგით. დავუშვათ, რომ ყველა ეს ნახვრეტი მოექცა ერთნაირი გარე ძალვების მოქმედების ქვეშ და მათი ცენტრები განლაგებულია ერთსა და იმავე სწორზე. ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში ითვლება, რომ ცენტრების სწორი პარალელურია ნახევარსიბრტყის

საზღვრისა და იმყოფება მისგან მანძილზე, რომელიც მნიშვნელოვნად აღემატება ნახვრეტის ზომებს.

გეომეტრიული და ძალოვანი სიმეტრიის ერთობლივი ფაქტორების არსებობას მოსდევს გადაადგილებებისა და ძაბვების პერიოდულობა ცვლადის (ნივთიერი) მიმართ, რომელიც იცვლება ცენტრების ხაზის გასწვრივ. ეს პერიოდულობა იძლევა ამოცანის რედუცირების საშუალებას მსგავს ამოცანაზე ორი ფუნქციის მოძებნისა, რომლებიც ჰოლომორფულია რომელიღაც შეკრული კონტურის გარეთა არეში. მოსაზრებები, რომლებმაც მიგვიყვანეს (92) ინტეგრალურ განტოლებებამდე, აქაც მიუდგება, რაც გვაძლევს შესაძლებლობას ავაგოთ ამონახსნი ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლებებისათვის, რომლებიც ყოველთვის წყდება ერთადერთი სახით. ეს გააკეთა გ. სავინმა (1939) (იხ. აგრეთვე ს. მიხლინი, 1949).

ფუნქციონალური განტოლებებისა და ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდების ერთობლივი გამოყენებით ხერხდება რიგ შემთხვევებში ავაგოთ ამოცანის ეფექტური ამონახსნი. მივუთითოთ ზოგიერთ ნაშრომზე ამ მიმართულებით.

დ. შერმანმა (1961) გამოიკვლია ძაბვების ველი წონად გარემოში, რომელიც შესუსტებულია წრიული და კვადრატული ფორმის, პერიოდულად განლაგებული ნახვრეტებით. ამოცანა იხსნებოდა წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემაზე დაყვანით. ამონახსნის რაოდენობრივმა ანალიზმა ავტორს საშუალება მისცა კვალდაკვალ მიჰყოლოდა ნახვრეტების ახლოს ძაბვების განაწილებას ε რიცხობრივი პარამეტრის, რომელიც ახასიათებდა არეს ფარდობით ზომებს ცვლილების მნიშვნელოვან დიაპაზონში; არ წარმოადგენს გამონაკლისს ერთმანეთთან ახლოს მდებარე ნახვრეტების შემთხვევაც.

ზოგადი ფორმის მრუდწირული ნახვრეტებით პერიოდული ამოცანა განიხილებოდა კიდევ უფრო ადრე ი. ვოროვიჩისა და ა. კოსმოდამიანსკის ნაშრომებში (1959). საძიებელი კომპლექსური პოტენციალებისათვის ავტორების მიერ შემოთავაზებული იყო ზოგიერთი ინტეგრალური წარმოდგენები, რომლებიც გამოსახავდნენ მათ ხსვა ანალიზური ფუნქციებით, რომლებიც ჰოლომორფულებია სიბრტყეში ერთი ნახვრეტით. შემდგომში ამ უკანასკნელთა

საპოვნელად გამოიყენებოდა მცირე პარამეტრის მეთოდი, და ამოცანა დადიოდა ერთი ტიპის ამოცანათა თანმიმდევრობაზე ცალადბმული არესათვის. მეთოდის კრებადობა არ გამოკვლეულა. რიცხვითი გამოთვლების დაწვრილებითი ანალიზი ჩატარდა ელიფსური ნახვრეტების შემთხვევაში, როცა ფირფიტა იჭიმება უსასრულობაზე ძალვებით, რომლებიც მიმართულია ცენტრების ხაზისადმი ნებისმიერი კუთხით. ამ მიდგომის ზოგიერთი შემდგომი განზოგადება მოცემულია ა. კოსმოდამიანსკის (1965) მიერ.

უნდა აღინიშნოს, რომ დრეკადობის თეორიის ბრტყელი პერიოდული ამოცანა
პირველად განხილული იქნა ვ. ნათანზონის (1935) მიერ, რომელიც იკვლევდა უსასრულო სხეულში ორნაირად პერიოდული წრიული ნახვრეტების სისტემის შემთხვევას.

უფრო დაწვრილებით ცნობებს პერიოდული ამოცანის შესახებ დაინტერესებული პირი იპოვის ზემოთ ციტირებულ დ. შერმანის მიმოხილვაში (1962).

უკანასკნელ წლებში დიდი ყურადღება ექცეოდა ბრტყელი ამოცანების ამოხსნის ეფექტური მეთოდების ძიებას, როცა დრეკადობის ძირითადი კანონი არაწრფივია, მაგრამ დეფორმაციის სიმცირის შესახებ დაშვება შენარჩუნებულია. განსაკუთრებულ ინტერესს იწვევდნენ საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია ნახვრეტების მქონე ფირფიტებსა და გარსებში ძაბვების კონცენტრაციის განსაზღვრასთან.

თუ დრეკადობის კანონის არაწრფივობას დავახასიათებთ მცირე რიცხვითი პარამეტრით, მაშინ ბიჰარმონიული განტოლების ნაცვლად ამ შემთხვევაში ძაბვათა ფუნქციისათვის მივიღებთ მეოთხე რიგის არაწრფივ დიფერენციალურ განტოლებას კერძო წარმოებულებში მთავარი ბიჰარმონიული წევრით. ამ განტოლების ინტეგრებისათვის შესაბამისი სასაზღვრო პირობებისას გამოიყენებოდა მცირე პარამეტრის მეთოდი, ამასთან დრეკადობის კანონის გადახრა წრფივისაგან და ნახვრეტის გადახრა წრიულისაგან მიჩნეული იყო ერთდროულად მცირეებად. თუ გავშლიდით ძაბვათა ფუნქციას, გადაადგილებათა ვექტორის კოორდინატებს, და აგრეთვე ფუნქციებს, რომლებიც ფიგურირებენ ამოცანის სასაზღვრო პირობებში მწკრივებად

ორი პარამეტრით, რომლებიც ზემოთ დასახელებულ გადახრას ახასიათებენ, მივიღებთ თანამიმდევრობას ზოგიერთი ბიჰარმონიული ამოცანების წრიული ნახვრეტის მქონე სიბრტყისათვის.

ამ გზით იქნა ამოხსნილი არაწრფივი დრეკადობის თეორიის რიგი კონკრეტული ამოცანებისა.

რიცხვითი გაანგარიშებები გვიჩვენებენ, რომ ფიზიკური არაწრფივობის გათვალისწინებას მივყავართ უფრო თანაბარ, წრფივ თეორიასთან შედარებით, ძაბვების განაწილებასთან ნახვრეტებთან ახლოს; ძაბვათა კონცენტრაციის კოეფიციენტი უფრო მცირე ხდება.

ამ მიმართულების შედეგების უფრო დაწვრილებით გაცნობა შეიძლება გ.სავინის (1965), ა. გუნიას, გ. სავინის და ი. ცუმპალას (1964) ნაშრომებში.

2.3.2. უბან-უბან ერთგვაროვანი გარემო. შემაგრებული და გაძლიერებული ფირფიტები

უბან-უბან ერთგვაროვანს ჩვენ ვუწოდებთ დრეკად გარემოს, რომელიც შედგენილია ერთგვაროვანი ნაწილების სასრულო რიცხვისაგან, რომლებიც სხვადასხვაგვარია ფორმითა და დრეკადი თვისებებით. სხვადასხვა ნაწილების გაერთიანება შეიძლება იყოს როგორც ბუნებრივი, ასევე ხელოვნურიც. უკანასკნელნი ყოველთვის ემსახურებიან კონსტრუქციის მზიდუნარიანობის გაძლიერების მიზანს და ხშირად გამოიყენება საინჟინრო პრაქტიკაში.

წარმოვიდგინოთ სასრულო ან უსასრულო ფირფიტა, რომელსაც გააჩნია ნახვრეტების რაღაც რიცხვი, სადაც ჩადგმულია მთლიანი ან თავის მხრივ ნახვრეტებით დასუსტებული, საყელურები სხვა მასალისაგან. საყელურის ფირფიტასთან შეერთებისას ის შეიძლება იყოს ჩარჩილული ნახვრეტში ფარგის გასწვრივ, ჩაწნეხილი, ანდა ვთქვათ, ჩასმული მასში ცხელ ან ცივ მდგომარეობაში, ყოველთვის, თუ საყელური არ არის ჩარჩილული, ივარაუდება, რომ ერთმანეთთან შეუღლებული დრეკადი ნაწილების კონტურები მოდის თანხვედრაში დრეჩოების გარეშე და შეკავებულია ერთი მეორეს სრიალისაგან.

ამ თავში დამატებით მივიჩნევთ, რომ სხეულების ურთიერთშეხებული ზედაპირები არსად არ ცილდებიან ერთმანეთს დეფორმაციის გამო.

შემაგრება შეიძლება, რა თქმა უნდა, არა მარტო ნახვრეტის კიდეების. ფირფიტები შეიძლება გავამაგროთ რგოლებით მის ნებისმიერ კიდეზე, და ასევე შიგა ნაწილებში, რომლებიც არ ემიჯნებიან საზღვარს. უკანასკნელ შემთხვევაში ლაპარაკობენ ფირფიტის გამაგრებაზე სიხისტის წიბოებით.

შედგენილი სხეულის მთლიანი L საზღვარი იქნება შედგენილი ფირფიტის გარე კონტურისაგან (თუ რასაკვირველია ის არ ვრცელდება უსასრულოდ ყველა მხარეს), შეუმაგრებელი ნახვრეტების კონტურებისაგან და ბოლოს ჩასადგმელი საყელურების შიდა კონტურებისაგან, თუ ასეთები არსებობენ. სხეული შეიძლება განიცდიდეს ნებისმიერ ზემოქმედებას როგორც შიგნით, ასევე საზღვარზეც.

ფირფიტის შეუმაგრებელ კიდეზე სასაზღვრო პირობები იქნება, აშკარაა, ჩვეულებრივი, შესაბამისი მასზე მოცემული ძალოვანი ზემოქმედების რეჟიმისა ან მისი ჩამაგრების ხასიათისა. სხვადასხვა გარემოთა ხაზზე პირობები კი იქნება სხვადასხვაგვარი იმ ნაწილების შეერთების ხერხთან დამოკიდებულებით, რომლებიც მას ესაზღვრებიან.

მაგალითად, შემთხვევაში, როცა ფირფიტაში ყველა ნახვრეტი, რომლებიც იკავებენ სასრულო მრავალბმულ S არეს საზღვრით $L = L_1 + L_2 + \cdots + L_{m+1}$, შევსებულია მთლიანი დისკებით სხვადასხვა მასალისაგან, რომლებიც ფირფიტასთან მირჩილულია ნახვრეტების ფარგლების გასწვრივ, ხოლო დაძაბული მდგომარეობა გამოწვეული გარე ძალებით, რომლებიც მოდებულია მხოლოდ ფირფიტის გარე კონტურზე, ჩვენ გვექნება ანალიზური ფუნქციების თეორიის შემდეგი ამოცანა:

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) \qquad L_{m+1}\text{-ზე}, \tag{110}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = \varphi_k(t) + t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)} \qquad L_k\text{-ზე}, \tag{111}$$

$$\frac{x}{\mu}\varphi(t) - \frac{1}{\mu}\left[t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi_k(t)}\right] =$$

$$= \frac{x_k}{\mu_k} \varphi_k(t) - \frac{1}{\mu_k} \left[t\overline{\varphi_k'(t)} + \overline{\psi_k(t)} \right] \quad L_k \text{-ზე} \quad (k = 1,2,\cdots,m) \tag{112}$$

სადაც φ და ψ ჰოლომორფულებია S არეში, ხოლო φ_k და ψ_k ჰოლომორფულებია სასრულო S_k^- არეზე, რომელიც შემოსაზღვრულია L_k $(k = 1,2,\cdots,m)$ კონტურით. (110) სასაზღვრო პირობის აზრი ნათელია წინამდებარესაგან. (111) და (112) ტოლობები კი გამოხატავენ გადაადგილებათა და ძაბვათა ვექტორების კომპონენტების უწყვეტობის აშკარა პირობებს გარემოთა გამყოფ ხაზზე გადასვლისას. k ინდექსი მიწერილი აქვთ საყელურის მასალის დრეკად ელემენტებს, რომლებსაც უკავიათ S_k^- არე.

ერთ-ერთი ადრინდელი გამოკვლევა, რომელიც ეხებოდა არაერთგვაროვანი დრეკადობის სხეულებს და რომელიც შესრულებულია კომპლექსური ცვლადის მეთოდების ბაზაზე, იყო ს.მიხლინის ნაშრომი (1935), რომელშიც 94-ში ნახსენები შვარცის გულის საშუალებით, შეისწავლებოდა ზოგადი ამოცანა უბან-უბან ერთგვაროვანი გარემოს შესახებ, ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდით. ზოგიერთ კერძო შემთხვევები განხილული იყო ეფექტური სახით იმავე ავტორის სხვა ნაშრომში (1934).

შემდგომში ამოცანების გამოკვლევამ არაერთგვაროვანი დრეკადობით დაიწყო სწრაფად განვითარება. ამ არეში მნიშვნელოვანი წარმატებები იქნა მიღწეული უკრაინელი მეცნიერების მიერ, სადაც შესაბამისი საკითხები დიდი ხნის განმავლობაში იყო ბევრი ავტორის კვლევის საგანი. ამ გამოკვლევათა შედეგები გადმოცემულია გ. სავინის (1951), დ. ვაინბერგის (1952), მ. შერემეტიევის (1960) და გ. სავინისა და ნ. ფლეიშმანის მონოგრაფიებში. ქვემოთ ჩვენ მოკლედ შევეხებით ძირითად შედეგებს.

დავიწყოთ შედარებით მარტივი შემთხვევიდან, როცა ძირითადი ფირფიტა და დრეკადი საყელურები, რომლებიც ნახვრეტებში იდგმევა, დამზადებულია ერთი და იმავე მასალისაგან. ამ შემთხვევაში ჩვენ უნდა დავუშვათ, რომ დაუძაბავ მდგომარეობაში საყელურების კონტურები რამდენადმე განსხვავდება შესაბამისი ნახვრეტების კონტურებისაგან. გამოსაყენებლად განსაკუთრებით საინტერესოა შემთხვევა, როცა

საყელურები ჩაწნეხილია ან ჩასმულია ნახვრეტში მოცემული დრეკადი ჭექით.

ამ ამოცანის სასაზღვრო პირობები მიიღება (110)-(112)-დან, თუ (112)-ის მარჯვენა ნაწილს მივუერთებთ მოცემულ ფუნქციას, რომელიც გამოსახავს დრეკადი გადაადგილებების ნახტომის არსებობას და გავითვალისწინებთ, გარდა ამისა, რომ სხეულის დრეკადი თვისებები ყველგან ერთნაირია.

ამ ამოცანის ამოხსნის ზოგადი ხერხი შემოთავაზებული იყო დ. შერმანის (1940) მიერ. ეს ხერხი დამყარებულია ფუნქციის ანალიზურ გაგრძელებაზე, 95-ში გადმოცემულის მსგავსზე. ამ ხერხის თანახმად განსახილველი ამოცანა დაიყვანება ჩვეულებრივ ბრტყელ ამოცანაზე სრული შედგენილი არესათვის, გაყოფის ხაზზე რაიმე პირობების გარეშე. ამასთან, თუმცა, ახლად მიღებულ ამოცანას ექნება (გარე კონტურზე) რამდენადმე შეცვლილი სასაზღვრო პირობა; ტოლობის მარჯვენა ნაწილში, რომელიც ამ პირობას წარმოადგენს, გაჩნდება დამატებითი შესაკრები, რომელიც გამოსახავს რაიმე ფიქტიურ ზემოქმედებას მთელ სისტემაზე მთლიანობაში.

შემთხვევაში, როცა ჩანართებს აქვთ წრიული ფორმა, ახლახან ნახსენები შემასწორებელი წევრი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას ცხადი სახით. როცა გადაადგილება მიმართულია ნორმალზე და მისი სიდიდე მუდმივია მას აქვს განსაკუთრებით მარტივი სახე, რომელიც პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება.

საბოლოო ანგარიშში წრიული ჩანართების შემთხვევაში ამოცანის ამოხსნა აქ მიიყვანება ბოლომდე შედგენილი არეებისათვის, რომლებიც აისახებიან წრეზე რაციონალური ფუნქციის მეშვეობით. ამ გზით იქნა განხილული კონკრეტული ამოცანების დიდი რიცხვი. დაწვრილებითი მითითებები შესაბამის პუბლიკაციებზე მოიპოვება ზემოთ ციტირებულ დ. შერმანის მიმოხილვაში (1962).

სხვაგვარადაა საქმე სხვა დრეკადი მახასიათებლების მქონე ჩანართების შემთხვევაში. ხისტი ჩანართის განხილვას. აშკარაა, არ შემოაქვს არავითარი გართულებები, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ჩვენ საქმე გვექნება ჩვეულებრივ ბრტყელ ამოცანასთან ნახვრეტის კონტურზე მოცემული დრეკადი გადაადგილებებისას (მეორე ძირითადი

ამოცანა). სხვადასხვა მასალებისაგან დრეკადი ჩანართების შესახებ ამოცანა გაცილებით რთულია.

ეს ამოცანა ერთი ჩანართისათვის, როცა k=1, (110)-(112)-ში გამოიკვლეოდა მეთოდით, რომელიც ანალოგიურია 3.3.5-ში დასახულის (დ. შერმანი, 1958) ამჯერად ფირფიტის მთელ L_1+L_2-ზე საზღვარზე შემოსაყვანი დამხმარე $\omega(t)$ ფუნქციის საპოვნელად, ავტორმა მიიღო ფრედჰოლმის ინტეგრალური განტოლება და მოგვცა მისი გამოკვლევა, ჩანართის მქონე ექსცენტრული რგოლის კერძო შემთხვევაში, რომელიც განიხილებოდა საილუსტრაციოდ, ინტეგრალური განტოლება იცვლება, როგორც (იხ. 95) წრფივ ალგებრულ განტოლებათა უსასრულო სისტემით, რომელიც იძლევა საშუალებას მივიყვანოთ ამოხსნა რიცხვით შედეგებამდე.

ერთმანეთში თანმიმდევრულად ჩალაგებული უცხო წრიული კონცენტრული რგოლების შემთხვევა, როგორც ადრე იყო აღნიშნული, ადვილად ექვემდებარება განხილვას ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდით.

ეს მეთოდი ფუნქციონალურ განტოლებებთან ერთობაში საშუალებას იძლევა განვიხილოთ ამოცანა რგოლური შემაგრებებით რამდენამდე ზოგად შემთხვევაში, მაგალითად, როცა უსასრულო ერთბმული არე, რომელიც უკავიათ შეუღლებულ სხეულებს, აისახება წრის გარეგნობაზე რაციონალური ფუნქციის საშუალებით და შემამაგრებელი რგოლი გადადის ამ დროს კონცენტრულ წრიულში. ასეთ დაშვებაში ასახვის შემთხვევა შეისწავლებოდა მ. შერემეტიევის (1949) მიერ. რომელსაც მოყვანილი აქვს დაწვრილებითი ამონახსნი, რიცხვითი შედეგებით, თანაფოკუსური ელიფსური რგოლის სახის მქონე ნახვრეტისათვის. გ.სავინის ნახსენებ მონოგრაფიაში, მოყვანილია გამოთვლების შედეგები დრეკადი შემაგრებების (109) ასახვით მოტანილი სხვა ფორმებისთვისაც და ნახვრეტის შემაგრებულ კონტურებზე ძაბვები შედარებულია იმავე ძაბვებთან ორ ზღვრულ მდგომარეობაში, როცა შემამაგრებელი რგოლი აბსოლუტურად მოქნილი (სიცარიელე) და როცა იგი აბსოლუტურად ხისტია.

ი. არამანოვიჩმა (1955), ანვითარებდა რა დ. შერმანის მეთოდს ძაბვების შესახებ, წრიული ნახვრეტის მქონე ნახევარსიბრტყეში ააგო

ამოცანის ამონახსნი ნახვრეტით, რომელიც შემაგრებულია სხვა მასალის დრეკადი რგოლით. გარემოს დატვირთვა აქ შეიძლება განხორციელდეს სხვადასხვა ხერხით, მაგალითად მისი გაჭიმვით, ჩარჩილული რგოლის შიდა კონტურზე ნორმალური დაწნევით, სწორხაზოვან საზღვარზე შეყურსული ძალით და სხვა. ამოხსნის სქემა იგივეა, როგორც ადრე (განტოლებით უსასრულო სისტემებზე დაყვანა). დადგენილია, რომ აქ მიღებული განტოლებათა სისტემა კვაზირეგულარულია ნახვრეტის ნახევარსიბრტყის კიდესთან ნებისმიერი სიახლოვისას.

განხილული სახის ამოცანების ეფექტურ ამოხსნის მიმართ გამოიყენებოდა ასევე ფუნქციათა წრფივი შეუღლების მეთოდი. მაგალითის სახით მივუთითოთ ი.პრუსოვის ნაშრომზე (1957), რომელმაც განიხილა უსასრულო ფირფიტაში ნახვრეტის გამაგრების შესახებ ამოცანა, როცა ცვლადი კვეთის მქონე რგოლი, შემოსაზღვრული გარედან წრეწირით და შიგნიდან ელიფსით ამაგრებს მას.

აქამდე ჩვენ ვგულისხმობდით, რომ დრეკადი რგოლის, რომელიც ამაგრებს ფირფიტაში ნახვრეტის კიდეს, დაძაბული მდგომარეობა, აიწერება ისევე როგორც თვით ფირფიტის დაძაბული მდგომარეობა, ბრტყელი დრეკადობის თეორიის განტოლებებით ან თხელი ფირფიტების ღუნვის განტოლებებით. თუ შემამაგრებელი რგოლი საკმარისად თხელია ან აქვს ფასონური პროფილი, მაშინ იგი უნდა განვიხილოთ როგორც მრუდე ძელი, რომლის დეფორმაცია აღიწერება მასალათა გამძლეობის თეორიის ელემენტარული განტოლებებით.

ასეთ დასმაში ამოცანა შემავსებელი კიდეების შესახებ პირველად განიხილებოდა მ. შერემეტიევის (1960) მიერ. მუდმივი კვეთის შემამაგრებელი რგოლი მიღებული იყო წვრილ ღეროდ, რომელსაც გააჩნდა სიხისტე ღუნვაზე და გაჭიმვაზე ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისას და სიხისტე ღუნვაზე და გრეხაზე თხელი ფირფიტების ღუნვისას.

გარკვეულობისათვის განვიხილოთ ერთი შემაგრებული ნახვრეტის მქონე უსასრულო ფირფიტები.

შემაგრებელი ნახვრეტის კონტურზე სასაზღვრო პირობებს მივიღებთ, თუ მოვითხოვთ ორივე მხრიდან შესაბამისი ძალვებისა და

გადაადგილებების ტოლობას. ეს პირობები წინა შემთხვევაში წარმოდგენილი იყო (111) და (112) ტოლობების სახით. ამჯერად მითითებული ტოლობების მარჯვენა ნაწილებში φ_k და ψ_k ფუნქციების (უკვე ქრება ამ ფუნქციათა განხილვის საჭიროება) სასაზღვრო მნიშვნელობების ნაცვლად გამოჩნდება სხვა უცნობები, და სახელდობრ გარე ძალვები X_n^0, Y_n^0, რომლებიც მოქმედებენ რგოლზე ფირფიტის მხრიდან, და რგოლის ღერძის გადაადგილებები u_0, v_0.

თუ ახლა, გამომდინარე მრუდწირული ღეროების მცირე დეფორმაციების თეორიის ცნობილი განტოლებებიდან, გამოვსახავთ u_0 და v_0 გადაადგილებებს გარე X_n^0, Y_n^0 დატვირთვებით და ჩავსვამთ შესაბამის მნიშვნელობებს ზემოთ ნახსენებ შეუღლების სასაზღვრო პირობაში, მაშინ φ და ψ ფუნქციების, რომლებიც ჰოლომორფულია ფირფიტის არეში, განსაზღვრისათვის მივიღებთ ორ კომპლექსურ პირობას, რომლებიც მარჯვენა ნაწილებში შეიცავენ მარტო უცნობ X_n^0 და Y_n^0 ძალვებს. მითითებული სახის შემაგრების მქონე ფირფიტების ღუნვის ამოცანებისათვის მარჯვენა ნაწილში უცნობი ფუნქციები საერთოდ შეგვიძლია გამოვრიცხოთ, და ჩვენ გვექნება მხოლოდ ერთი სასაზღვრო პირობა, მართალია რამდენადმე უფრო რთული, ვიდრე ძირითადი ბრტყელი ამოცანის ჩვეულებრივი პირობა.

საბოლოო ანგარიშში ჩნდება ამოცანის ეფექტური განხილვის შესაძლებლობა. ნახვრეტების კერძო სახეებისას, წრიული ნახვრეტის შემთხვევა ემორჩილება ხარისხოვანი მწკრივების მეთოდით დაწვრილებით ანალიზს (მ. შერემეტიევი, 1960). არაწრფიული ნახვრეტებისათვის ამოცანა უფრი რთულია და ეფექტური ამოხსნა თხოულობს მიმდევრობითი მიახლოების მეთოდის გამოყენებას.

ამ მიდგომის შემდგომი განზოგადება იყო მოცემული გ. სავინისა და ბ.ფლეიშმანის (1941) მიერ. მიიჩნევდნენ რა შემამაგრებელ ღეროს წვრილად (ანუ თვლიდნენ რა ღეროს განივკვეთს ვიწროდ), მათ ფენის კონტურზე სასაზღვრო პირობა შეასუსტეს და ჩამოაყალიბეს კომპლექსური ცვლადის ტერმინებში გაერთიანებული ამოცანა შერბილებული სასაზღვრო პირობების მქონე რგოლური შემაგრებების

შესახებ. ამ პირობების გამოყვანისას გამოიყენებოდა დაშვება იმის შესახებ, რომ ღერო ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შემთხვევაში ღუნვას არ ეწინააღმდეგება, ხოლო ფირფიტების განივი ღუნვისას დაკარგული აქვს გრეხითი სიხისტე.

ანალიზური ფუნქციის თეორიის მიღებული ამოცანა უშვებს, ძირითადი ბრტყელი ამოცანების მსგავსად, ამოხსნას ჩაკეტილი სახით, თუ ფირფიტის არე კონფორმულად აისახება წრეზე რაციონალური ფუნქციის საშუალებით. ეს ილუსტრირდება უსასრულო ფირფიტაში ელიფსური ნახვრეტის მაგალითზე.

გ. სავინმა და ნ. ფლეიშმანმა (1964), აგრეთვე მ. შერემეტიევმა (1960) განიხილეს ფირფიტის გაძლიერება მისი განივი ღუნვისას სხვა მასალის წვრილი რგოლებით (სიხისტის წიბოები), რომლებიც განლაგებულია ფირფიტის შიგნით. ერთი წიბოს უმარტივეს შემთხვევაში გვაქვს შემდეგი სურათი. წვრილი მრუდწირული რგოლი (უფრო ზუსტად, შეკრული დრეკადი წირი) მირჩილულია ფირფიტასთან მის შიდა ნაწილში. არე, რომელიც ფირფიტის შუა სიბრტყეს უკავია, იყოფა ამ დროს რგოლის ღერძის ხაზით ორ ბმულ ნაწილად (შიდა და გარეთა ამ ხაზის მიმართ). თითოეულ ამ არეში საჭიროა განვსაზღვროთ კომპლექსური ცვლადის ჰოლომორფული ფუნქციების წყვილი ფირფიტის კონტურზე, და აგრეთვე რგოლის ხაზზე რაიმე პირობებით. შეუღლების პირობა ამ ხაზზე უნდა შევადგინოთ ფირფიტისა და შემამაგრებელი რგოლის ერთობლივი მუშაობის გათვალისწინებით (ასეთი პირობა სამია) საბოლოო ანგარიშში ოთხი ჰოლომორფული ფუნქციის განსაზღვრისათვის გვაქვს ოთხი (110)-(112) სახის კომპლექსური პირობა, რომლებიც შეიცავენ, გარდა მოცემული სიდიდეებისა, რგოლის ღერძის რკალის ორკომპლექსურ ფუნქციას, რომლებიც არ არის მოცემული წინასწარ. ამ გზით სიხისტის წიბოებით ფირფიტის გაძლიერების შესახებ ამოცანა შეისწავლებოდა რიგ შემთხვევებში. მაგალითად, მრუდწირული წიბოების ნებისმიერი რიცხვის მქონე მრგვალი ფირფიტისათვის აგებულია ფრედჰოლმის გადაწყვეტადი ინტეგრალური განტოლება.

ზოგიერთი კერძო ამოცანები (მაგალითად, კონცენტრირებული სიხისტის წიბოს მქონე მრგვალი ფირფიტა, ცენტრალური სიხისტის

წიბოს მქონე ელიფსური ფირფიტა) იხსნება ეფექტურად მწკრივების მეთოდით.

ზემოთ ნახსენებ გ. სავინის (1951), დ. ვაინბერგის (1952), მ. შერემეტიევის (1960) და გ. სავინისა და ნ. ფლეიშმანის (1964) მონოგრაფიებში განხილულია აგრეთვე ზოგიერთი სხვა ამოცანა, ბრტყელი დაძაბული-მდგომარეობისა და ფირფიტების ღუნვის შესახებ, როგორც იზოტროპულ, ისე ანიზოტროპულ შემთხვევებში. განსაკუთრებით ვრცლადაა შესწავლილი, მაგალითად, საკითხები, რომლებიც დაკავშირებულია ანიზოტროპული მასალის გავლენასთან ელიფსური ნახვრეტების სიახლოვეს ძაბვებს კონცენტრაციაზე, შემამაგრებელი ელემენტების პარამეტრების რაციონალურ შერჩევის შესახებ, კონტურული შეყურსული დატვირთვების მრავალფენოვან დისკში გავლენის შესახებ.

ნ.მუსხელიშვილის იდეებმა დიდი გავლენა მოახდინეს ანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სასაზღვრო ამოცანათა და სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა თეორიის პრობლემატიკურ დამუშავებაზე (თ. გახოვის, ი. ვეკუას, ნ. ვეკუას, ა.ბიწაძის, დ. კვესელავას, ბ. ხვედელიძის, ლ. მაღნარაძის, გ. მანჯავიძის და სხვ. ნაშრომებში).

იგივე იდეები უკანასკნელი სამი ათეული წლის მანძილზე მტკიცედ იკიდებს ფეხს ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებათა ზოგად თეორიაში (ი. ვეკუას, ზ. ხალილოვის და სხვ. ნაშრომები). კერძოდ, მათ არსებითი გამოყენება ჰპოვეს თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების თეორიის საკითხებში.

აღსანიშნავია ლ. მუხაძისა და გ. ყიფიანის მიმოხილვითი ხასიათის სტატია „საქართველოში თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების თეორიის გამოკვლევათა მიმოხილვა“ (მეცნიერება და ტექნიკა № 4-5. 1997).

2.3.3. შერეული და საკონტაქტო ამოცანები

შერეული და საკონტაქტო ამოცანები განეკუთვნებიან დრეკადობის თეორიის ყველაზე რთულ ამოცანათა რიცხვს. კომპლექსურ ცვლადის ფუნქციათა თეორიის მეთოდებით მათი

შესწავლისას მიიღება სასაზღვრო პირობები წყვეტის კოეფიციენტებით და ჩნდება წყვეტის წერტილების მიდამოებში ამონახსნების შესწავლის აუცილებლობა.

როგორც ზემოთ უკვე აღინიშნა (94) დ. შერმანმა (1940) ააგო წყვეტის კოეფიციენტების მქონე სინგულარული ინტეგრალური განტოლება ძირითადი შერეული ბრტყელი ამოცანისათვის: იგივე განტოლება იძლევა ნორმალურად დატვირთული თხელი ანიზოტროპული ფირფიტის ღუნვის ამოცანის ამოხსნის საშუალებას, როცა კიდეს ნაწილი ჩამაგრებულია, ხოლო ნაწილი – თავისუფალი.

ა. კალანდიამ (1952) ააგო სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემა ფირფიტების ღუნვის ზოგადი ამოცანის ამოხსნისათვის, როცა კიდეს ნაწილი ჩამაგრებულია, ნაწილი – დაყრდნობილი, ხოლო დანარჩენი – თავისუფალი. რიგ ნაშრომებში (იხ., მაგალითად, ა. კალანდია, 1961; დ. შერმანი, 1955) მოცემულია ფირფიტების ღუნვის შერეული ამოცანების რიცხვითი ამონახსნი კერძო სახის არეებისათვის.

ბრტყელი დრეკადობის თეორიის შერეული ამოცანების ამოხსნის ერთ-ერთ ყველაზე ეფექტურ მეთოდს წარმოადგენს ფუნქციათა წრფივი შეუღლების მეთოდი. ამ მეთოდით შერეული ამოცანების ამოხსნის შესახებ იყო თქმული ზემოთ (97).

დრეკად ნახევარსიბრტყეში ხისტი ტვიფარების ჩაწნეხვის შესახებ ამოცანებს მივყავართ შეუღლების სასაზღვრო ამოცანებამდე, რომლებიც ანალოგიურია ძირითადი შერეული ამოცანისათვის ზემოთ აგებული (97) შეუღლების ამოცანისა. ორი დრეკადი სხეულის ურთიერთშეხების ამოცანა (ჰერცის განზოგადებული ბრტყელი ამოცანა), რომლებიც ფორმით ახლოსაა ნახევარსიბრტყესთან, როცა ურთიერთშეხების უბანი მცირეა, ასევე დაიყვანება წრფივი შეუღლების ამოცანაზე. ამ ამოცანების ამოხსნა ფუნქციათა წრფივი შეუღლების მეთოდით მოყვანილია ნ.მუსხელიშვილის მონოგრაფიაში.

ლ. გალინმა (1953) მოგვცა რიგი საკონტაქტო ამოცანების ამოხსნები კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის გამოყენების საშუალებით. ი.შტაერმანი (1949) შეისწავლიდა საკონტაქტო ამოცანებს ინტეგრალურ განტოლებათა მეთოდით.

ვ. აბრამოვის (1937), ნ. გლაგოლევის (1942, 1943), ვ. მოსაკოვსკის და პ.ზაგუბიჟენკოს (1955), ვ. პანასიუკის (1953, 1954), ა. კალანდიას (1957, 1958), მ. შერემეტიევის (1952, 1961) ნაშრომებში კონტაქტურ ამოცანათა რიგი გამოკვლეულია სხვადასხვა მეთოდებით.

2.3.4. ანიზოტროპული ტანის დრეკადობის თეორიის ბრტყელი სტატიკური ამოცანა

კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდები, როგორც პირველად გვაჩვენა ს. ლეხნიცკიმ, წარმატებით შეიძლება იყოს გამოყენებული ანიზოტროპული სხეულის ბრტყელ ამოცანაშიც (ამ მიმართულებით ს. ლეხნიცკის პირველი ნაშრომები იყო გამოქვეყნებული ოცდაათიან წლებში; იხ., მაგალითად, მონოგრაფია: ს. ლეხნიცკი, 1947, გამ. 2-1957).

ვთქვათ ერთგვაროვან ანიზოტროპულ სხეულს ყოველ წერტილში გააჩნია დრეკადი სიმეტრიის სიბრტყე, პარალელური მოცემული სიბრტყისა, რომელსაც ჩვენ მივიჩნევთ Oxy სიბტყედ. თუ სხეული ექცევა დრეკადი დეფორმაციის ქვეშ, რომელიც Oxy სიბრტყის პარალელურია, მაშინ ძაბვათა ფუნქცია (ერის ფუნქცია) აკმაყოფილებს განზოგადებულ ბიჰარმონიულ განტოლებას (მხედველობაში გვაქვს მოცულობითი ძალების არარსებობის შემთხვევა)

$$a_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + a_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y} + a_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + a_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_4 \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 , \qquad (113)$$

სადაც $a_0, \cdots, a_4$ – ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც დამოკიდებულია განსახილველი ტანის დრეკად თვისებებზე (ანალოგიურ განტოლებას აქვს ადგილი ფირფიტის განზოგადებული ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობისათვისაც).

ამ შემთხვევაშიც ხერხდება ავაგოთ ამონახსნის ზოგადი წარმოდგენა კომპლექსური ცვლადის ორი ანალიზური ფუნქციის საშუალებით. ეს წარმოდგენა დამოკიდებულია მახასიათებელი განტოლების, რომელიც შეესაბამება (113) განტოლებას, ფესვებზე

$$a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 = 0 . \qquad (114)$$

როგორც ს. ლეხნიცკიმ გვიჩვენა, ამ განტოლებას არა აქვს ნამდვილი ფესვები. იზოტროპული ტანის შემთხვევაში (114) განტოლება დაიყვანება $1+2s^2+s^4=0$ განტოლებამდე და მაშასადამე, აქვს ორჯერადი i და $-i$ ფესვები. თუ (114) განტოლებას აქვს ორჯერადი ფესვები $s=\alpha+i\beta$, $\bar{s}=\alpha-i\beta$, მაშინ (113) განტოლების ზოგადი ნამდვილი ამონახსნი წარმოგვიდგება სახით

$$U(x,y)=\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+x(z)+\overline{x(z)}. \tag{115}$$

როგორც იზოტროპული ტანის შემთხვევაში, მაგრამ ამჯერად კომპლექსურ ცვლადს z-ს აქვს სახე $z=x+sy=x+\alpha y+i\beta y\ \left((x,y)\in s\right)$, სადაც s აღნიშნავს არეს, რომელიც უკავია ტანს.

მოვახდენთ რა აფინურ გარდაქმნებს

$$x'=x+\alpha y\,,\quad y'=\beta y\,. \tag{116}$$

მივალთ კომპლექსურ ცვლადთან $z'=x'+iy'$, რომელიც იცვლება s' არეში და მიიღება s არედან (116) აფინური გარდაქმნების საშუალებით.

(115) ფორმულა და მისგან გამომდინარე გამოსახულება ძაბვებისა და გადაადგილებების კომპონენტებისათვის, გვიჩვენებენ, რომ ეს შემთხვევა (ანუ (114) განტოლების ჯერადი ფესვების შემთხვევა) წარმოადგენს თითქმის სრულ ანალოგიას იზოტროპული ტანის შემთხვევისა, და ამიტომ მას ჩვეულებრივ გამორიცხავენ განხილვიდან.

შემთხვევაში, როცა (114) განტოლებას არა აქვს ჯერადი ფესვები ანუ აქვს ოთხი სხვადასხვა წყვილებად შეუღლებული ფესვები

$$s_1=\alpha_1+i\beta\,,\ \bar{s}_1=\alpha_1-i\beta_1\,,\ s_2=\alpha_2+i\beta_2\,,\ \bar{s}_2=\alpha_2-i\beta_2\,,$$

(113) განტოლების ზოგადი ნამდვილი ამონახსნი წარმოგვიდგება სახით

$$U(x,y)=F_1(z_1)+\overline{F_1(z_1)}+F_2(z_2)+\overline{F_2(z_2)}\,, \tag{17}$$

ორი ანალიზური ფუნქციის საშუალებით, სადაც ცვლადებია

$$z_1=x+s_1y=x+\alpha_1y+i\beta_1y,\quad z_2=x+s_2y=x+\alpha_2y+i\beta_2y$$

რომლებიც შესაბამისად იცვლებიან s_1 და s_2 არეებში და მიიღებიან s არედან შესაბამისი აფინური გარდაქმნებით.

განსახილველ შემთხვევაში, იზოტროპული ტანის შემთხვევისაგან განსხვავებით, გვიხდება საქმე ვიქონიოთ ორ სხვადასხვა z_1 და z_3

კომპლექსური ცვლადის ანალიზურ ფუნქციასთან, რომლებიც იცვლებიან ორ სხვადასხვა არეში (ადვილი დასანახია, რომ z_1 და z_2 ცვლადები დაკავშირებულია ერთმანეთთან აფინური და არა ანალიზური გარდაქმნებით). ეს გარემოება, უნდა ითქვას, ართულებს სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნას (ანიზოტროპული ტანის შემთხვევაში ეფექტურად ამოხსნადი ამოცანების კლასი გაცილებით ვიწროა, ვიდრე იზოტროპული ტანებისათვის). თუმცა ანიზოტროპული ტანის შემთხვევაშიც ხერხდება სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნის მიღება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის მეთოდების საშუალებით. რიგი მნიშვნელოვანი შედეგებისა ამ მიმართულებით ეკუთვნით ს.ლეხნიცკის, ს. მიხლინს, გ. სავინს და სხვა.

(117) ძაბვათა ფუნქციის ზოგადი წარმოდგენიდან გამომდინარეობს ძაბვებისა და გადაადგილებების შემდეგი კომპლექსური წარმოდგენები

$$\left.\begin{aligned} X_x &= 2\operatorname{Re}\left[s_1^2\Phi_1'(z_1)+s_2^2\Phi_2'(z_2)\right],\\ Y_y &= 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1)+\Phi_2'(z_2)\right],\\ X_y &= -2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi_1'(z_1)+s_2\Phi_2'(z_2)\right];\end{aligned}\right\} \tag{118}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 2\operatorname{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]-\omega y+u_0\\ v &= 2\operatorname{Re}\left[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]+\omega x+v_0\end{aligned}\right\}. \tag{119}$$

აქ $\Phi_1(z_1)=\dfrac{dF_1}{dz_1}$; $\Phi_2(z_2)=\dfrac{dF_2}{dz_2}$, p_1, p_2, q_1, q_2– სრულიად განსაზღვრული მუდმივებია, რომლებიც გამოისახებიან ტანის დრეკადი კონსტანტებით, ხოლო ω, u_0, v_0–ნებისმიერი (ნამდვილი) მუდმივები შეესაბამებიან ტანის ხისტ გადაადგილებას.

თუ s არე, დაკავებული სხეულია, ცალადბმულია, მაშინ ანალიზური ფუნქციები, რომლებიც მონაწილეობენ ზოგად კომპლექსურ წარმოდგენებში, ცალსახებია; მრავლადბმული არეს შემთხვევაში ისინი, მრავალსახა ანალიზური ფუნქციებია. მაგალითად, თუ s არე შემოსაზღვრულია რამდენიმე კონტურით, მაშინ $\Phi_1(z_1)$ და $\Phi_2(z_2)$ ფუნქციებს აქვთ სახე

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1(z_1) &= \Phi_1^*(z_1)+\sum_{k=1}^{n}A_k\ln(z_1-z_{ik}),\\ \Phi_2(z_2) &= \Phi_2^*(z_2)+\sum_{k=1}^{n}B_k\ln(z_2-z_{2k}).\end{aligned}\right\} \tag{120}$$

სადაც $\Phi_1^*(z_1)$ და $\Phi_2^*(z_2)-$ცალსახა ანალიზური ფუნქციებია, z_{1k} და $z_{2k}-$ ფიქსირებული წერტილებია, ხოლო A_k და B_k მუდმივები, რომლებიც გამოისახებიან გარე ძაბვების მთავარი ვექტორით, რომელიც მოდებულია სასაზღვრო კონტურებზე. თუ ძალვათა მთავარი ვექტორი, რომელიც მოდებულია თითოეულ კონტურზე, ტოლია ნულის, მაშინ მუდმივები A_k, B_k ტოლია ნულისა და $\Phi_1(z_1)$, $\Phi_2(z_2)$ ფუნქციები ცალსახაა S_1, S_2 არეებში.

(118) ფორმულებიდან გამომდინარეობს, რომ პირველი ძირითადი ამოცანის ამონახსნი (საზღვარზე მოცემულია გარე ძალვები X_n, Y_n) დაიყვანება S_1 და S_2 არეებში ანალიზურ $\Phi_1(z_1)$ და $\Phi_2(z_2)$ ფუნქციების პოვნაზე სასაზღვრო პირობით

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)\right] &= -\int_0^s Y_n d_s + c_1, \\ 2\operatorname{Re}\left[s_1\Phi_1(z_1)+s_2\Phi_2(z_2)\right] &= \int_0^s X_n d_s + c_2, \end{aligned}\right\} \tag{121}$$

სადაც c_1, c_2-ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივები.

ანალოგიურად, მეორე ძირითადი ამოცანა დაიყვანება $\Phi_1(z_1)$ და $\Phi_2(z_2)$ ანალიტიკური ფუნქციების მოძებნამდე სასაზღვრო პირობებით

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\left[p_1\Phi_1(z_1)+p_2\Phi_2(z_2)\right]-\omega y+u_0 &= g_1, \\ 2\operatorname{Re}\left[q_1\Phi_1(z_1)+q_2\Phi_2(z_2)\right]+\omega x+v_0 &= g_2. \end{aligned}\right\} \tag{122}$$

სადაც q_1 და q_2– u და v გადაადგილებათა კომპონენტების მოცემული სასაზღვრო მნიშვნელობებია.

ძირითადი შერეული ამოცანის შემთხვევაში გვმართებს მოვახდინოთ (121) და (122) პირობების კომბინირება, ზოგად შემთხვევაში მივიღებთ სასაზღვრო ამოცანას წყვეტის კოეფიციენტებით.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ თხელი ანიზოტროპული ფირფიტის ღუნვის ამოცანა, ისევე როგორც იზოტროპული ფირფიტის შემთხვევაში, დაიყვანება კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის ამოცანებზე, რომლებთანაც მივყავართ ბრტყელ ამოცანებს. ჩამაგრებული კიდეს მქონე ანიზოტროპული ფირფიტის ღუნვის ამოცანა დაიყვანება (121) სახის ამოცანაზე, ხოლო თავისუფალი კიდეს მქონე ფირფიტის ღუნვის ამოცანა (122) სახის ამოცანაზე. ნაწილობრივ თავისუფალი და

ნაწილობრივ ჩამაგრებული კიდეს მქონე ფირფიტის ღუნვის შერეული ამოცანა დაიყვანება ბრტყელი თეორიის ძირითადი შერეული სახის ამოცანაზე (იხ. ს.ლეხნიცკი, 1947).

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ზოგიერთ სტაციონარულ დინამიკურ ამოცანასაც მივყავართ ზემოთ მითითებულ ამოცანებამდე ასე, ლ. გალინმა (1953), განიხილავდა რა ამოცანას ტვიფარის შესახებ, რომელიც მოძრაობდა მუდმივი სიჩქარით იზოტროპული ნახევარსიბრტყის საზღვრის გასწვრივ, დაიყვანა ის კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის თეორიის სასაზღვრო ამოცანამდე და ამ გზით ააგო მისი ამონახსნი.

2.3.5. სივრცითი მაღალი ძაბვის ელექტროგადამცემი ხაზების კონსტრუქციების ქარსაწინააღმდეგო მდგრადობა

ელექტროგადამცემი ხაზების ხანგრძლივობის პრობლემა მსოფლიოს მრავალი ქვეყნისათვის არის მნიშვნელოვანი. კავკასიის რეგიონი რთული კლიმატური და მიკროკლიმატური პირობებით გამოირჩევა და მისი ცვალებადობის შესახებ ინფორმაციით არ არის უზრუნველყოფილი, რადგან მთიანეთში განლაგებული მრავალი სადგური, რომელთა შორის მანძილი ხშირად 40 კმ-ს აღემატება, ვერ უზრუნველყოფს სანდო მეტეოლადასტრის შედგენას.

წლების განმავლობაში საქართველოს ტერიტორიაზე ქარიშხლების მოქმედების შედეგად ადგილი ჰქონდა ელექტროავარიებს გადამცემ ხაზებზე „კავკასიონი“, „იმერეთი“, „პალიასტომი“, „კოლხიდა“ და სხვ. ამ შემთხვევაში უმეტეს წილად ზიანდება შუალედი საყრდენი Т-26 П24Мa. საყრდენის დაზიანებისას ირღვევა ქვედა პანელები და საყრდენი მიწაზე ვარდება. არც ერთ შემთხვევაში არ მომხდარა ელემენტების ამოგლეჯა საყრდენების საძირკვლებიდან. მრღვევ ქარიშხლებს ადგილი ჰქონდა 1987 წლის ოქტომბერში, 1988 წლის თებერვალ-მარტში და ა.შ.

ელექტროგადამცემი ხაზები დაპროექტებული იყო ქარის სიჩქარისათვის 36 მ/წმ-ში, ქარის სიჩქარით დაწნევისათვის 80 კგძ/მ^2. საანგარიშო დატვირთვების განმეორებადობა – 15 წელიწადში ერთი.

სინამდვილეში ქარის სიჩქარემ გადააჭარბა 40 მ/წმ-ში. ქარის სიჩქარითი დაწნევა 80 კგძ/მ^2-ზე მეტი აღმოჩნდა. განმეორებადობა, კი შეადგინა 1→10 წელიწადში.

დაინტერესებული მხარის თხოვნით შევისწავლეთ ВΛ-500 კილოვატიანი „იმერეთის" ხაზის ავარიული სიტუაცია № 317-339 საყრდენებს შორის. კომპიუტერული პროგრამების შედგენისას გათვალისწინებულ იქნა ლიპყინულებისა და ქარიშხლების ერთდროული მოქმედება, აგრეთვე სამთო რელიეფის თავისებურებანი.

ქარიშხალი საქართველოს მთიან რეგიონებში როგორც წესი 3-10 დღე-ღამე გრძელდება და ხასიათდება ქარის სიმძლავრის ცვალებადობის დიდი ამპლიტუდითა და იმპულსური ქმედებით. უნდა აღინიშნოს, რომ საყრდენების რხევები ასევე ხასიათდება დიდი ამპლიტუდებით, რასაც თან ახლავს კონსტრუქციების დაღლილობის მოვლენები. საყრდენების რხევათა დიდ ამპლიტუდებს ადგილი ჰქონდა როგორც ღუნვის, ასევე გრეხის დეფორმაციებისთვის.

მნიშვნელოვანი ღუნვითი რხევებისთვის, დალამბერის პრინციპის გამოყენების საფუძველზე ერთმალიანი საყრდენისთვის

$$my'' = -f(y) + p, \tag{123}$$

სადაც $f(y)$ აღმდგენი ძალაა; p – სტატიკური დატვირთვა; m – მასა; $f(y)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ (შეფერის მიხედვით) ტეილორის მწკრივის სახით:

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)\frac{y-y_0}{1!} + f''(y_0)\frac{(y-y_0)}{2!} + f'''(y_0)\frac{(y-y_0)^3}{3!}, \tag{124}$$

სადაც y_0 სტატიკური ჩაღუნვაა; y – ჩაღუნვა ნებისმიერ კვეთში. (124)-ში შესაძლებელია ჩაითვალოს, რომ $y - y_0 \approx y$, რის შედეგადაც

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)\cdot y + f''(y_0)\frac{y^2}{2!} + f'''(y_0)\frac{y^3}{3!}. \tag{125}$$

პრაქტიკა გვიჩვენებს, რომ შესაძლებელია პირველ სამ წევრს დავეყრდნოთ, მივიღებთ

$$m\cdot y'' + a^2 y + by^2 = 0. \tag{126}$$

სადაც

$$a^2 = f'(y_0);\quad b = f''(y_0) \text{ და } f(y_0) = p.$$

(125)-ის ამონახსნი წარმოვადგინოთ ფუნქციური მწკრივის სახით

$$y=\varphi_0(t)+\varphi_1(t)\cdot b+\varphi_2(t)b^2+\varphi_3 b^3 . \tag{127}$$

საწყისი პირობების გათვალისწინებით მიიღება

$$\varphi_0(t)=y_a\cdot\cos\omega t \tag{128}$$

სადაც $\omega=\sqrt{\dfrac{a^2}{m}}.$

გარდაქმნების შედეგად მივიღებთ არაწრფივი რხევების განტოლებას

$$y(t)=\left(1+0{,}667\cdot\frac{y_0}{a^2}\right)\left[-0.5\cdot\frac{y_0}{a^2}+y_0\cos\omega t+0{,}166\frac{y_0^2}{a^2}\cos 2\omega t+\right.$$
$$\left.+0.041\cdot\frac{y_0^3}{a^2}\cdot\cos 3\omega t\right]. \tag{129}$$

(129) რხევების ღუნვითი პარამეტრების გამოთვლის საშუალებას იძლევა. მსგავსი ანალოგიით შეიძლება დადგინდეს საყრდენის გრეხითი რხევების პარამეტრებიც:

$$\varphi(t)=\left(1+0{,}667\cdot\frac{\varphi_0}{a^2}\right)\left[-0.5\cdot\frac{\varphi_0^2}{a^2}+\varphi_0\cos\omega t+0{,}166\frac{\varphi_0^3}{a^2}\cos 2\omega t+\right.$$
$$\left.+0.041\cdot\frac{\varphi_0}{a^2}\cdot\cos 3\omega t\right], \tag{130}$$

სადაც $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{M}}$,

M – მგრეხი მომენტია და $M=m\cdot r^2$.

ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების რღვევის ალბათობის გამომჟღავნება აქტუალური საკითხია, რადგან მასზეა დამოკიდებული ელექტროგადამცემი ხაზების მუშაობის რესურსი.

პრაქტიკამ გვიჩვენა, რომ ამ ხაზების დაპროექტება არსებული ნორმების მიხედვით ვერ უზრუნველყოფს მის მუშაობას 10-15 წლის განმავლობაში; საყრდენების კონსტრუქციებში დაბალი სიხშირის ვიბრაციული დაღლილობის შედეგად ხდება დაზიანებათა დაგროვება, ამასთან, დაღლილობის გამომწვევი ფაქტორები ალბათობით ხასიათს ამჟავნებს.

აღმოჩნდა, რომ ელექტროგადამცემი ხაზების რღვევის მნიშვნელოვან რისკს წარმოადგენს გარსის და საყრდენების სარტყლების შემაერთებელი კვანძების დაღლილობა, რის შედეგადაც საყრდენების რხევების ღუნვა-გრეხითი ამპლიტუდები, ზღვრული ამპლიტუდების N რიცხვი (ციკლების რაოდენობა) σa და σm ციკლის პარამეტრებთან მიმართებაში განისაზღვრება გამოსახულებით

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma a + \varphi \sigma m} \right)^m ,$$

სადაც N_0 ციკლთა ბაზური სიდიდეა, როცა

$$\sigma_m \geq 0 \text{ და } \sigma_{\max} \leq \left[\sigma_{\text{დებ}} \right], \ \varphi = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}$$

φ – კოეფიციენტი განსაზღვრავს საშუალო ძაბვათა გავლენას ციკლთა ზღვრულ რაოდენობაზე რღვევამდე.

დაზიანებათა დაგროვების სიჩქარე კონსტრუქციაში შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს ორი ფუნქციის ნამრავლით, რომელთაგან ერთი დამოკიდებულია ძაბვების სიდიდესა და ნიშანზე, მეორე კი – დაზიანებათა სიდიდეზე:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = \frac{\partial v(\sigma)}{\partial n} \cdot \frac{\partial v(n)}{\partial n} = f_1(\sigma) \cdot f_2(n) ,$$

სადაც v დაზიანების პარამეტრია (ლოდეს პარამეტრი); $v = 0$, როცა ნაგებობა 100%-ის დაუზიანებელია და $v = 1$, როცა ნაგებობა მთლიანად დარღვეულია. შეიძლება ჩაიწეროს, რომ

$$\int_0^1 \frac{\partial (v)}{f_2(v)} = \int_0^n \frac{\partial n}{f_1(\sigma)} = \int_0^n \frac{dn}{N(\sigma)} ,$$

სადაც n ციკლთა რაოდენობაა სათანადო σ რხევებისათვის. თუ დატვირთვის რეჟიმი მრავალსაფეხურიანია, მაშინ

$$\sum_{i=1}^{K} \frac{ni}{Ni} = 1 = \int_0^1 dv = 1 ;$$

აქ $n\lambda$ ციკლთა რაოდენობაა σi ძაბვებისათვის; Ni-ზღვრულ ციკლთა რაოდენობა იგივე σi ძაბვებისათვის; K – დატვირთვის სერიათა რიცხვი. საშიში ძაბვების გაჩენის კრიტერიუმად ითვლება დაღლილობის ძაბვათა ინტენსიურობის $K_{\text{დ}}$ კოეფიციენტი:

$$K_{\text{დ}} = f\left(\lambda_{\text{შედ}}, n_{\text{მოქ}}\right) \cdot \sum_{i=1}^{K} \sigma i \frac{ni}{N} \cdot f_i \sqrt{\ell_{\text{ბზ}}},$$

სადაც f შენადური ნაკერის ფარდობითი სიგრძე ან მოქლონთა დიამეტრისა და რაოდენობის გავლენის ფუნქციაა; $\sum_{i=1}^{K} \sigma_i \frac{n_i}{N}$ –რღვევის პირობების ინტეგრალური ფორმა ციკლთა რაოდენობის მიხედვით i-ურ საფეხურზე; K-დატვირთვათა სერიების რაოდენობა, $l_{\text{ბზ}}$-ბზარების სიგრძე; f_i-ციკლთა ასიმეტრიის მაჩვენებელი i-ურ ციკლში.

საყრდენთა რღვევა ხასიათდება განვითარების სამი ზონით:

ა) ლატენტური რღვევის ზონა, სადაც კვლევის ზუსტი მეთოდები გამოავლენს პროცესის დასაწყისს.

ბ) რღვევის ზომიერი სიჩქარის ზონა თავს იჩენს რღვევის ხილული შედეგები: საჭიროა ეფექტური ზომების მიღება კონსტრუქციების რემონტისა და გაძლიერებისათვის.

გ) რღვევის სიჩქარის კატასტროფული სიდიდე. ეს ავარიული სიტუაციაა, რომლის აღკვეთა პრაქტიკულად შეუძლებელია.

ქარის ზემოქმედება აღიქმება, როგორც არასტაციონარული, შემთხვევითი ქმედება. ასეთ შემთხვევაში სტატიკურად რღვევადი და გეომეტრიულად კონფორმული საყრდენებისათვის სიმტკიცის პირობის შესრულების ალბათობა

$$H = \Pi_{i=1}^{c=m} \cdot H_i = \Pi_{i=1}^{i=m} P\left[\sigma_i \leq \sigma_*\right],$$

სადაც m-კვაზი დამოკიდებულ ელემენტთა (პანელთა) რაოდენობაა საყრდენის კონსტრუქციაში.

კონსტრუქციის მტყუნება სიმტკიცის თვალსაზრისით შესაძლებელია მოხდეს იმ შემთხვევაში, როდესაც დატვირთვის რეალური პროცესი იწვევს σ_*-გადამეტძაბვას. მტყუნებას შეიძლება ჰქონდეს ადგილი აგრეთვე დაზიანებათა დაგროვების საშიში აკუმულაციის დროს, როცა K_* ხდება კრიტიკულზე მეტი.

პოსტ-ფაქტუმ ავარიული მდგომარეობის შესწავლისას, რომელიც ქარის მოქმედებით არის გამოწვეული, მიზანშეწონილია მიახლოებითი, მაგრამ საკმაოდ სანდო მეთოდების გამოყენება საანგარიშო ძაბვების

განსაზღვრისათვის დაღლილობის აკუმულირებული შედეგების მხედველობაში მიღებით.

საშიში კვეთის (კვეთების) დადგენა ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენ ელემენტებში უნდა მოხდეს იმის გათვალისწინებით, რომ ასეთ შემთხვევაში ადგილი აქვს განივ ღუნვას (ნებისმიერი მიმართულებით) და გრეხას გრძივი ღერძის მიმართ. ამასთან, კუთხის საყრდენებში (კუთხის ელემენტებში) ღუნვა იწვევს გაჭიმვას ან კუმშვას. უნდა გავითვალისწინოთ ისიც, რომ გრეხის დიდი დეფორმაციების გამო ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების გრძივ ელემენტებში გვექნება ღუნვის დეფორმაციაც.

ყველა ამ შემთხვევაში გისოსის ელემენტები განიცდიან გრძივ გაჭიმვას ან კუმშვას.

ყოველივე ზემოაღნიშნულის გათვალისწინებით საანგარიშო ძაბვა

$$\sigma i = A \cdot \sigma_x + B\sigma_y + C\tau_{xy}$$

$$A = \frac{2-\lambda}{2} + \frac{2-\lambda}{2}\cos 2\alpha + \frac{\lambda - 1}{2},\ \sin 2\alpha;$$

$$B = \frac{2-\lambda}{2} - \frac{2-\lambda}{2}\cos 2\alpha - \frac{\lambda - 1}{2},\ \sin 2\alpha;$$

$$C = (\lambda - 1)\cos 2\alpha - (2-\lambda)\sin 2\alpha\,.$$

აქ λ კოეფიციენტია, რომელიც მასალის მგრძნობელობას ასახავს ნორმალური და მხები ძაბვების ზემოქმედებისას სიმეტრიულ ან მაპულსირებელ ციკლში $\lambda = \frac{\sigma - 1}{\tau - 1}$.

მაქსიმალური მხები ძაბვების ჰიპოთეზის გამოყენების შემთხვევაში

$$\tau_{-1} = 0{,}5\sigma_{-1} \text{ და } \lambda = 2\,.$$

მაქსიმალური ოქტაედრული ძაბვების ჰიპოთეზით

$$0{,}7\sigma_{-1} = \tau_{-1} \text{ და } \lambda = 1{,}43\,.$$

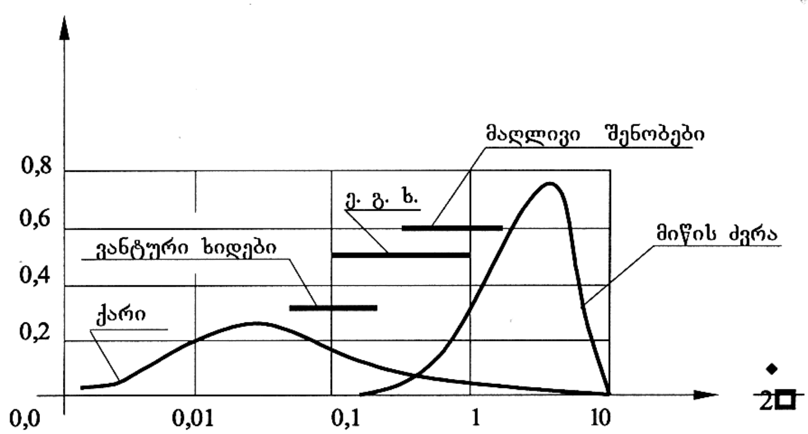
იდეალურად პლასტიკური მასალებისათვის λ=2; მყიფე მასალებისათვის λ = 1. ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენებისათვის λ = 1,43.

აუცილებელია მოვიყვანოთ ზოგიერთი მოსაზრება ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების გაანგარიშების თავისებურებათა შესახებ.

1. ქარის ზემოქმედების გავლენა, ნაგებობათა საკუთარ რხევებთან შედარებით, უფრო მცირეა, ვიდრე მიკრომეტეოროლოგიური პიკის სიდიდე ვანდერხოვენის მიხედვით.

2. მოქნილი სისტემის (ვანტური ხიდები, მაღლივი ნაგებობები, ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენები) საკუთარი რხევები ხვდება ქარის სპექტრის საგრძნობლად დიდი ორდინატების ზონაში.

1-ლ ნახაზზე ნაჩვენებია ზოგიერთ ნაგებობათა საკუთარი რხევების ინტერვალთა მიახლოებითი სიდიდეები.



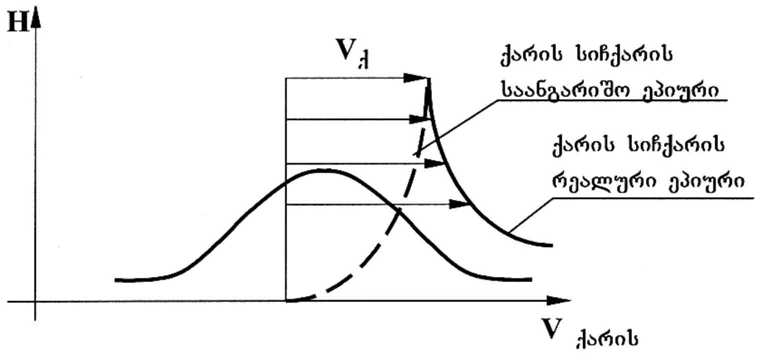
ნახ. 1. ნაგებობათა საკუთარი რხევების ინტერვალთა მიახლოებითი სიდიდეები

ვერტიკალურ ღერძზე გადაზომილია ფარდობითი სპექტრული სიხშირის სიმკვრივეები, ჰორიზონტალურზე-სიხშირეები. როგორც გრაფიკიდან ჩანს, ელექტროგადამცემი ხაზების საკუთარი რხევების სიხშირე იცვლება 0,1÷1 ჰერცის ფარგლებში, საკმაოდ მაღალი სპექტრული სიმკვრივისათვის – 0,4 და მეტი.

გაირკვა, რომ მთაგორიან რაიონებში ელექტროგადამცემი ხაზების დაპროექტებისას გათვალისწინებული არ არის ქარის სიჩქარის დიდი ცვალებადობა ბორცვების ზონაში. არადა, როგორც ეს ქვემოთ ნაჩვენები ნახაზიდან (ნახ. 2) ჩანს არ შეესაბამება საპროექტო მოცემულობას. ქარის სიჩქარე ბორცვების ზედა ზონაში დაახლოებით 50%-ით იზრდება.

წყვეტილებით ნაჩვენებია ქარის სიჩქარის ეპიურა, რომელიც საფუძვლად უდევს ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების

გაანგარიშებას დაპროექტების პროცესში, ხოლო უწყვეტი ხაზით ნაჩვენებია ქარის სიჩქარის რეალური ეპიურა.



ნახ. 2. ქარის სიჩქარის საანგარიშო და რეალური ეპიურები

ამ მოვლენის გაუთვალისწინებლობა ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენებისათვის, რომლებიც განლაგებულია ბორცვების უშუალო სიახლოვეს, იწვევს ქარის ჩქაროსნული დაწნევის საანგარიშო სიდიდის გაუმართლებელ შემცირებას, რაც ამ ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების ავარიების ერთ-ერთი მთავარი მიზეზია.

ქარის დატვირთვის ნორმატიული დინამიკური შემდგენი, რომელიც მიღებულია i-ურ უბანზე, როცა საყრდენი ირღვევა i-ური ფორმით, განისაზღვრება ფორმულით

$$Q_{R_{ij}}^{P} = M_j \eta_{ij} \cdot \xi_i \nu$$

სადაც $M_j = \dfrac{G_i}{g}$ i-ური უბნის მასაა,

$\eta_{ij} - i$-ურ უბანზე მოქმედი აჩქარება;

$\xi_i -$ დინამიკურობის კოეფიციენტია.

V –კოეფიციენტი, რომელიც განსაზღვრავს ქარის სიჩქარის პულსაციის სივრცით კორელაციას საყრდენის სიმაღლესთან დაკავშირებით. დინამიკურობის კოეფიციენტით მხედველობაში მიიღება ნაგებობების სიხშირის ამპლიტუდის ზრდა, როცა ნაგებობებზე მოქმედებს გარე ძალები, რომელთა სიხშირე ემთხვევა სისტემის საკუთარ სიხშირეებს რეზონანსულ რეჟიმში.

ξ-განსაზღვრისათვის ჩვენ მივიღეთ ემპირიული გამოსახულება

$$\xi = 3 + \ln\frac{\lambda 1{,}10}{265}.$$

ეს ფორმულა მიღებულია ექსპერიმენტული მრუდების დამუშავების (129) შედეგად ფოლადის კონსტრუქციებისათვის. ფორმულის სიზუსტე გარანტირებულია 5-7%-ის ფარგლებში. ξ-სიმბოლო გამოსახულებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\xi = 3 + \ln\frac{\left(4 \cdot Ti \cdot \sqrt{n \cdot q_0}\right)^{1.1}}{265}$$

სადაც q_0 ქარის ჩქაროსნული დაწნევაა უბანზე, ნიუტონის მიხედვით:

$$q_0 = \frac{\nu^2}{16}$$

$Ti - i$-ური ფორმის რხევათა პერიოდი; n – გადატვირთვის კოეფიციენტი.

ობიექტური მონაცემების საფუძველზე დამუშავდა პროგრამა. დადგენილია, რომ ელექტროგადამცემი ხაზების საყრდენების ავარიას ჰქონდა ადგილი ქარიშხლის შედეგად, როცა ქარის სიჩქარე აღემატებოდა 45 მ/წმ-ში. რღვევის მომენტისათვის ძაბვებმა საშიშ კვეთში გადააჭარბა ნორმატიულ მაჩვენებელს ფოლ 3 მარკისთვის.

2.3.6. ბზარების მქონე მყიფი სხეულების წონასწორობა

მყიფე მასალების რღვევის თეორიის აგება დაკავშირებულია დრეკად სხეულში გადაადგილებათა ველის წყვეტის ზედაპირის მიდამოში („ბზარებში“) დაძაბული მდგომარეობის შესწავლასთან. ყველაზე მარტივს წარმოადგენს ამოცანა ბრტყელი დაძაბული მდგომარეობის შესახებ წრფივი ჭრილის მქონე ფილაში, რომელიც დატვირთულია ძალებით, პერპენდიკულარულით ჭრილისადმი, რომლის ბოლოები საკმაოდ დაცილებულია ფილის კიდეებისაგან. წრფივ დასმაში კლასიკურ ამონახსნს, რომელიც მიიღება ზღვრული გადასვლით ელიფსური ნახვრეტის მიდამოში დაძაბული მდგომარეობის შესახებ ამოცანის ამონახსნიდან, მივყავართ უსასრულო ძაბვებამდე ბზარების ბოლოებში (არეს კუთხის წერტილებში, დამატებითი დაშვებების გარეშე ის არ იძლევა საშუალებებს ვიმსჯელოთ,

დატვირთვის პარამეტრის რა მნიშვნელობისას დაიწყებს ბზარი გავრცელებას – დაიწყება მყიფე რღვევის პროცესი.

მყიფე რღვევის თეორია მომდინარეობს ა. გრიფიტის ნაშრომებიდან (1920), რომლებიც გაგრძელდა ჯ. ირვინის (1948 და შემდ.) და გ. ოროვანის (1950 და შემდ.) მიერ. შედეგად მყიფე რღვევაზე მასალის სიმტკიცის მახასიათებლებისათვის შემოტანილი იქნა ახალი კონსტანტა, რომელიც იძლევა საშუალებას განვიხილოთ მყიფე ბზარების შესახებ ამოცანა დრეკადობის კლასიკური თეორიის დასმაში.

ბზარების ზრდის კინეტიკის საკითხები განიხილებოდა გ.ბარენბლატის, ვ.ენტოვის, რ. სალგანიკის (1966, 1967) და აგრეთვე გ. ბარენბლატის, რ.სალგანიკის, გ. ჩერეპანოვის (1962) მიერ. ლ. კაჩანოვს (1961) ეკუთვნის ცდა მიეცა შეფასება ბზარის მქონე ტანის ხანგამძლეობისათვის დრეკად-ბლანტ ტანში.

გ. ბარენბლატმა და გ. ჩერეპანოვმა (1960) განიხილეს ამოცანა, ორთოტროპული დრეკადი ტანის გაპობის შესახებ თხელი ხისტი სოლით, რომელიც გადაადგილდებოდა თანაბარი სიჩქარით. უსასრულო ტანის სასრულო სიგრძის სოლით გაპობის შესახებ ამოცანაში ი. მარზუკოვმა (1961) მიიღო ბზარის სიგრძის დამოკიდებულება სოლის სიგრძისაგან. ძვრის ბზარების გავრცელება განიხილეს გ. ბარენბლატმა და გ. ჩერეპანოვმა (1961). სიხისტის წიბოებით შემაგრებული ბზარების განვითარების მდგრადობის შესახებ ამოცანა განიხილებოდა ე. მოროზოვასა და ვ. პარტონას ნაშრომში (1961). ბზარების ორმაგპერიოდული სისტემის მდგრადი განვითარება ვ. პარტონამ (1965). გ. ჩერეპანოვმა (1966) შეისწავლა ბზარების განვითარება შეკუმშულ ტანებში.

ბზარის მოდელი, რომელშიც გაითვალისწინება ასევე შეჭიდულობის ძალები უბნებზე, რომლებიც თანაზომადია ბზარის სიგრძესთან, განიხილებოდა, ბზარის კიდეების მდორე დახურვისა და მათზე ძაბვების სასრულოობის პირობების გამოყენებით, მ. ლეონოვისა და ვ. პანასიუკის (1959) მიერ. მოცემულია ამონახსნები ბრტყელი ამოცანების დიდი რიცხვისა, სხეულის ზღვრული წონასწორობის შესახებ ბზარების სხვადასხვაგვარი განლაგებისა და ფორმისას, ბზარების მქონე სხეულის სხვადასხვაგვარი ხერხით დატვირთვისას

(ვ.პანასიუკი და დ. ბერეჟნიცკი, 1964-1966). ამავე კლასს მიეკუთვნება ბრტყელი ამოცანები, ნახვრეტის კონტურის კუთხის წერტილების მიდამოებში დაძაბული მდგომარეობის შესახებ (ვ. პანასიუკი და გ. ბუინი, 1966). კერძოდ რადიალური ბზარების მქონე წრის შესახებ (ვ.პანასიუკი, 1965).

უსასრულო მართკუთხა ამონაჭერის, რომლის ფსკერსაც აწვება ხისტი ტვიფარი, კუთხის წერტილებიდან ბზარების დაწყებითი განვითარება, შესწავლილია გ. ჩერეპანოვის (1963) მიერ.

ბზარის კიდის სიახლოვეს დაძაბული მდგომარეობის შესახებ ამოცანები, როცა ის გამოდის ფილის კიდეზე ან მასთან ახლოა, განიხილებოდა ვ.პანასიუკის (1960), გ. ბარენბლატის და გ. ჩერეპანოვის (1960, 1962) მიერ. ამოცანა გადატვირთვების (მღუნავი მომენტის, თანაბრადგანაწილებული წნევის) ზღვრული მნიშვნელობების შესახებ ზოლზე (კოჭზე), რომელსაც სწორხაზოვანი ბზარი აქვს ზოლის ღერძის მართობულად, განიხილებოდა ბ. ლოზოვოის და ვ. პანასიუკის (1961-1963) მიერ. გეგმაში წრის ფორმის მქონე ბრტყელი ბზარით ტანის ზღვრული წონასწორობის შესახებ სივრცითი ამოცანები განიხილეს მ. ლეონოვმა და ვ. პანასიუკმა (1961). ელიფსური ბზარის უფრო რთული შემთხვევა განიხილებოდა ვ. პანასიუკის (1962), მ. ლეონოვისა და კ. რუსინკოს (1963, 1964) მიერ.

2.3.7. მყიფე და პლასტიკური მასალების რღვევის პრობლემები

ისტორიულად ჩამოყალიბდა ინჟინრების შეხედულება მასალის სიმყიფესა და პლასტიკურობაზე იმის მიხედვით, თუ როგორ იქცევა ესა თუ ის მასალა ლაბორატორიული გამოცდის დროს მარტივი გაჭიმვის შემთხვევაში. ასე მაგალითად, თუჯი ითვლება მყიფედ იმის გამო, რომ მისგან დამზადებული ნიმუში გაჭიმვის შედეგად ირღვევა მცირე დეფორმაციის პირობებშიც კი, ამასთან ბზარები ზედაპირზე ლაგდება გრძივი ღერძის მართობული მიმართულებით. ამ მოვლენას შემდეგი ახსნა აქვს: თუჯის შემადგენლობაში შედის თავისუფალი გრაფიტი, რის შედეგადაც თუჯი ემსგავსება მყიფე არალითონური ბუნების მქონე მასალას. თუ ამავე წესით გამოვცდით რბილი ფოლადისაგან

დამზადებულ ნიმუშს, დავინახავთ, რომ მის ზრდაპირზე ბზარები საკმარისად მნიშვნელოვანი სიდიდის დეფორმაციების ფონზე ვითარდება და ამბობენ, რომ იგი პლასტიკური მასალაა. ამასთანავე, თუ იმავე რბილი ფოლადისაგან დამზადებულ ნიმუშს ძალზე სწრაფად დავტვირთავთ, ის მყიფე მასალისათვის დამახასიათებელ თვისებებს გამოავლენს. გაჭიმვაზე რბილი ფოლადის გამოცდის პროცესის დროს, იმ მომენტში, როცა დატვირთვა მიაღწევს ამ ნიმუშისათვის მაქსიმალურ სიდიდეს, ნიმუშის ზედაპირზე გარკვეულ კვეთში წარმოიქმნება შევიწროვება (ე. წ. ყელი). ამ მომენტიდან ღერო გადადის სამღერძა დაბზარულ მდგომარეობაში და ბზარების გაჩენამდე დეფორმაცია მიმდინარეობს თანდათან ცვლადი, რთული სამღერძა დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის პირობებში.

პ. ბრიდჟმენმა (1944), დავიდენკოვმა და ნ. სპირიდონოვამ (1946) აჩვენეს, რომ სამღერძა ძაბვების მაქსიმუმი მიიღწევა გრძივ ღერძზე, მინიმუმი კი – გვერდითი ზედაპირის სიახლოვეში. ბზარი ჯერ გაჩნდება ნიმუშის გრძივ ღერძთან და მისი პერპენდიკულარული იქნება. მიკროსკოპული დაკვირვებები ცხადყოფს, რომ რღვევა მოხდება მოწყვეტით. გვერდითი ზედაპირის სიახლოვეს ბზარის ფორმა იცვლება, ის უკვე ძვრის შედეგად ვითარდება.

უნდა აღინიშნოს, რომ მოწყვეტით რღვევა საკმაოდ დიდი პლასტიკური დეფორმაციების წარმოშობის შემდეგ ხდება. ამრიგად ოთახის ტემპერატურის პირობებში ჩატარებული ცდის შედეგად თანდათანობითი ზრდადი დატვირთვის პირობებში ნიმუშის რღვევა ხდება მოწყვეტისა და ძვრის შედეგად.

ტემპერატურის შემცირების შედეგად იზრდება იმის ალბათობა, რომ ნიმუშის რღვევა მოხდება მოწყვეტით. დ.პარკერი, ჰ.დევისი და ა.ფლანიგანი (1946) მივიდნენ დასკვნამდე, რომ საკმარისად დაბალი ტემპერატურის დროს „ფიალისებური“ ბზარები, რბილი ფოლადისაგან დამზადებულ ნიმუშში გარდაიქმნენ მოწყვეტის ბზარებად, რომლებიც ოთახის ტემპერატურის პირობისათვის თუჯის ნიმუშის ზედაპირზე წარმოქმნილი ბზარების მსგავსია.

მნიშვნელოვანი კვლევები ტემპერატურის გავლენის შესახებ ბზარების ფორმაზე ჩატარებულ იქნა მეორე მსოფლიო ომის პერიოდში,

რადგან ხშირი იყო შედუღებული ლითონის კონსტრუქციების ნგრევის შემთხვევები.

ერთი და იგივე რეჟიმის ცდის პროცესში, ერთი და იგივე მეთოდის გამოყენების დროს შემჩნეული იქნა, რომ არსებობს ე.წ. კრიტიკული ტემპერატურა, რომლის ზევით მეტალი პლასტიკურია, ხოლო ამ ტემპერატურის ქვემოთ იქცევა ისე, როგორც მყიფე მასალა. ეს დაბალტემპერატურული სიმყიფე შენიშნა ს.ტიპპერმა 1957 წელს. ის ცდებს ძირითადად რბილ ფოლადზე აწარმოებდა, თუმცა ანალოგია შეინიშნა სხვა ლითონებშიც (მოლიბდენი, ქრომი, ტყვია). ამავე დროს შემჩნეულ იქნა, რომ ისეთი ლითონებისთვის, როგორებიცაა ალუმინი, სპილენძი, ნიკელი, ოქრო, ვერცხლი, პლატინა და მათი შენადნობები კრიტიკული ტემპერატურა არ არსებობს. ისინი ინარჩუნებდნენ პლასტიკურ თვისებებს ნებისმიერ ტემპერატურაზე.

ასევე ცნობილი გახდა, რომ ჰიდროსტატიკური წნევა მნიშვნელოვნად მოქმედებს ლითონების ფიზიკურ თვისებებზე. ამ მიმართულებით ჩატარებული კვლევებიდან უნდა აღინიშნოს შემდეგი:

თ.კარმანმა 1911 წელს ჰიდროსტატიკური წნევის ქვეშ შეკუმშა კირქვა და მარმარილო და აჩვენა, რომ ნორმალურ პირობებში ეს მყიფე მასალები მაღალი ჰიდროსტატიკური წნევის ზემოქმედებით პლასტიკურ თვისებებს ამჟღავნებენ.

რ.ბოკერმა 1914 წელს ჰიდროსტატიკური წნევის ქვეშ გამოიკვლია მარმარილოსა და ცინკის მასალებისაგან დამზადებული ნიმუშები, რომლებიც გარდა ზემოთხსენებული ჰიდროსტატიკური წნევისა, იმავდროულად განიცდიდნენ გაჭიმვისა და გრეხის დეფორმაციებს. იმ მიზნით, რომ წყალი არ მოხვედრილიყო ზედაპირზე გაჩენილ ბზარებში, ნიმუშები სპეციალურ ფოლგებში იყო შეხვეული. ცდებმა აჩვენა, რომ წნევის გაზრდა იწვევდა პლასტიკურობის ზრდას.

პ.ბრიდჟმენმა (1947 – 1952) ჩაატარა მრავალი ექსპერიმენტი ლითონური და არალითონური მასალებისგან დამზადებულ ნიმუშების გაჭიმვაზე ძალზე მაღალი წნევის პირობებში (25 000 ატმ.). ამ ცდების შედეგად მან გააკეთა დასკვნა, რომ ზოგიერთი მასალა კუმშვადი იყო, თუმცა დატვირთვის მოხსნის შედეგად თითქმის აღიდგენდა პირვანდელ ფორმას. მანვე რბილი ფოლადისაგან დამზადებული ნიმუშების

გამოცდისას აღმოაჩინა, რომ ჰიდროსტატიკური წნევის ზრდისას რღვევის ხასიათი იცვლებოდა.

ამ თემას პ.ბრიდჟმენმა 200-მდე სტატია მიუძღვნა, სადაც აღნიშნა, რომ ნიმუშების რღვევისათვის საჭირო ზომების ბზარების წარმოქმნას ხელს უშლის მაღალი ჰიდროსტატიკური წნევა, რომელიც შეიძლება ითქვას ხურავს ბზარებს და აფერხებს მათ განვითარებას.

საჭიროა აღინიშნოს, რომ ბევრი მასალა წნევის მოხსნის შემდეგ უბრუნდება საწყის მდგომარეობას, მაგრამ არა ყოველთვის.

ზოგჯერ მათში ალოტროპული გარდაქმნები ხორციელდება. მრავალი ქიმიური პროცესების მიმდინარეობას მაღალი წნევების არსებობა უწყობს ხელს. ამ საკითხით დაინტერესებული არიან გეოლოგები და გეოფიზიკოსებიც. რ.ბრედხაუერმა (1956) შეისწავლა მთის ქანების ქცევა საშუალო სიდიდის ჰიდროსტატიკური წნევის მოქმედების დროს (0 – 15 000 ფუნტი/დუიმ^2) ღერძულ კუმშვაზე, როცა ხდებოდა მყიფე მდგომარეობიდან პლასტიკურზე გადასვლა. ეს გამოკვლევები საჭირო იყო ნავთობმომპოვებელი მრეწველობისათვის, რადგან ღრმა ჭაბურღილების ბურღვის დროს ადგილი აქვს სწორედ ამ ნაშრომებში განხილულ მოვლენებს.

ზემოთ ნახსენები პ. ბრიდჟმენის მონაცემები თანხმობაში აღმოჩნდა მ.როსი და ა.ეიხინგერის (1929) მიერ ჩატარებულ გამოკვლევებთან, რომლებიც თუჯის ნიმუშებზე იქნა განხორციელებული. ანალოგიური ექსპერიმენტული შედეგები მიიღეს გ.ჰუკმა (1934) სპილენძისა და ფოლადის ნიმუშების გრეხისას და ბ.კროსლანდმა (1954) ასევე გრეხითი დეფორმაციების შესწავლით, რომელიც სპილენძისა და ფოლადის ნიმუშების გარდა, სხვა მასალების ნიმუშებსაც იყენებდა.

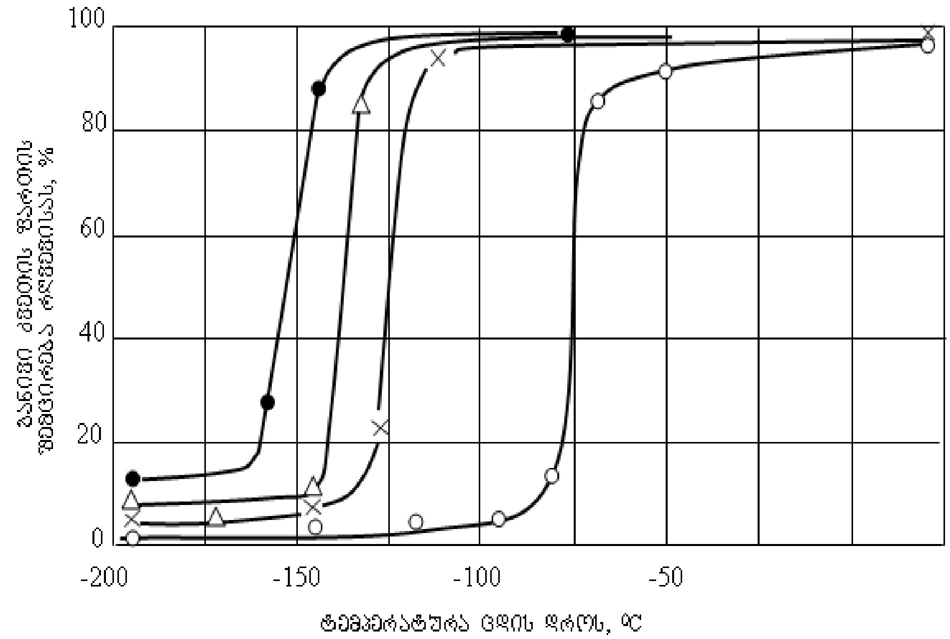
ამ გამოკვლევებმა დაადასტურა, რომ პლასტიკურ მასალებში წნევა მცირე გავლენას ახდენს დენადობის ზღვრის სიდიდეზე და ძაბვაზე. ნაცრისფერი თუჯისაგან დამზადებული ნიმუშის გრეხაზე გამოცდისას, რომელიც რეზინით იყო დაფარული და განიცდიდა მაღალი ჰიდროსტატიკური წნევის ზემოქმედებას ბ.კროსლანდმა და ვ.დირდენმა (1958) დაასკვნეს, რომ „მხები ძაბვები – დეფორმაციების“ დიაგრამა გადის იმ დიაგრამაზე მაღლა, რომელიც მიიღება ჩვეულებრივი გამოცდების დროს, თუმცა მხები ძაბვები წნევის მკაცრად

პროპორციულად არ იზრდება. მაღალი წნევის დროს მასალა იდეალურად პლასტიკურ მდგომარეობას უახლოვდება.

ბ.კროსლანდმა და ა.მიტრამ (1968) დაადგინეს, რომ ზოგიერთი სახის ფოლადისათვის გრეხის დროს, დენადობის ძაბვა, რომელიც ძაბვა-დეფორმაციის მრუდიდან განისაზღვრება, უმნიშვნელოდ იცვლება თუ, იმავდროულად ნიმუშზე მოქმედებს ჰიდროსტატიკური წნევა 140 000 ფუნტი/დუიმ^2. მათ დაადასტურეს, რომ გრეხის დროს წნევა ძირითადად გავლენას ახდენს მასალის პლასტიკურ თვისებებზე. პლასტიკურობა იზრდება დაახლოებით წნევის ზრდის პროპორციულად. მაღალი წნევის ზემოქმედების დროს ჰექსაგონალური კრისტალური მესერის მქონე ლითონებზე (მაგ. მაგნიუმი) გრეხის დეფორმაციების შემთხვევაში მათ ზოგიერთი არაჩვეულებრივი მოვლენაც შენიშნეს, რაც გამოყენებული იქნა ისეთი პროცესების სამართავად, რომელთა წარმოება ოთახის ტემპერატურის პირობებში შეუძლებელია. მაგალითად, თუ დაწნეხას ვაწარმოებთ არა ჰაერში, არამედ მაღალი წნევის გარემოში, მაგნიუმისა და ვისმუტისაგან დამზადებული ნაკეთობები ბზარებს არ მიიღებენ. ჰიდროსტატიკური წნევა, როგორც ზემოთაც ითქვა ეწინააღმდეგება ბზარების გაჩენასა და განვითარებას. ანალოგიური ამოცანები განიხილეს ჯ. ალექსანდერმა და ბ. ლენგუელმა (1964) ალუმინის ნიმუშებზე.

ჰიდროსტატიკური წნევის სამრეწველო გამოყენება ლითონების დეფორმირებისათვის განხილული იქნა 1967 წელს კონფერენციაზე, რომელიც მაღალი წნევების ტექნიკურ გამოყენებას მიეძღვნა. აგრეთვე საერთაშორისო კონფერენციაზე მანქანათმშენებლობის ტექნოლოგიების სფეროში, რომელიც იმავე 1967 წელს გაიმართა. ყოველივე ამის შედეგად შეიძლება ითქვას, რომ დღეისათვის პლასტიკური დენადობის პირობები კარგად არის შესწავლილი, რასაც ვერ ვიტყვით რღვევის პროცესთან დაკავშირებით. ჩვენ შეგვიძლია მხოლოდ აღვწეროთ ის ფაქტორები, რომლებიც ეწინააღმდეგებიან ბზარების წარმოშობას და ხელს უწყობენ დენადობის პროცესს.

მიღებულია მოსაზრება, რომ რღვევა ხდება მთავარი გამჭიმავი ძაბვების ან დეფორმაციების მოქმედების შედეგად, ხოლო დენადობა გამოწვეულია მთავარი ძაბვების სხვაობის გავლენით.



ნახ. 3. ტემპერატურისა და დეფორმაციის სიჩქარის გავლენის
გრაფიკული ასახვა ტყვიის მასალისაგან დამზადებული
ნიმუშის პლასტიკურობაზე გაჭიმვისას

ნახაზზე ნაჩვენებია ტემპერატურისა და დეფორმაციის სიჩქარის გავლენა ტყვიის მასალისგან დამზადებული ნიმუშის პლასტიკურობაზე მისი გაჭიმვის შემთხვევაში (მონაცემები აღებულია ა.მაგნუსონისა და ვ.ბალდვინის მიხედვით).

პ. ლუდვიგმა (1909) შემოიღო ნახევრად ლოგარითმული დამოკიდებულება გაჭიმვის დროს სიმტკიცის ზღვარსა და დეფორმაციის სიჩქარეს შორის

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_o \ell n \varepsilon * / \varepsilon_o^*$$

სადაც -σ_o, σ_1 და ε_o^* - მუდმივებია.

ეს განტოლება ზოგად შემთხვევაში გულისხმობს, რომ σ ისე სწრაფად არ იზრდება, როგორც ε^*.

ჯ.ალდერმა და კ.ფილიპსმა (1954) ჩაატარეს ექსპერიმენტები სპილენძზე (600°C), ალუმინზე (500°C), ფოლადზე (930°C - 1200°C) და აჩვენეს, რომ ადგილი აქვს შემდეგ დამოკიდებულებას

$$\sigma = \sigma_o . \varepsilon^{*n}$$

სადაც $\sigma_o = \dfrac{P}{X_o}$; P მიმდინარე დატვირთვის სიდიდეა; X_o - ნიმუშის საწყისი განივი კვეთის ფართობი; n- ემპირიული მუდმივა.

ქ. მაკგრეგორმა და ჯ. ფიშერმა (1946) შემოიტანეს შესწორება

$$T_m = T(1 - m\ell n\varepsilon^* / \varepsilon_o^*),$$

სადაც $T_m = \dfrac{\text{ცდის ტემპერატურა}}{\text{დნობის ტემპერატურა}}$ არის ფარდობითი ტემპერატურა;

T- ცდის ტემპერატურა (ტემპერატურა ცდის პროცესში); ε^* - დეფორმაციის სიჩქარე; σ_o- პირობითი ნორმალური ძაბვა.

ამ გამოსახულებიდან ჩანს, რომ დეფორმაციის სიჩქარე იზრდება ტემპერატურის დაწევასთან ერთად.

კ. ინუიემ (1955) გამოიყენა გამოსახულება

$\sigma = \sigma_o \varepsilon^n . \varepsilon^m \exp(A/Tk)$, სადაც n, m, A და k ემპირიული მუდმივებია.

ლ. მალვერმა (1965) წარმოადგინა განტოლება

$$\varepsilon^* = \sigma / E + F[\sigma - \sigma(e)],\ \text{როცა}\ \sigma > \sigma(e).$$

მან იგივე განტოლება სხვა ფორმითაც მოგვაწოდა

$$\varepsilon^* = \frac{\sigma}{E} + D(\frac{\sigma}{\sigma_o} - 1)^p.$$

ამ განტოლებებში D, F და p ემპირიული მუდმივებია, ხოლო σ_o სტატიკური დენადობის ზღვარი.

2.3-ის დასკვნები

თხელკედლიანი სივრცითი სისტემებისათვის დამუშავებული გამარტივებული ვარიანტები საშუალებას იძლევიან ეს განტოლებები მიყვანილ იქნან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა მიმდევრობაზე, რომელთა ცვლადი კოეფიციენტები შეიცავენ გადაადგილებას ვექტორის მიმართ რეგულარული და იმპულსური ფუნქციების სახით და შერეული ფორმით.

თხელკედლიანი სივრცითი კომპლექსების გაანგარიშების მეთოდები გეომეტრიული და ფიზიკური არაწრფივების გათვალისწინებით საშუალებას იძლევიან შეფასებულ იქნას დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის ყველა კომპონენტის ცვლილება, კრიტიკული დატვირთვის სიდიდეები და დატვირთვის პროცესში მდგრადობის დაკარგვის ფორმა. ამასთან ეს მეთოდი უფრო ეფექტურია სხვა სივრცით ან რიცხვით-ანალიზურ მეთოდებთან შედარებით.

3. დასკვნა

ჩატარებულ გამოკვლევათა ისტორიული მიმოხილვისა და ანალიზის საფუძველზე შეიძლება გავაკეთოთ შემდეგი დასკვნები:

– სამეცნიერო ლიტერატურაში პრაქტიკულად არ არის განხილული თხელკედლიანი სივრცითი სისტემების გაანგარიშების მეთოდების ისტორიული ანალიზი;

– ზოგიერთი შრომების გამოკლებით, განზოგადოებული იმპულსური ფუნქციები გამოიყენებიან მხოლოდ დიფერენციალური განტოლებების ჩაწერისათვის, მაგრამ არა მათი ამოხსნების მისაღებად. ამავე დროს წყვეტილი ფუნქციის შემოღება იძლევა გაანგარიშების ისეთი პრინციპულად ახალი მეთოდების მიღების საშუალებას, რომლებიც აფართოებენ ამოხსნადი ამოცანების კლასს და ანზოგადებენ ყველა ამოხსნად ამოცანებს ერთიან მეთოდოლოგიურ საფუძველზე. დრეკადობის წრფივი თეორიის ისტორიის საფუძველზე დღეისათვის კიდევ უფრო მეტი ისტორიული მასალის გადმოცემა და მისი ანალიზია გასაკეთებელი;

– სენ-ვენანისა და ალმანზის ამოცანებში პრიზმული ღეროს თავისუფალი გრეხის ამოცანა დაიყვანება ჰარმონიულ პრობლემაზე, რომლის ამონახსნთა მეთოდები კარგადაა დამუშავებული და გაანალიზებული;

– დრეკადი პრიზმული ძელების დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის დადგენა, როდესაც ძელის ბოლოებზე მოქმედებს ნებისმიერი ძალთა სისტემა, ასევე წარმოადგენს დრეკადობის თეორიის ერთ-ერთ ძირითად და რთულ მათემატიკურ ამოცანას. მათემატიკური თვალსაზრისით იგი არ არის ბოლომდე გადაწყვეტილი, თუმცა ე.წ. „სენ-ვენანის პრინციპის“ დახმარებით ხერხდება ამ ამოცანის გადაწყვეტა, რომელიც მიახლოებითია და არ შეიძლება ჩაითვალოს ზუსტად. სწორედ, ამგვარ კლასიკურ მიდგომადაა ცნობილი სენ-ვენანის მოსაზრება, რომელიც ლიტერატურაში დამკვიდრდა „სენ-ვენანის პრინციპის“, კერძოდ კი სენ-ვენანის ნახევრად შებრუნებული მეთოდის საშუალებით.

დასკვნის სახით ხაზგასმულია, რომ მუსხელიშვილის გამოკვლევები პრობლემების ფართო კლასს მოიცავს, აღნიშნულმა შრომებმა დიდი გავლენა მოახდინეს მექანიკისა და მათემატიკის რიგი მიმართულებების შემდგომ განვითარებაზე.

ნ. მუსხელიშვილის მეთოდებმა დრეკადობის ბრტყელ თეორიაში გამოყენება და შემდგომი განვითარება ჰპოვეს ს.მიხლინის, დ.შერმანის, გ.სავინის, დ.ვაინბერგისა და სხვა ნაშრომებში ამ მეთოდების საშუალებით ამოხსნილია მრავალი ამოცანა, რომლებმაც ფართო გამოყენება ჰპოვეს ტექნიკაში. ლ.გალინის, ა.კალანდიას, ი.ქარცივაძის, ი.შტაერმანის, რ.ბანცურის და სხვა ნაშრომებში ნ.მუსხელიშვილის შედეგებმა შემდგომი გამოყენება და განვითარება ჰპოვა საკონტაქტო პროცესის თეორიაში.

გამოკვლევები ძელების გრეხისა და ღუნვის ამოცანებში სხვადასხვა მიმართულებით გაგრძელებულ იქნა ა. გორგიძის, ა. რუხაძის და სხვათა მიერ.

თხელკედლიანი სივრცითი სისტემებისათვის დამუშავებული გამარტივებული ვარიანტები საშუალებას იძლევიან ეს განტოლებები მიყვანილ იქნან წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა მიმდევრობაზე, რომელთა ცვლადი კოეფიციენტები შეიცავენ გადაადგილებას ვექტორის მიმართ რეგულარული და იმპულსური ფუნქციების სახით და შერეული ფორმით.

თხელკედლიანი სივრცითი კომპლექსების გაანგარიშების მეთოდები გეომეტრიული და ფიზიკური არაწრფივობის გათვალისწინებით საშუალებას იძლევიან შეფასებულ იქნას დაძაბულ-დეფორმირებული მდგომარეობის ყველა კომპონენტის ცვლილება, კრიტიკული დატვირთვის სიდიდეები და დატვირთვის პროცესში მდგრადობის დაკარგვის ფორმა. ამასთან ეს მეთოდი უფრო ეფექტურია სხვა სივრცით ან რიცხვით-ანალიზურ მეთოდებთან შედარებით.

გამოყენებული ლიტერატურა

1 . Папкович П.Ф. – Теория упругости. Л-М „Оборонгиз“. 1937, 1939

2. Крутков Ю. А. – Тензор функции напряжения и общие решения в статике теории упругости. М. АН СССР. 1949.

3. Галеркин Б.Г. – Собрание сочинений в 2-х томах. М. АН СССР. 1952-1953.

4. Нейбер Г. – Концентрация напряжений. М-Л. „Гостехиздат“. 1947.

5. Аржаных И.С. – Интегральные уравнения основных задач теории поля и теории упругости. Ташкент. АН Уз.ССР. 1954.

6. Слободянский М.Г. – Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. М. МГУ. 1954.

7. Лурье А.И. – Пространственные задачи теории упругости. М. „Наука“. 1955.

8. Блох В.И. – Теория упругости. Харьков. Харьк. университет. 1958.

9. Ляв О. – Математическая теория упругости. Перевод с английского. М-Л. ОНТИ. 1935.

10. Гутман С.Г. – К решению задач теории упругости с помощью сферических функций. М. „Наука“. 1948.

11. Купрадзе В.Д., Гегелия Т.Г., Башалейшвили М.О., Бурчуладзе Г.В. – Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М. „Физматиздат“. 1968.

12. Михлин С.Г. – Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М. „Физматгиз“. 1962.

13. Купрадзе В.Д. – Методы потенциала в теории упругости. М. „Физматиздат“. 1963.

14. Лейбензон Л.С. – Собрание трудов. М. Изд. АН СССР. 1951.

15. Михлин С.Г. – Численная реализация вариационных методов. М. „Наука“. 1966.

16. Ростовцев Н.А. – К задаче о кручении упругого полупространства. М. „Прикладная математика и механика“. 1955.

17. Грилицкий В.В. – Кручение двухслойной упругой среды. Киев. „Прикладна механика“. VII . 1961.

18. Виноградов А.И. – К лекциям по устойчивости прямолинейных стержней. Харьков. Инст.ж. д. тр. 1952.

19. Агарев В.А. – Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. Киев. АН УССР. 1963.

20. Прокопов В.К. – Осесиметриальная задача теории упругости избранного цилиндра. М. „Наука“.1950.

21. Соляник-Красса К.В. – Введение в механику деформируемого твердого тела. Л. Ленуниверситет. 1960.

22. Тренин С.И. – Построение метода решения ряда осесимметричных задач теории упругости. М. Вестник МГУ. 1952.

23. Детинко Ф.М. – Прочность и колебания Эл. машин. Л. „Энергия“. 1953.

24. Космодамианский А. С. – Некоторые задачи теории упругости и концентрации напряжений. Киев. „Наукова думка“. 1962.

25. Уздалев А. И. – Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Саратов. Саратуниверситет. 1962.

26. Александров А.Я., Соловьев Ю.И. – Пространственные задачи теории упругости. М. „Наука“. 1962.

27. Соляник-Красса К.В. – Осесиметричная задача теории упругости. М. „Стройиздат“. 1962.

28. Динник А.Н. – Избранные труды. Киев. АН УССР. 1952, 1955, 1956.

29. Кауфман Р.Н. – Решение некоторых краевых задач математической физики для слоя с шаровыми полостями. Минск. БГУ. 1958.

30. Александров А.Я. – Пространственные задачи теории упругости. М. „Наука“. 1962.

31. Шапиро С.Г. – Упругое равновесие параболида вращения. М. „Прикладная математика и механика“. 1950.

32. Форсман Н.А. – О концентрации напряжений в растянутом стержне круглого сечения. М. АН СССР. 1958.

33. Ворович И.И. – Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек. М. „Наука“. 1966.

34. Гавра Д.Л. – Некоторые случаи кручения призм с криволинейными контурами. Л. Лениндустр. инст. 1939.

35. Скоробогатько А.А. – О кручении цилиндрических валов с круговыми выточками. М. АН СССР. 1958.

36. Угодчиков А.Г. – Кручение полных призматических стержней. М. Прикладная механика. 1956.

37. Шерман Д.И. – Об одной задаче кручения. Доклады АН СССР №5. 1948.

38. Шерман Д.И. – К вопросу о кручении эллиптического бруса, продольно ослабленного эллиптической же полостью. М. Инж. сборник 25. 1959.

39. Степанов Р.Д., Шерман Д.И. – Кручение круглого бруса, ослабленного двумя цилиндрическими круговыми полостями. М. Инж. сборник 11. 1952.

40. Амензаде Ю.А. – Кручение и изгиб призматических брусьев с сечениями, представляющими собой двусвязные области некоторого вида. Тб. АН ГССР. 1958.

41. Капанян Л.К. – О кручении некоторых полых призматических стержней. Ереван. Изв. АН Арм. ССР. 1952.

42. Уфлянд Я.С. – Биполярные координаты в теории упругости. М-Л. „Гостехиздат“. 1950.

43. Леонов М.Я. – К теории чистого кручения. ВМПМ. 1960.

44. Китовер К.А. – Новая форма решения задачи о кручении стержня. Л. Ленполитех. инст. 1954.

45. Панов Д.Ю. – О кручении стержней, поперечное сечение которых ограничено двумя коническими сечениями. М. Труды ЦАГИ. 1936.

46. Слободянский М.Г. – Способ приближенного интегрирования уравнений с частными производными и его применение к задачам теории упругости. ПММ. 1939.

47. Слободянский М.Г. – пространственные задачи теории упругости для призматических тел. М. МГУ. 1940.

48. Слободянский М.Г. – Определение производных искомых функций при решении задач методом конечных разностей. ПММ XV. 1951.

49. Пивоваров А.М. – Концентрация касательных напряжений при кручении призматических стержней. М. Прикладная математика и механика. 1953.

50. Ветчинкин В.П. – Избранные труды. М. Изв. АН СССР. 1956.

51. Лейбензон Л.С. – Собрание трудов. М. АН СССР. 1951.

52. Канторович Л.В. – Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двоиного интеграла. М. Изв. АН СССР. 1933.

53. Чепова Т.К. – Приближенное решение задачи кручения некоторых призматических стержней. ПММ 1. 1937.

54. Лурье А.И. – Труды Ленинградского индустриального института. №3. 1939.

55. Гулканян Н.О. – О кручении призматических стержней с прямоугольным сечением при наличии продольных трещин. Ереван. Изв. АН Арм. ССР. 1953.

56. Галин Л.А. – Упругопластические задачи. М. „Гостехиздат “. 1939.

57. Бондаренко Б.А. – Задачи кручения стержней. М. Инст. механики. 1956.

58. Галимханов К.Г. – Новый метод расчета лысочных валов на кручение. Уфа. Авиац. инст. 1955.

59. Амен-заде Ю.А., Саркисов Г.М. – Приближенное исследование кручения трубы. Баку. Труды Азер. гос. пед. инст. 1952

60. Геонджян Г.П. – К теории стесненного кручения сплошных призматических стержней. Ер. АН Арм. ССР. 1959.

61. Авазашвили Д.З. – О применении теории функций комплексного переменного к задачам кручения и изгиба. М. ПМН. 1940.

62. Шерман Д.И. – Изгиб поперечной силой эллиптического бруса, ослабленного продольно-круговой цилиндрической полостью. М. Инст. механики АН СССР. 1953.

63. Амензаде Ю.А. – Местные напряжения при кручении круглого призматического бруса с эллиптическим несоосным отверстием. ДАН СССР 119, №6. 1958.

64. Арутюнян Н.Х. – Решение задачи о кручении стержней полигонального поперечного сечения. ДАН Арм. ССР 9, №2. 1958.

65. Арутюнян Н.Х., Абрамян Б.Л. – Кручение упругих тел. М. Изд. Физматлит. 1963.

66. Гулканян Н.О. – О кручении призматических стержней прямоугольного сечения с несимметричным прямоугольным вырезом. Ер. АН Арм. ССР. 1957.

67. Векуа И.Н., Рухадзе А. К. – Задача кручения кругового цилиндра, армированного продольным круговым стержнем. М. Изв. АН. СССР №3. 1933.

68. Рухадзе А.К. – Кручение и изгиб бруса, составленного из двух упругих материалов, разграниченных эпитрохоидой. Тб. ТГУ. 1935.

69. Кутателадзе Г.А. – Кручение и изгиб поперечной силой цилиндрического бруса, составленного из различных упругих материалов, поперечное сечение которого разграничено гипотрохоидами. Тб. Труды ГПИ. 1956.

70. Чобанян К.С. – Кручение составного вала переменного диаметра. ДАН АР. ССР №3. 1958.

71. Сухаревский И.В. – К задаче о кручении составного многосвязного бруса. М. Инст. механики АН СССР. 1954.

72. Лехницкий С.Г. – Теория упругости анизотропного тела. М. Гостехиздат. 1950.

73. Арутюнян Н.Х. – Приближенное решение некоторых задач о кручении анизотропных стержней. Сообщ. Инст. матем. и мех. АН Арм. ССР. 1948.

74. Минасян Р.С. – О кручении и изгибе анизотропных призматических стержней с поперечным сечением в виде параллелограма. Ер. АН Арм. ССР. 1958.

75. Галфаян П.О., Чобанян К.С. – Кручение полого прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Ер. АН Арм. ССР. 1959.

76. Новожилов В.В. – Теория упругости. М. „Наука“. 1957.

77. Соляник-Красса К.В. – Кручение валов переменного сечения. М. Физматиздат. 1949.

78. Положий Г.Н. – Вариационные теоремы краевых задач теории кручения валов переменного сечения. М. „Наука“. 1957.

79. Зволинский Н.В., Риз Л.П. – Кручение цилиндрического стержня силами, распределенными по его боковой поверхности. М. Изв. АН СССР. 1939.

80. Костандян Б.А. – О кручении полого ступенчатого вала. Ер. Изв.АН Арм. ССР. №3. 1956.

81. Горгидзе А.Я. – Некоторые обобщения задач кручения и изгиба составных брусьев. Тб. Мецниереба. 1955.

82. Мецугов В.Х. – К задаче кручения растянутого призматического бруса, составленного из различных упругих материалов. Тб. Труды ГПИ. 1954.

83. Джанелидзе Г.Ю. – Принцип Сен-Венана. Труды ЛПИ им. Калинина. №192. 1958.

84. Хатиашвили Г.М. – Об изгибе моментами и растяжения силой составных брусьев с прямолинейной анизотропией. Тб. Сообщения АН ГССР. 1965.

85. Хатиашвили Г.М. – О задачах Сен-венана для однородных анизотропных брусьев. Тб. Сообщения АН ГССР. 1963.

86. Хатиашвили Г.М. – Задачи Альманзи-Мичелла для однородных и составных. Тб. Мецниереба. 1983.

87. Тимошенко С.П. – Использование новых методов при исследовании устойчивости конструкций некоторых мостов. М. „Наука“. 1910.

88. Попов Г.Я., Ростовцев Н.А. – Контактные (смешанные) задачи теории упругости. Киев. Мат. журнал. 1966.

89. Леонов М.Д. – Основы механики упругого тела. Фрунзе. АН Киргиз.ССР. 1963. (Монография).

90. Штаерман И.Я. – Контактная задача теории упругости. М-Л. Гостехиздат. 1949. (Монография).

91. Галин Л.А. – Контактные задачи теории упругости. М. Гостехиздат. 1953. (Монография).

92. Уфлянд Я.С. – Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л. „Наука“. 1967.

93. Рвачев В.Л. – О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина. М. Прикладная математика и механика. 1949.

94. Моссаковский В.И., Губенко В.С. – Давление осесиметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. М. „Прикладная математика и механика“. 1960.

95. Коренев Б.Г. – Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. М. Госизд. лит. по стр.-ву. 1954.

96. Александров В.М., Сметанин Б.И. – Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М. „Наука“. 1965.

97. Савин Г.Н. – Механика деформируемых тел. Избранные труды. Киев. „Наукова думка“. 1979.

98. Лебедев Н.Н., Уфлянд Я.С. – Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. М. „Прикладная математика и механика“. 1958.

99. Девнорович В.И. – Пространственные контактные задачи теории упругости. Минск. Белгосуниверс. 1964.

100. Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М. – Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов. Высшая школа. 1964.

101. Александров В.М. – Контактные задачи теории упругости. М. „Наука“. 1967.

102. Панасюк В.В. – Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев. „Наукова думка“. 1986.

103. Михайлов Б.К., Кипиани Г.О. – Устойчивость трехслойных пластин с вырезами. М. Строит. механика и расчет сооружений. №4. 1989.

104. Попов Г.Я. – Математические проблемы контактных задач. Одесса. Выша школа. 1964.

105. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. „Наука“. 1966.

106. Космодамианский А. С. – Очерки по истории механики. М. Прикладная математика и механика.. 1964.

107. Моисеев Н.Д. – Очерки развития механики. Изв. Моск. Университета. 1961.

108. Гольденвейзер А.Л. – Свободные колебания тонких упругих оболочек. М. „Наука“. 1979.

109. Савин Г.Н., Флейшман Н.П. – Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. Киев. „Наукова думка“. 1964.

110. არაბიძე მ., დათუაშვილი ა. – ფერმების (წამწეები) გაანგარიშების ისტორიის საკითხისათვის (XIX, XX საუკუნეების მიჯნაზე). ჟურნალი „საისტორიო ვერტიკალები“, 1 (10), 2006.

111. ბაციკაძე თ., დათუაშვილი ა., არაბიძე მ. – მაღალი ძაბვის ელექტრო-გადამცემი ხაზების საყრდენების ქარსაწინააღმდეგო მდგრადობის საკითხისათვის. ჟურნალი „კერამიკა“, 1 (15), 2006.

112. ბაციკაძე თ., კაკუშაძე ა. – პრაქტიკული მეთოდების დამუშავება ანიზოტროპული კოჭების, ფილებისა და გარსების გასაანგარიშებლად. სპი. თბ., 1975.

113. გორგიძე ა., რუხაძე ა. – დაგრეხილი ძელის წყვილძალით ღუნვის ამოცანა. თბ., მოამბე. 1944

114. დათუაშვილი ა., ნიჟარაძე ჯ. – დრეკადობის თეორიის ბრტყელი ამოცანის დასმა და მისი კონფორმული ასახვით ამოხსნის ისტორია. ჟურნალი „მეცნიერება და ტექნოლოგიები“, № 4-6, 2006

115. ვეკუა ი. – აკადემიკოსი ნიკოლოზ მუსხელიშვილი. თბ. 1991.

116. Векуа И.Н. – Теория тонких пологих оболочек переменной толщины. Тб. 1965.

117. Горгидзе А.Я. – Метод последовательных приближений к плоской задаче теории упругости. Доклады АН СССР. 1934.

118. Байда Э.Н. – Общие решения теории упругости и задачи на параллелепипеде и цилиндре. Л. Лен. унив. 1961.

119. Динник А.Н. – Устойчивость упругих систем. Л-М ОНТИ 1935.

120. Девнорович – В.И. Пространственные контактные задачи теории упругости.

121. Лейбензон Л.С. – Курс теории упругости. М. „Гостехиздат“. 1947.

122. Лейбензон Л.С. – Вариационные методы решения задач теории упругости. М., 1943.

123. Лехницкий С.Г. – Анизотропные пластинки. М. „Гостехиздат“. 1947.

124. Лехницкий С.Г. – Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М. Наука, 1971.

125. Локшин А.З. – Изгиб и устойчивость пластин и круговых цилиндрических оболочек. Л. ОНТИ. 1955.

126. Лурье А.И. – Пространственные задачи теории упругости. М. 1955.

127. Лурье А.И. – Теория упругости. М. „ Наука“. 1970.

128. Лурье А.И. – Статика тонкостенных упругих оболочек. М-Л. Гостехиздат. 1947.

129. Механика деформирующих сред. Межвузовский научный сборник. Вып. 5, 1978.

130. Михлин С.Г. – О распределении напряжений в полуплоскости с эллиптическим вырезом. Л. Ленполитех. инст. 1934.

131. Михлин С.Г. – Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Л. „Наука“. 1938.

132. Михлин С.Г. – Приложения интегральных уравненый к некоторым проблемам механики, математической физики и техники. М. „Наука“. 1947.

133. Мурье А.М. – Пространственные задачи теории упругости. М. „Физматгиз“. 1955.

134. Мурье А.М. – Статика тонкостенных и упругих оболочек. М. „Наука“. 1947.

135. Панасюк В.В. – Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев. „Наукова думка“. 1983.

136. Панасюк В.В. – Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. Киев. „Наукова думка“. 1976.

137. Полозков А.А. – Изгиб, устойчивость и колебания подкрепленных пластин. Ростов. 1971.

138. Панасюк В.В. – Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. „Наукова думка“. 1968.

139. Прокопов В.К. – Осиметриальная задача теории упругости изобранного цилиндра. Л. 1950.

140. Работнов Ю.Н. – Механика деформируемого твердого тела. М. „Наука“. 1961.

141. Рвачев В.Л., Синекоп Н.С. – Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности. Киев. „Наукова думка“. 1968.

142. Савин Г.И. – Концентрация напряжений около отверстий. М-Л. Гостехиздат, 1951.

143. Саркисян В.С. – Некоторые задачи теории упругости анизотронного тела. Ереван. Университет. 1970.

144. Сен-Венан Б. – Мемуар о кручении и изгибе призм. М. Гостехиздат.1959.

145. Соляник-Красса К.В. – Осесимметричная задача теории упругости. М. Изд. АН СССР. 1987.

146. Тимошенко С.П. – История науки о сопротивлении материалов. ГИЗТТА. М. 1957.

147. Тимошенко С.П. – Пластинки и оболочки. М-Л. Гостехиздат. 1948.

148. Тимошенко С.П. – Прикладная теория упругости. Л. Гостехиздат. 1930.

149. Тимошенко С.П. – Теория упругости. М-Л. 1934, 1975, 1979.

150. Тимошенко С. П. – Устойчивость стержней, пластин и оболочек. М. Гостехиздат. 1971.

151. Тимошенко С.П. – Вопросы устойчивости упругих систем. Л. Гостехиздат. 1935.

152. Филоненко-Бородич М.М. – Теория упругости. М.-Л. Гостехиздат. 1947.

153. Филоненко-Бородич М.М. – Сопротивление материалов. М. Физматиздат. 1949.

154. Ширяев Е.А. – О кручении круглого бруса с трещиной на дуге окружности или по радиусу. ПММ 20. №4. 1956.

155. Статические и динамические задачи теории упругости и пластичности. Баку. Сборник статьей. 1968.

156. Трещиностойкость материалов и элементов конструкций. Киев. „Наукова думка“. 1980. материалы симпозиума.

157. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М. Изд. АН СССР. 1959.

158. Упругость и пластичность. М. Инст. тех.инж. 1967.
159. Прочность, устойчивость, колебания. М. „Машиностроение“. 1968. 3 тома.
160. Некоторые задачи теории упругости. Тб. ТГУ. 1975.
161. Развитие теории контактных задач в СССР. М. „Наука“. 1976.
162. Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов Изд. Универ. 1970.
163. Прикладные вопросы теории упругости и вязко-упругости. Пермь. Политехн. инст. 1971.
164. Методы расчета оболочек. Киев. „Наукова думка“. 1980.
165. Пространственные задачи теории упругости и пластичности. 6 томм. Киев. „Наукова думка“. 1984.
166. Теория оболочек с учетом поперечного сдвига. Казань. КГУ. 1977
167. Механика деформируемого тела. М. „Наука“. 1986.
168. Механика твердых деформируемых тел. М. ВИНИТИ. 1973.
169. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 3. Л. 1964.
170. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 12. Л. 1978.
171. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 13. Л. 1980.
172. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 15. Л. 1986.
173. Исследования по упругости и пластичности. Сборник 16. Л. 1990.
174. Мойзель В.М. – Температурная задача теории упругости. Киев. АН УССР. 1951.
175. Маслов Г.С. – Расчеты колебаний валов. М. „Машиностроение“. 1968.
176. Шерман Д.М. – Об одной особой задаче теории потенциала. М. Доклады АН СССР. 1954.
177. Карцивадзе И.Н. – Основные задачи теории упругости для упругого тела. М. Гостехиздат. 1943.
178. Араманович И.Г., Лунц Г.А., Эльсгольц Л.Э. – Функция комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М. „Наука“. 1965.
179. Бабаков И.М. – Теория колебаний. М. „Наука“. 1965.
180. Гузь А.Н. – Пространственные задачи теории упругости и пластичности. В 6 томах. Киев. Изд. АН. 1985
181. Гузь А.Н. – Методы расчета оболочек. В 5 томах. М. „Наука“. 1982.

182. Огибалов Л.М. – Изгиб, устойчивость и колебания пластинок. М. МГУ. 1958.

183. Огибалов Л.М. –Пластинки и оболочки. М. МГУ. 1969.

184. Каландия Л.И. – Математические методы двумерной упругости. М. „Наука“. 1973.

185. Коши О.А. – Алгебраический анализ. Лайпциг. 1864.

186. Купрадзе В.Д. – Трехмерные задачи теории упругости. Тб. ТГУ. 1968.

187. Михлин С.Г. – Плоская задачи теории упругости. М-Л АНСССР. 1935.

188. Угодчиков Ф.Г. – Кручение полых призматических стержней. М. Прикладная механика. 1956.

189. Угодчиков Ф.Г. – Решение краевых задач теории упругости методами аналитических функций. Горький. Гос. унив. 1969.

190. Горгидзе А.Я., Рухадзе А.К. – Об одном численном решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости. Тб. Сообщения АН. 1940.

191. Космодамианский А.С. – Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений. Автореферат. д.т.н. Киев. АН УССР. 1963.

192. Вайнберг Д.В. – Механические колебания. Киев. АН УССР. 1953.

193. Вайнберг Д.В. – Расчет оболочек. Киев. Госстройиздат. 1961.

194. Вайнберг Д.В. – Расчет пластин. Киев. Кудивельник. 1970.

195. Каландия А.И., Жгенти В.С. – О плоских задачах моментной теории упругости. Тб. Инст. математики. 1967.

196. Рвачев В.Л. – К задаче о давлении на упругое полупространство штампа с плоским основанием. М. „Прикладная математика и механика“. 1957.

197. Тренин С.М. – О решениях уравнений равновесия осесимметричной задачи теории упругости. М. Вестник. МГУ. 1953.

198. Зволинский К.В., Шапиро Г.С. – Динамика пластичных сред. М. „Наука“. 1963.

199. Динамические задачи теории упругости. Л. Лен. унив. 1953.

200. Материалы конференции по математической теории упругости в Тбилиси. Тб. фил. АН СССР. 1940.